

12. Übung Globale Analysis I

Aufgabe 1. (5 Punkte)

[Poincaré-Lemma für de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger]

Es sei $\Omega_0(M) := \{\omega \in \Omega(M) \mid \text{supp } \omega \text{ kompakt}\}$ für eine glatte Mannigfaltigkeit M . Offenbar gilt $d(\Omega_0^p(M)) \subset \Omega_0^{p+1}(M)$. Wir setzen

$$H_c^k(M) := (\ker d: \Omega_0^k(M) \rightarrow \Omega_0^{k+1}(M)) / (\text{im } d: \Omega_0^{k-1}(M) \rightarrow \Omega_0^k(M)).$$

Man beachte, dass jede Form $\omega \in \Omega_0(M \times \mathbb{R})$ von der Form

$$\omega = \omega_1(t) + \omega_2(t) \wedge dt$$

ist, wobei $\omega_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \Omega_0(M))$. Es sei $\eta \in \Omega_0^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \eta = 1$. Setze:

(a) $p_*: \Omega_0^p(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_0^{p-1}(M)$, $p_*\omega := \int_{\mathbb{R}} \omega_2(s) ds$, "Integration entlang der Faser".

(b) $e_*: \Omega_0^{p-1}(M) \rightarrow \Omega_0^p(M \times \mathbb{R})$, $e_*\omega := \omega \wedge \eta = \eta_1(t) \cdot \omega \wedge dt$.

(c) $K: \Omega_0^p(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_0^{p-1}(M \times \mathbb{R})$, $K\omega := (-1)^p \left(\int_{-\infty}^t \omega_2(s) ds - \int_{\mathbb{R}} \omega_2(s) ds \cdot \int_{-\infty}^t \eta \right)$.

Man zeige:

(i) $H_c^k(M)$ ist eine Diffeomorphie-Invariante und $H_c^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \mathbb{R}, & k = 1. \end{cases}$

(ii) $d\omega = d\omega_1(t) + ((-1)^p \frac{\partial \omega_1}{\partial t}(t) + d\omega_2(t)) \wedge dt$.

(iii) $p_*: \Omega_0(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_0(M)$ ist ein Komplexhomomorphismus vom Grad -1 .

(iv) $e_*: \Omega_0(M) \rightarrow \Omega_0(M \times \mathbb{R})$ ist ein Komplexhomomorphismus vom Grad $+1$.

(v) $e_* \circ p_* - \text{Id} = d \circ K + K \circ d$, $p_* \circ e_* = \text{Id}$.

(vi) Folgere, dass p_* einen Isomorphismus

$$H(p_*): H_c^k(M \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_c^{k-1}(M)$$

induziert. Mit (i) gilt insbesondere $H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \mathbb{R}, & k = n. \end{cases}$

Aufgabe 2. (5 Punkte)

[Mayer-Vietoris-Sequenz für de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger]

Es seien $U, V \subset M$ offen und $M = U \cup V$. Es seien $\iota_U: \Omega_0(U) \rightarrow \Omega_0(M)$, $\iota_V: \Omega_0(V) \rightarrow \Omega_0(M)$, $\nu_U: \Omega_0(U \cap V) \rightarrow \Omega_0(U)$, $\nu_V: \Omega_0(U \cap V) \rightarrow \Omega_0(V)$ jeweils die natürlichen "Fortsetzung-durch-0"-Abbildungen. Man zeige, dass die Mayer-Vietoris-Sequenz für Differentialformen mit kompaktem Träger

$$0 \rightarrow \Omega_0(U \cap V) \xrightarrow{(-\nu_U, \nu_V)} \Omega_0(U) \oplus \Omega_0(V) \xrightarrow{\iota_U + \iota_V} \Omega_0(M) \rightarrow 0$$

exakt ist. Folgere hieraus eine lange exakte Sequenz für die Kohomologie mit kompaktem Träger.

Aufgabe 3. (5 Punkte) [De Rham-Kohomologie des 2-Torus.]

Es sei $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

- (i) Begründe, warum $H^0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}$.
- (ii) Es sei $\omega = \varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy \in \Omega^1(\mathbb{T}^2)$, d.h. φ und ψ sind \mathbb{Z}^2 -periodisch. Es sei ω geschlossen. Zeige, dass dann die Funktionen

$$y \mapsto \int_0^1 \varphi(x', y)dx', \quad x \mapsto \int_0^1 \psi(x, y')dy'$$

konstant sind.

- (iii) Es sei ω wie oben. Zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn

$$\int_0^1 \varphi(x', 0)dx' = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \psi(0, y')dy' = 0.$$

Man folgere, dass $H^1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}[dx] \oplus \mathbb{R}[dy]$.

- (iv) Es sei $\omega = f(x, y)dx \wedge dy$ eine 2-Form, d.h. f ist \mathbb{Z}^2 -periodisch. Zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)dx dy = 0.$$

Folgere, dass $H^2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}[dx \wedge dy]$.

Hinweis zu (iv): Man betrachte die Form $\eta = \varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy$ mit

$$\varphi(x, y) = - \int_0^y \int_0^1 f(x', y')dx' dy', \quad \psi(x, y) = \int_0^x f(x', y)dx' - x \int_0^1 f(x', y)dx'.$$

Wann ist η eine glatte 1-Form auf \mathbb{T}^2 ?

Aufgabe 4. (5 Punkte)

Es seien $\omega \in \Omega^k(M)$ geschlossen und $f, g \in C^\infty(N^k, M)$ C^∞ -homotop, wobei N eine geschlossene orientierte Mannigfaltigkeit ist. Zeige:

$$\int_N f^* \omega = \int_N g^* \omega.$$