1. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Erinnerung an den Begriff der Untermannigfaltigkeit (Analysis III).

$M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit

$:\Leftrightarrow$ lokal $M \cap U = \{F = 0\}$

$F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ Submersion.

1.1 Beispiele

1. $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1\}$

Global: $F(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

2. $T^n = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| = \ldots = |z_n| = 1\}$

$= T^1 \times \ldots \times T^n$

Global: $F : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^n \to \mathbb{R}^n$

$(x_j, y_j)_{j=1}^n \mapsto (x_j^2 + y_j^2 - 1)_{j=1}^n$

3. $SL(n,\mathbb{R}) = \{ A \in M(n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \mid \det A = 1 \}$

Ebenfalls global: $\det : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$GL(n,\mathbb{R}) := \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ offen!

$SL(n,\mathbb{R}) \subset GL(n,\mathbb{R})$

Ü $A \in GL(n,\mathbb{R})$, $H \in T_A GL(n,\mathbb{R}) = M(n,\mathbb{R})$

$$D \det(A)[H] = \operatorname{tr}(A^{-1}H) \cdot \det(A),$$

det ist Submersion auf $GL(n,\mathbb{R})$.

Weitere Beispiele interessanter und schöner Räume, die aber keine Untermannigfaltigkeiten sind.

1.2 <u>Weitere Beispiele (von Mfg!):</u>

1. Projektive Räume $\quad \mathbb{K} = \mathbb{R}$ od. $\mathbb{C}$

$$\mathbb{K}\mathbb{P}^n = \{\text{alle Geraden in } \mathbb{K}^{n+1}\}$$

$$= \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; \exists_{\lambda \in \mathbb{K}} \quad x = \lambda y$$

Offenbar

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n = S^n /_{x \sim -x} = S^n / \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n = S^{2n+1} /_{\sim} = S^{2n+1} / S^1.$$

Sog. homogene Koordinaten:

$$x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$$[x] = [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{K}\mathbb{P}^n.$$

2. Abstrakte Tori:

$\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}^n$ lin. unabh.

$\Gamma := \mathbb{Z}\omega_1 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_n$ "Gitter"

operiert auf $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n/\Gamma$ Quotientenraum.

Exkurs Quotiententopologie (kurz!)
sonst s. Vorlage VL SS04 / Seite 1.7 ff.

Was haben diese Beispiele mit Untermannigfaltigkeiten zu tun?

Stereographische Projektion

$$S^1 \setminus \{N = (0,1)^t\} \longrightarrow \mathbb{RP}^1 \setminus \{[1:0]\}$$
$$(x,y) \longmapsto \left[\frac{x}{1-y} : 1\right] = [x : 1-y]$$

bzw.

$$\mathbb{C}\times\mathbb{R} \supset S^2 \setminus \{N = (0,0,1)^t\} \longrightarrow \mathbb{CP}^1 \setminus \{[1:0]\}$$
$$(z,t) \longmapsto \left[\frac{z}{1-t} : 1\right] = [z : 1-t]$$

liefert Homöomorphismen

$$S^1 \to \mathbb{RP}^1$$

bzw.

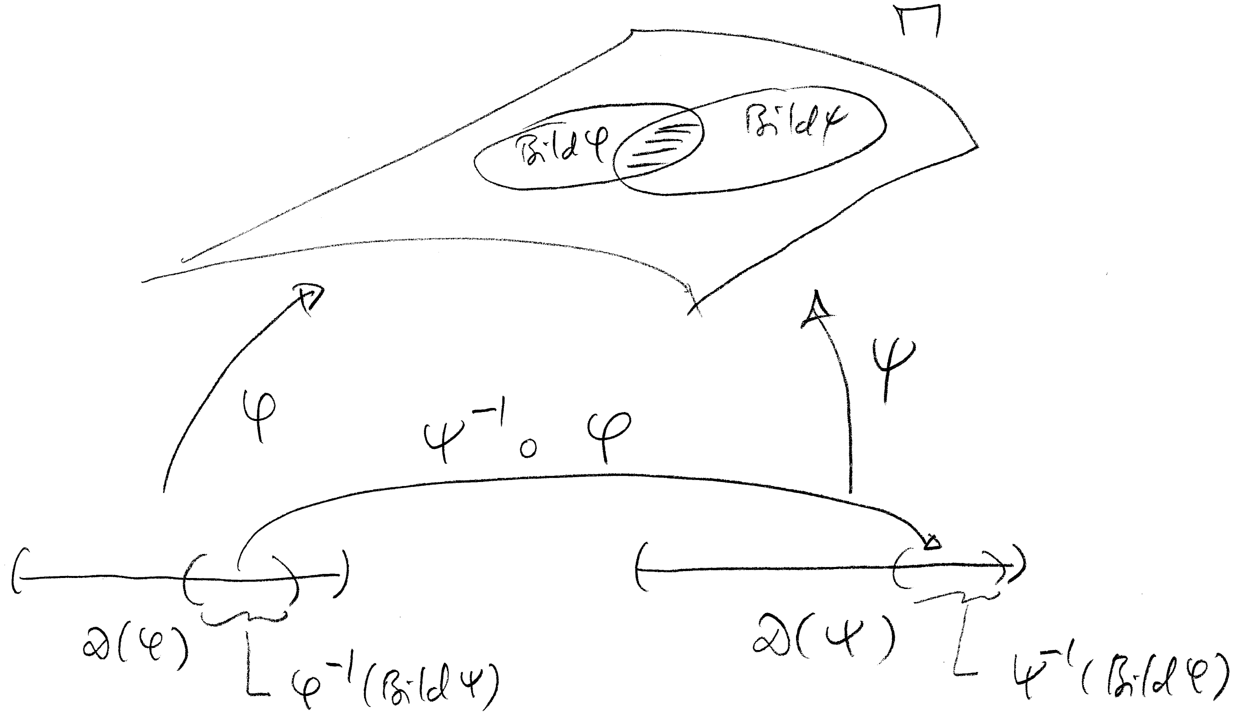
$$S^2 \to \mathbb{CP}^1.$$

$$\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_n$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r] \arrow[d] & T^n \\ \mathbb{R}^n/\Gamma \arrow[ur, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

$$\sum \lambda_j \omega_j \longmapsto \left(e^{2\pi i \lambda_j}\right)_{j=1}^n$$

<u>Erinnerung</u> $M \subset \mathbb{R}^n$ C^∞-Untermfg,
φ, ψ Parametrisierungen.



$\psi^{-1} \circ \varphi$ ist C^∞ !

Def 1.3 X separierter topologischer Raum.

1. Karte: $\mathcal{D}(\varphi) \subset X$ offen
$\varphi : \mathcal{D}(\varphi) \to V \subset \mathbb{R}^n$
Homöomorphismus

2. n-dimensionaler Atlas:
Menge $\mathcal{A}$ von Karten mit
$$\bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \mathcal{D}(\varphi) = M$$

3. Atlas $\mathcal{A}$ C^∞ (C^k, holomorph, analytisch, Lipschitz, algebraisch, linear...)
falls
$$\forall_{\varphi, \psi \in \mathcal{A}} \quad \varphi \circ \psi^{-1} \quad C^\infty \, (C^k, \dots)$$

Vereinbarung $\mathcal{D}(\varphi \circ \psi^{-1}) = \psi(\mathcal{D}(\varphi) \cap \mathcal{D}(\psi))$

Falls nichts anderes gesagt wird, sind alle Atlanten C^∞!

Bem 1.4

1. Jeder Atlas ist in genau einem maximalen Atlas enthalten.

2. <u>Differenzierbare Mannigfaltigkeit:</u>

   Paar $(M, \mathcal{A})$

   Nachtragen abzählbare Basis!

   - M Hausdorff-Raum
   - $\mathcal{A}$ maximaler C^∞-Atlas.

Wegen 1. genügt es irgendeinen (möglichst kleinen!) Atlas anzugeben.

Beispiel 1.5

1. V n-dim. $\mathbb{R}$-Vektorraum.

   $\mathcal{A} = \mathrm{Iso}(V, \mathbb{R}^n)$

   V <u>linear</u> Mfg.

   $(\mathbb{R}^n, \{id\})$.

2. $\mathbb{K}P^n$:

$$\mathcal{D}(\varphi_j) = \{ [x_0 : \dots : x_n] \mid x_j \neq 0 \}$$

$$\varphi_j : \mathcal{D}(\varphi_j) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$[x_0 : \dots : x_n] \longmapsto \left(\frac{x_i}{x_j} \right)_{\substack{i=0,\dots,n \\ i \neq j}}.$$

$\mathcal{D}(\varphi_j)$ ist offen und φ_j ein Homöomorphismus.

Kartenwechsel: $\quad 1 \leq i < j \leq n$

$$\mathcal{D}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) = \varphi_i(\mathcal{D}(\varphi_j))$$

$$= \{ y \in \mathbb{K}^n \mid y_j \neq 0 \}$$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n)$$

$$= \varphi_j([y_1 : y_2 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_j : \dots : y_n])$$

$$= \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{X_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, y_{j-1}/y_j, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right)$$

Ü 3. Kartenwechsel für $\mathbb{R}^n/T$.

4. Ü. $\hat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.

$\mathcal{A} = \{\varphi_\infty, \varphi_0\}$.

$\varphi_\infty : \mathbb{R}^n \to \hat{\mathbb{R}}^n, \; x \mapsto x$

$\varphi_0 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \hat{\mathbb{R}}^n, \; x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{|x|^2}, & x \neq \infty, \\ 0, & x = \infty. \end{cases}$

Ü $\hat{\mathbb{R}}^n \approx S^n$?

5. $M \subset \mathbb{R}^n$ diffbare UMfg (Analysis III)

$\mathcal{A} = \{ \varphi^{-1} \mid \varphi \text{ Parametrisierung} \}$.

Def 1.6 $f : M \to N$ differenzierbar

$:\Leftrightarrow$ Für alle Karten φ von M, ψ von N ist

$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ C^∞.

Diffeomorphismus: $\cdot$ f bijektiv
$\cdot$ f, f^{-1} differenzierbar

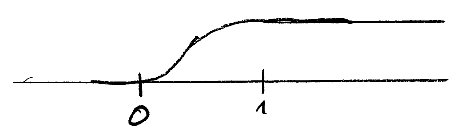
Gibt es genügend viele differenzierbare Abbildungen auf M?

1. 1 Technisches (unverzichtbares) Hilfsmittel: Teilung der Eins

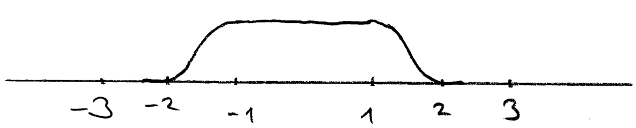
Hilfsfunktionen:

$$f_1(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t \geq 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \qquad f_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$$

$$f_2(t) = \frac{f_1(t)}{f_1(t) + f_1(1-t)}$$



$$f_3(t) = f_2(2+t)\, f_2(2-t)$$



$$f_4(x) = f_3(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Def 1.7 M differenzierbare Mannigfaltigkeit

Familie $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, $U_\alpha \subset M$, heißt

lokal endlich, falls

$$\forall_{p \in M} \; \exists_{U \text{ offen}} \; p \in U \text{ und } \{\alpha \mid U_\alpha \cap U \neq \emptyset\} \text{ endlich}.$$

Fakt aus der Topologie

Satz 1.8 Eine differenzierbare Mfg M (mit abzählbarer Basis der Topologie) ist parakompakt, d.h. jede offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von M besitzt eine lokal endliche Verfeinerung $(V_\beta)_{\beta \in B}$.

Verfeinerung: $\forall_{\beta \in B} \; \exists_{\alpha \in A} \; V_\beta \subset U_\alpha$.

~~Zusatz: B kann sogar abzählbar gewählt werden.~~

<u>Zusatz 1.9</u> $\mathcal{B}$ in Satz 1.9 kann abzählbar gewählt werden. Weiterhin kann man V_β so wählen, dass Karten

$$\psi_\beta : V_\beta \to B(0;3) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 3 \}$$

existieren mit

$$M \subset \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} \psi_\beta^{-1}(B(0;1)).$$

Beweis des Zusatzes (Komplett)

M ist lokal kompakt mit abzählbarer Basis.
Also gibt es Kompakta $K_1 \subset \mathring{K}_2 \subset \mathring{K}_3 \subset \dots$
mit $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

$K_{j+1} \setminus \mathring{K}_j$ ist kompakt! Zu $p \in K_{j+1} \setminus \mathring{K}_j$

gibt es eine Karte (V, φ) mit $\varphi(V) = B(0,3)$,
$V \subset \mathring{K}_{j+2} \setminus K_{j-1}$ und $V \subset U_\alpha$ f. ein α.

Also genügen (Kompaktheit!) endlich viele (V_ν, φ_ν)
so dass $\bigcup_\nu \varphi_\nu^{-1}(B(0,1))$ immer noch $K_{j+1} \setminus \mathring{K}_j$
überdeckt.

Alle (V_ν, φ_ν) leisten das Gewünschte. ∎

Satz 1.10 (Teilung der Eins)

Sei M eine differenzierbare Mfg. und $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung.

Dann existieren $\varphi_n \in C^\infty(M)$, $n \in \mathbb{N}$ mit

1. $0 \le \varphi_n \le 1$
2. $(\operatorname{supp} \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist lokal endlich
3. $\forall_n \; \exists_{\alpha \in A} \; \operatorname{supp} \varphi_n \subset U_\alpha$
4. $\forall_{p \in M} \; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(p) = 1$.

Zusatz: Ist $A \subset \mathbb{N}$ höchstens abzählbar, so kann man entsprechend $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ finden mit $\operatorname{supp} \varphi_\alpha \subset U_\alpha$ (möglicherweise $\varphi_\alpha = 0$).

Wegen 3. heißt (φ_n) der Überdeckung subordinierte Zerlegung der Eins.

<u>Bew:</u> V_n, $\psi_n : V_n \to B(0;3)$ wie im

Zusatz 1.9.

Setze $$\tilde{\varphi}_n := \begin{cases} f_4(\psi_n(x)), & x \in V_n, \\ 0, & x \notin V_n. \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi} := \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \in C^\infty(M) \quad \text{und}$$

$$\forall_{p \in M} \quad \tilde{\varphi}(p) > 0.$$

Setze $$\varphi_n := \tilde{\varphi}_n / \tilde{\varphi}.$$

Ist $A \subset N$ höchstens abzählbar.

induktiv: $$J_0 = \emptyset, \quad \varphi_0 = 0$$

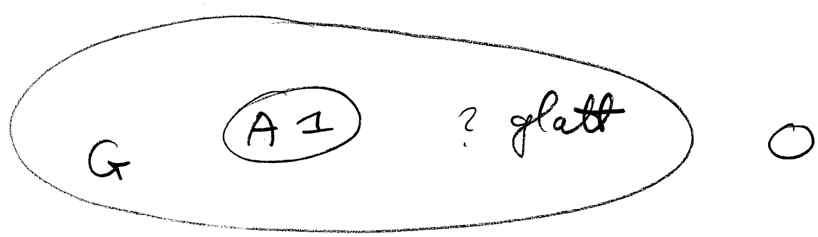
$$J_k = \{ i \in A \setminus J_{k-1} \mid \operatorname{supp} \varphi_i \subset U_k \}$$

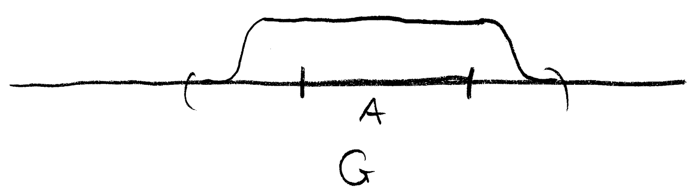
$$\varphi_k = \sum_{i \in J_k} \tilde{\varphi}_i / \tilde{\varphi}.$$

Satz 1.11 Sei $A \subset M$ abgeschlossen und $G \subset M$ offen mit $A \subset G$. Dann existiert ein $f \in C^\infty(M)$ mit

$0 \leq f \leq 1$ und

$$f(p) = \begin{cases} 1, & p \in A \\ 0, & p \notin G \end{cases}$$





Bew: $\{M \setminus A, G\}$ ist offene Überdeckung.

Sei $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ subordinierte Zerlegung der Eins. Dann leistet $f = \varphi_1$ das Gewünschte. ∎

VL 20.10.05

<u>Nachtrag</u> zur Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gehört auch, dass M eine abzählbare Basis der Topologie hat.

2. <u>Der Tangentialraum</u>

<u>Motivation</u> Sei $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Submersion und $M = \{F = 0\}$.

Tangentialraum

$$T_p M = \left\{ \gamma'(0) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \gamma : I \to M \subset \mathbb{R}^n \\ \text{Kurve},\ \gamma(0) = p \end{array} \right\}$$

$$= \operatorname{grad} F(p)^{\perp}.$$

Problem: $T_p M \subset \mathbb{R}^n$. Definition benutzt Einbettung.

Jedes $v \in T_p M$ definiert Richtungsableitung

$$v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$

$v f = \langle$ [illegible] $F(p), v \rangle$

Verworfen

2. Der Tangentialraum

VL 20.10.05

Nachtrag: Differenzierbare Mfg. M hat stets abzählbare Basis der Topologie

2.1 Der Begriff des Keimes

M, N Mannigfaltigkeiten, $p \in M$, $q \in N$.

$$C^\infty((M,p);(N,q)) = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{D}(f) \ni p \text{ offen} \\ f : \mathcal{D}(f) \to N \quad C^\infty \\ f(p) = q \end{array} \right\}$$

Äquivalenzrelation auf $C^\infty((M,p);(N,q))$:

$f \sim g \iff \exists$ offene Umgebung U von p mit $f|U = g|U$.

Die Äquivalenzklasse $[f]$ von f heißt Keim von f bei p.

Analog gibt es Keime stetiger (...usw.)

Abbildungen.

Die Menge aller Keime $(M,p) \to (N,q)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{E}((M,p);(N,q))$.

wie folgt: ist $\gamma : I \to M$ Kurve mit $\gamma'(0) = v$, so ist

$$vf := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)).$$

vf ist unabhängig von der Wahl von γ.

Des Weiteren ist v eine Derivation, d.h.

$$v(fg) = (vf)\, g(p) + f(p)\, vg.$$

Def 2.1 $M \in \underline{Diff}$. $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ heißt Derivation bei p, falls

- X_p linear
- $X_p(fg) = f(p) X_p g + g(p) X_p f$.

$T_p M = \{\text{Derivationen bei } p\}$ heißt Tangentialraum an M in p. $T_p M$ ist in der Tat ein Vektorraum.

2.2 <u>Einfache Eigenschaften:</u>

1. $X_p(1) = X_p(1 \cdot 1) = 2\, X_p(1) = 0.$

2. $X_p \neq 0$ bestimmt p eindeutig. Ü

3. Sei (U, φ) eine Karte mit Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_n$. Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p f := \frac{\partial}{\partial r_i}\Big|_{\varphi(p)} f \circ \varphi^{-1} = D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))[e_i]$$

eine Derivation bei p und $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p x_j = \delta_{ij}$.

<u>Lemma 2.2</u> Sei (U, φ) eine Karte mit Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_n$; $\varphi(p) = 0$, und $f \in C^\infty(M)$. Dann existieren $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$ mit

$$f|U = \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot x_j + f(p).$$

<u>Beweis</u> 1. $M = \mathbb{R}^n$, $U = (-\varepsilon, \varepsilon)^n$, $\varphi = id$.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_1, \dots, x_j, 0, \dots, 0) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, \dots, 0)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 (\partial_j f)(x_1, \dots, x_{j-1}, t x_j, 0 \dots 0)\, dt \cdot x_j$$

2. $M = \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi = id$.

Sei $V = (-\varepsilon, \varepsilon)^n \subset U$ und

$$f|V = \sum_{j=1}^n f_j x_j .$$

Sei $\varphi \in C_0^\infty(V)$, $\varphi | (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)^n \equiv 1$.
Dann ist

$$f = f\varphi + f(1-\varphi)$$
$$= \sum_{j=1}^n (f_j \varphi) x_j + \frac{f(1-\varphi)}{x_1} \cdot x_1$$

3. (U, φ) Karte. $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$

$$f \circ \varphi^{-1}(r) = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j(r) \cdot r_j$$

$$\Rightarrow \quad f = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j \circ \varphi \cdot x_j . \quad \blacksquare$$

Satz 2.3 $M \in \underline{\text{Diff}}$. $\dim M = n$.

T_pM ist ein Vektorraum der Dimension n.

Ist φ eine Karte um p, so ist

$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$ eine Basis von T_pM.

Bew: $f \in C^\infty(M)$, $f = \sum_{j=1}^n f_j(x_j - x_j(p)) + f(p)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p f = \sum_{j=1}^n f_j(p)\,\delta_{ij} = f_i(p)$$

Sei $X \in T_pM$. Dann

$$Xf = \sum_{j=1}^n f_j(p)\, X x_j$$

$$\sum_{j=1}^n (Xx_j) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p f = \sum_{i=1}^n f_i(p)\, Xx_i,$$

also

$$X = \sum_{j=1}^n (X x_j) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p x_j = \delta_{ij}$ sind $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p$ sicher linear unabhängig. $\boxtimes$

2.4. Bsp

1. Im $\mathbb{R}^n$ sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$ in jedem $p \in \mathbb{R}^n$ eine Basis des $T_p\mathbb{R}^n$.

2. Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$

$$\phi : (0,\infty)\times(0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$$
$$(r,\varphi) \longmapsto (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$$

ist ein Diffeomorphismus. ϕ^{-1} ist eine Karte von $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+$. Dabei fassen wir r, φ als Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ auf.

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \quad \text{falls } y, x > 0.$$

Die Kettenregel liefert für $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big|_p f = \frac{\partial}{\partial r} f\circ(\phi^{-1})^{-1}(r(p_0), \varphi(p_0))$$
$$= \frac{\partial}{\partial r} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\Big|_{\substack{r = r(p_0) =: r_0 \\ \varphi = \varphi(p_0) =: \varphi_0}}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(p)\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

also

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big|_p = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{y}{\sqrt{}} \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p .$$

Ü

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_p f = \frac{\partial}{\partial \varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\Big|_{(r_0,\varphi_0)}$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_p r \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_p r\cos\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\Big|_p = -y \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + x \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p .$$

Ü Drücke $\frac{\partial}{\partial x}\big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\big|_p$ im (r, φ) Koordinaten-system aus.

3. Allgemein. Sei $\phi = (y_1, \dots, y_n)$ eine Karte auf einer offenen Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$. $f \in C^\infty(U)$, $p \in U$.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p f = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \phi^{-1} \circ \phi)(p)$$

$$= \sum_{j=1}^n (\partial_j f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(p)$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p f .$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_j \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p$$

wobei $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(p)$ der Eintrag in Zeile j

und Spalte i der Jacobi-Matrix von Φ ist!

<u>Def 2.5</u> (Tangentialabbildung)

$M^m, N^n \in$ <u>Diff</u>, $f \in C^\infty(M, N)$, $p \in M$

$$T_p f : T_p M \to T_{f(p)} N$$

$$T_p f(X) \cdot \varphi := X(\varphi \circ f), \quad \varphi \in C^\infty(N).$$

heißt Tangentialabbildung.

Man mache sich klar, dass für offene Teilmengen $M^m \subset \mathbb{R}^m$, $N^n \subset \mathbb{R}^n$ $T_p f$ in der Standardbasis durch die Jacobimatrix von f gegeben ist.

Man überlege sich die Kettenregel

$$T_p f \circ g = T_{g(p)} f \circ T_p g.$$

Jede Karte (U, φ) liefert einen Isomorphismus

$$T_p\varphi : T_p M \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$$

Ist ψ eine weitere Karte, so folgt

$$T_p\psi = T_p(\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)$$

$$= D_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})\ T_p\varphi$$

Physikerverständnis von Tangentialvektoren.

- Jedem Koordinatensystem φ ist ein $\xi^\varphi \in \mathbb{R}^4$ zugeordnet.

- Es gilt $\xi^\psi = D_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})[\xi^\varphi]$.

<u>Kurven</u>

Sei $c : I \to M$ eine glatte Kurve.

$$\dot{c}(t_0) := T_{t_0} c \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \right)$$

"Geschwindigkeitsvektor".

Jedes $X \in T_pM$ ist Geschwindigkeitsvektor einer Kurve durch p:

φ zentrierte Karte um p $\quad (\varphi(p) = 0)$

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p$$

$$c(t) := \varphi^{-1}(tX_1, \dots, tX_n)$$

Für $f \in C^\infty(M)$

$$\dot{c}(0) f = T_0 c\left(\frac{d}{dt}\right) f$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(c(t))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x_j}(0) = Xf. \qquad \boxed{q}$$

3. Lokale Eigenschaften differenzierbarer Abbildungen, Untermannigfaltigkeiten

Wie GA, SS 2004, Sect. 3

4. Satz von Sard

Wie GA, SS 04, Sect 5 Satz v. Sard
allerdings nicht bewiesen.