

9. Übung Globale Analysis I

Abgabe am 26. Juni vor der Vorlesung.

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Es sei E ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum mit einer Orientierung. Für $X \in E$ bezeichne $X^\flat = (X, \cdot)$ die zu X assoziierte Linearform. Zeigen Sie für $w \in \Lambda^* E^*$

$$\iota_X w = \pm * (X^\flat \wedge *w).$$

Bestimmen Sie das Vorzeichen.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Sei E ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum. Es sei $\xi \in E$. In der Vorlesung definieren wir die *äußere Multiplikation mit ξ* durch:

$$\text{ext}_\xi: \Lambda E \rightarrow \Lambda E, \quad \text{ext}_\xi(\eta) := \xi \wedge \eta.$$

Man zeige, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow \Lambda^0 E \xrightarrow{\text{ext}_\xi} \Lambda^1 E \xrightarrow{\text{ext}_\xi} \Lambda^2 E \longrightarrow \dots \longrightarrow \Lambda^{n-1} E \xrightarrow{\text{ext}_\xi} \Lambda^n E \longrightarrow 0$$

an jeder Stelle exakt ist. Eine Sequenz $E \xrightarrow{\psi} F \xrightarrow{\varphi} G$ heißt exakt bei F , falls $\text{im } \psi = \ker \varphi$.

Aufgabe 3. (5 Punkte) [Das Cartan Lemma]

Sei E ein \mathbb{K} -Vektorraum der Dimension n . Seien $e_1, \dots, e_p \in E$ linear unabhängige Vektoren. Weiter seien $f_1, \dots, f_p \in E$ gegeben. Zeige, dass die Identität

$$\sum_{j=1}^p f_j \wedge e_j = 0.$$

genau dann gilt, wenn es $A_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i, j \leq p$, mit $A_{ij} = A_{ji}$ so gibt, dass für $j = 1, \dots, p$ gilt

$$f_j = \sum_{i=1}^p A_{ij} e_i.$$

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Sei E ein endlich-dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und sei $f \in \text{End}(E)$. Man zeige

$$\det(f + \lambda \cdot \text{Id}_E) = \sum_{j=0}^n \text{tr}(\Lambda^j f) \cdot \lambda^{n-j}.$$