5. Vektorfelder und dynamische Systeme

Def 5.1 C^∞ - Vektorfeld X

Abbildung

$$X : M \to TM$$

mit

- $\forall_p \quad X(p) = X_p \in T_pM$
- Für jede Karte φ von M

$$T\varphi \circ X : U \subset M \to T\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

C^∞.

$$\Gamma(TM) = \{ C^\infty\text{- Vektorfelder auf } M \}$$

Beispiel 5.2 $X : S^1 \to TS^1$

$$(x,y) \longmapsto (-y, x) \in T_{(x,y)} S^1$$

z. B. Karte $\varphi = \phi^{-1}$

$$\phi : (0, 2\pi) \to S^1, \quad \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$X(\phi(\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta) = \frac{d}{d\theta}\phi(\theta)$$

$$= T_\theta\phi\left(\frac{d}{d\theta}\right)$$

Also

$$T_p\varphi(X_p) = T_{\phi(\phi^{-1}(p))}\phi^{-1}\left(T_{\phi^{-1}(p)}\phi \frac{d}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\Big|_{\varphi(p)}$$

sicherlich glatt!

Allgemein $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ Karte

$$X|_U = \sum_{j=1}^m X_j^\varphi \frac{\partial}{\partial x_j}$$

X C^∞-Vektorfeld $\Leftrightarrow$ Für jede Karte X_j^φ C^∞.

Beachte. $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p = T_{\varphi(p)} \varphi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial r_j}\Big|_{\varphi(p)} \right)$

$\frac{\partial}{\partial r_j}\Big|$ Standard Basis von $T_\cdot \mathbb{R}^m$.

Also für $r \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} & T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}(r) \\ &= T_{\varphi^{-1}(r)}\varphi \sum_{j=1}^m X_j^\varphi(\varphi^{-1}(r)) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\varphi^{-1}(r)} \\ &= \sum_{j=1}^m X_j^\varphi(\varphi^{-1}(r)) \frac{\partial}{\partial r_j}\Big|_r \\ &\approx \begin{pmatrix} X_1^\varphi \circ \varphi^{-1} \\ \vdots \\ X_m^\varphi \circ \varphi^{-1} \end{pmatrix}(r). \end{aligned}$$

<u>Def 5.3</u> (Integralkurve)

$$c : (a,b) \to M; \qquad c'(t) = X(c(t)).$$

In Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x_1 \circ c \\ \vdots \\ x_m \circ c \end{pmatrix}'(t) = (\varphi \circ c)'(t) = T_{c(t)}\varphi\,(c'(t))$$

$$= T_{c(t)}\varphi \; X(c(t))$$

$$= \begin{pmatrix} X_1^\varphi(c(t)) \\ \vdots \\ X_m^\varphi(c(t)) \end{pmatrix}.$$

In der Karte φ ist $c'(t) = X(c(t))$ äquivalent zu der <u>autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung</u>

$$(\varphi \circ c)'(t) = \begin{pmatrix} X_1^\varphi \circ \varphi^{-1} \\ \vdots \\ X_m^\varphi \circ \varphi^{-1} \end{pmatrix} ((\varphi \circ c)(t))$$

mit $X_j^\varphi \circ \varphi^{-1} \in C^\infty(\varphi(U))$.

Exkurs: Autonome Dgl.

Lokale Situation:

$$f : \overline{B(y_0, r)} \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

C^∞- Abbildung (Vektorfeld!).

f Lipschitz -

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \quad , \; L > 0.$$

Für $y \in B(y_0, r)$ sei $F(t, y)$ die maximale Lösung des AWP

$$\partial_t F(t, y) = f(F(t,y))$$

$$F(0, y) = y$$

$$a(y) < t < b(y).$$

1. Ziel: Abschätzung von $b(y)$ nach unten bzw. $a(y)$ nach oben!

$$F(t,y) = y + \int_0^t f(F(s,y))\, ds$$

Folglich für $|t| \leq 1$

$$|F(t,y) - y_0| = \left| y - y_0 + \int_0^t f(F(s,y))\, ds \right|$$

$$\leq |y - y_0| + |t|\,|f(y_0)| + \int_0^t |f(F(s,y)) - f(y_0)|\, ds$$

$$\leq |y - y_0| + |f(y_0)| + L \int_0^t |F(s,y) - y_0|\, ds.$$

<u>Lemma von Gronwall 5.4</u> $[a,b] \subset \mathbb{R}$,
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ stetig.

Falls

$$f(t) \leq C + \int_a^t f(s) g(s)\, ds,$$

so folgt

$$f(t) \leq C\, e^{\int_a^t g(s)\, ds}.$$

Bew. $F(t) := C + \int_a^t f(s)g(s)ds \geq f(t)$.

$h(t) := F(t)\, e^{-\int_a^t g(s)ds}$ differenzierbar!

$h'(t) = \big(f(t) - F(t)\big)\, g(t)\, e^{-\int_a^t g} \leq 0,$

$h(0) = C.$

Also $h(t) \leq C$, folglich

$f(t) \leq F(t) = h(t)\, e^{\int_a^t g} \leq C\, e^{\int_a^t g}$. $\square$

Gronwall liefert

$|F(t,y) - y_0| \leq \big(|y-y_0| + |f(y_0)|\big)\, e^{L|t|}$

Dies ist $< r$ falls

$L|t| < \log \dfrac{r}{|y-y_0| + |f(y_0)|}$

$\Leftrightarrow \quad |t| < \dfrac{1}{L} \log \dfrac{r}{|y-y_0| + |f(y_0)|}$.

Für $y \in B(y_0, r)$ existiert $F(t,y)$

mindestens für

$$|t| < \min\left(1, \frac{1}{L} \log \frac{r}{|y-y_0| + |f(y_0)|}\right).$$

Insbesondere: setzt man für $|y-y_0| \le \frac{r}{2}$

$$c := \min\left(1, \frac{1}{L} \log \frac{r}{\frac{r}{2} + |f(y_0)|}\right)$$

so existiert $F(t,y)$ auf dem

Rechteck $\underline{(-c, c) \times \overline{B(y_0, \frac{r}{2})}}$.

<u>2. Ziel:</u> F differenzierbar

Fixiere $\rho < r$ und Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$
so, dass F auf $[-\varepsilon, \varepsilon] \times \overline{B(y_0, \rho)}$ definiert

ist.

$y, \bar{y} \in B(y_0, \varrho)$:

$$|F(t,y) - F(t,\bar{y})| \leq |y-\bar{y}| + \left|\int_0^t f(F(s,y)) - f(F(s,\bar{y}))\, ds\right|$$
$$\leq |y-\bar{y}| + L\left|\int_0^t |F(s,y) - F(s,\bar{y})|\, ds\right|$$

Gronwall $\Rightarrow$

$$|F(t,y) - F(t,\bar{y})| \leq |y-\bar{y}|\, e^{L|t|}$$

<u>Zeige:</u> F stetig in $(t_0, \bar{y})$:

$$|F(t,y) - F(t_0,\bar{y})| \leq |F(t,y) - F(t,\bar{y})| + |F(t,\bar{y}) - F(t_0,\bar{y})|$$

$$\leq |y-\bar{y}|\, \underbrace{e^{L|t|}}_{\leq e^{L\varepsilon}} + \underbrace{|F(t,\bar{y}) - F(t_0,\bar{y})|}_{\text{differenzierbar in } t.}$$

Stetige partielle Differenzierbarkeit:

$$\partial_t F(t,y) = f(F(t,y)) \quad \text{ist stetig !}$$

$$D_y F(t,y) = ?$$

Leite

$$\partial_t F(t,y) = f(F(t,y))$$
$$F(0,y) = y$$

nach y ab:

$$(*) \begin{cases} \partial_t D_2 F(t,y) = \overbrace{Df(F(t,y))}^{n\times n} \overbrace{D_2 F(t,y)}^{n\times n} \\ D_2 F(0,y) = I. \end{cases}$$

$(*)$ ist ein gewöhnliches Anfangswertproblem für eine matrixwertige Funktion!

Sei

$$\Phi : (-\varepsilon,\varepsilon) \times B(x_0,\rho) \to M(n,\mathbb{R})$$

die eindeutig bestimmte Lösung von

$$(**) \begin{cases} \partial_t \Phi(t,y) = Df(F(t,y))\, \Phi(t,y) \\ \Phi(0,y) = I. \end{cases}$$

Nach dem bisher Bewiesenen ist ϕ stetig!

<u>Beh:</u> $F(t,y)$ ist nach y differenzierbar und es gilt
$$D_2 F(t,y) = \phi(t,y).$$

<u>Bew:</u> Sei $(t,\bar{y}) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times B(y_0,\rho)$ fest gegeben.

$$F(t,y) - F(t,\bar{y}) - \phi(t,\bar{y})(y-\bar{y})$$

$$= y - \bar{y} + \int_0^t f(F(s,y)) - f(F(s,\bar{y}))\, ds$$
$$- \int_0^t Df(F(s,\bar{y}))\phi(s,\bar{y})(y-\bar{y})\, ds - (y-\bar{y})$$

$$= \int_0^t f(F(s,y)) - f(F(s,\bar{y})) - Df(F(s,\bar{y}))\phi(s,\bar{y})(y-\bar{y})\, ds$$

f ist <u>stetig</u> differenzierbar. Also

ist für $x, y \in \overline{B(y_0,\rho)}$

$$f(x)-f(y) = Df(y)\,(x-y) + R(x,y)\,|x-y|$$

mit $\lim\limits_{x\to y} R(x,y) = 0$ gleichmäßig in y

Beweis hierfür:

$$f(x)-f(y) - Df(y)(x-y)$$

$$= \int_0^1 \{Df(tx+(1-t)y) - Df(y)\}\,(x-y)\,dt$$

Also

$$|R(x,y)| \le \int_0^1 | Df(tx+(1-t)y) - Df(y)|\,dt$$

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\quad |x-y|<\delta \Rightarrow |R(x,y)|<\varepsilon$$

Wegen der Stetigkeit von F:

$$\forall_{\delta>0}\ \exists_{\delta'>0}\quad |x-y|<\delta' \Rightarrow |F(t,x)-F(t,y)|<\delta$$

(lokal gleichmäßig in t).

Folglich gilt (lokal glm. in s)

$$f(F(s,y)) - f(F(s,\bar y)) - Df(F(s,\bar y))\phi(s,\bar y)(y-\bar y)$$

$$= Df(F(s,\bar y))\left[F(s,y) - F(s,\bar y) - \phi(s,\bar y)(y-\bar y)\right]$$

$$+ \underbrace{R(F(s,y),F(s,\bar y))\,|F(s,y)-F(s,\bar y)|}_{\leq\ \varepsilon\,|y-\bar y|\,e^{|s|\cdot L}}$$

schließlich

$$|F(t,y) - F(t,\bar y) - \phi(t,\bar y)(y-\bar y)|$$

$$\leq \left|\int_0^t \|Df(F(s,\bar y))\|\,|F(s,y)-F(s,\bar y)-\phi(s,\bar y)(y-\bar y)|\,ds\right|$$

$$+ \varepsilon\,|y-\bar y|\,\left|\int_0^t e^{|s|L}\,ds\right|$$

$$\leq C_1\,|y-\bar y|\,\varepsilon + C_2\left|\int_0^t |F(s,y)-F(s,\bar y)-\phi(s,\bar y)(y-\bar y)|\,ds\right|$$

also mit Gronwall

$$|\ldots| \leq C_1\,|y-\bar y|\,\varepsilon\, e^{C_2|t|}.$$

Damit ist $F(t,y)$ in der Tat nach y partiell differenzierbar und

$$D_2 F(t,y) = \phi(t,y)$$

ist stetig.

Flow-Box-Theorem 5.5 s. 6.10, [GA]

Nun wie Section 6, [GA]