

Skriptum zur Vorlesung Analysis

Wintersemester 2001/2002

Prof. Dr. Matthias Lesch

UNIVERSITÄT ZU KÖLN, MATHEMATISCHES INSTITUT, WEYERTAL 86–90, D–
50931 KÖLN

E-mail address: lesch@mi.uni-koeln.de

URL: <http://www.mi.uni-koeln.de/~lesch>

ZUSAMMENFASSUNG. Dieses Skriptum ist zunächst nur für die Hörer meiner Vorlesung bestimmt.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I. Grundbegriffe: Mathematische Sprache und Mengen	5
1. Aussagenlogik	5
2. Mengen	13
3. Relationen und Abbildungen	17
Kapitel II. Natürliche, ganze und rationale Zahlen	27
1. Die PEANO–Axiome der natürlichen Zahlen, vollständige Induktion	27
2. Ganze und rationale Zahlen	30
3. Rekursion, Definition durch Induktion	31
Kapitel III. Die reellen Zahlen	35
1. Angeordnete Körper, Absolutbetrag	35
2. Supremum und Infimum	40
3. Mächtigkeit von Mengen, abzählbare und überabzählbare Mengen	45
Kapitel IV. Metrische Räume und Konvergenz	49
1. Die komplexen Zahlen	49
2. Einige Ungleichungen	50
3. Metrische Räume	53
4. Konvergenz	54
5. Konvergenzprinzipien	59
6. Reihen	64
Kapitel V. Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen	75
Kapitel VI. Polynome und Potenzreihen	77
1. Potenzreihen	77
2. Polynome	78
3. Der Identitätssatz für Potenzreihen	79
Kapitel VII. Topologische Grundbegriffe, Stetigkeit	81
1. Offene und abgeschlossene Mengen	81
2. Grenzwerte von Abbildungen, Stetigkeit	82
3. Der Zwischenwertsatz	85
4. Kompaktheit	86
5. Der Fundamentalsatz der Algebra	87
6. Gleichmäßige Stetigkeit	88
7. Normen	88
Kapitel VIII. Die Exponentialfunktion	93
1. Die Funktion \exp	93
2. Der Logarithmus	94

3. Die trigonometrischen Funktionen	95
4. Tangens und Arcusfunktionen	98
Kapitel IX. Differentialrechnung	99
1. Die Ableitung	99
2. Pathologien	104
3. Lokale Extrema, Mittelwertsätze, Monotonie	105
4. Konvexität	108
5. Partielle Ableitungen	110
Kapitel X. Das Baby Integral	113
1. Das bestimmte Integral	113
2. Integrationstechnik	114
3. Regelfunktionen	117
4. Ergänzungen	118
Kapitel XI. Gleichmäßige Konvergenz	125
1. Metrische Räume von Abbildungen, Stetigkeit der Grenzfunktion	126
2. Ableitung und Integral der Grenzfunktion	127
3. Kriterien für gleichmäßige Konvergenz, Beispiele	127
4. Parameter- und Doppelintegrale	132
5. Der Satz von ARZELA-ASCOLI	132
6. Der Satz von STONE-WEIERSTRASS	133
Literaturverzeichnis	135

KAPITEL I

Grundbegriffe: Mathematische Sprache und Mengen

In diesem Kapitel werden einige grundlegende mathematische Begriffsbildungen vorgestellt. Diese gehören nicht im eigentlichen Sinne zur Analysis. Vielmehr werden die hier vermittelten Inhalte in jeder mathematischen Disziplin verwandt. Die Mathematik bedient sich einer eigenen Formelsprache. Hierzu gehört zunächst die Sprache der Logik und darauf aufbauend die Sprache der Mengentheorie¹. Es ist keine Übertreibung zu sagen, dass die gesamte heutige Mathematik auf der Mengentheorie aufbaut.

Das nachfolgende Material erhebt keinen Anspruch, eine Logik- oder Mengentheorievorlesung zu ersetzen. Vielmehr sollen von einem pragmatischen Standpunkt ausgehend, die Inhalte vermittelt werden, die notwendig sind, Mathematik zu betreiben. Für an grundlagentheoretischen Fragen interessierte Studenten² werde ich im SS 2002 ein Proseminar zum Thema „Axiomatische Grundlagen der Mathematik“ anbieten.

1. Aussagenlogik

1.1. Aussagen. Ein sprachlicher Ausdruck, welcher eindeutig wahr oder eindeutig falsch ist, nennen wir eine *Aussage*.

Diese „Definition“ wird an dieser Stelle, obwohl das möglich wäre [5], nicht weiter philosophisch hinterfragt. Wir alle haben (hoffentlich) ein intuitives Verständnis des Begriffes „Aussage“. Jedenfalls unterscheiden sich Aussagen klar von Fragen, Anweisungen oder Meinungsäußerungen. Bei letzteren ist der Übergang zu Aussagen allerdings fließend. Ein sprachlicher Satz, bei welchem sich über wahr oder falsch vortrefflich streiten ließe („Dieses Bild ist sehr schön“) wollen wir jedenfalls nicht als Aussage betrachten.

BEISPIELE 1.1.

$2 + 3 = 5$	(wahr)
$P := \text{T. KÜPPER ist Rektor der Universität zu Köln}$	
P	(wahr)
$4 + 5 = 8$	(falsch)
$P \text{ ist falsch}$	(falsch)
Warum studieren Sie Mathematik?	(keine Aussage)

Wir verwenden die folgenden Hauptprinzipien der zweiwertigen Logik

- Prinzip der Zweiwertigkeit
- Extensionalitätsprinzip

¹Der umgangssprachliche Begriff „Mengenlehre“ erinnert zu sehr an die Bildungsreform der 70er Jahre und ist daher belastet. Die mathematische Mengentheorie ist jedenfalls nicht mit dem zu verwechseln, was Pädagogen unter „Mengenlehre“ für die Klasse 5 verstehen.

²Das Wort „Student“ ist geschlechtsneutral zu verstehen.

Das Prinzip der Zweiwertigkeit besagt, dass eine Aussage entweder wahr oder falsch ist. Diffuse Begriffe wie „ungefähr“, „meist wahr“ sind daher ausgeschlossen. Auch das Alltagsprinzip „keine Regel ohne Ausnahme“ ist nicht akzeptiert; vielmehr: „jede Regel **ohne** Ausnahme“.

Das Zweiwertigkeitsprinzip lässt sich aufspalten in

- *Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch:*
Eine Aussage kann nicht zugleich wahr und falsch sein,
- *Tertium non datur - es gibt kein drittes:*
Eine Aussage hat einen der Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“.

Das Extensionalitätsprinzip besagt, dass der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage nur von den Wahrheitswerten ihrer Bestandteile abhängt.

BEISPIELE 1.2. 1. Ich liebe Mathematik und ich wohne in Bonn

1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

2.

Er verließ das Land und wurde reich

Er wurde reich und verließ das Land

Beide Aussagen sind im Sinne der zweiwertigen Logik völlig äquivalent. Allerdings enthalten beide Sätze verschiedene sprachliche Intentionen. Diese werden durch die zweiwertige Logik (zunächst) nicht erfasst.

1.2. Aussageverknüpfungen. Aussagen können in verschiedener Weise miteinander verknüpft werden. Aufgrund des Extensionalitätsprinzips kann man Verknüpfungen in Form von Wahrheitstabellen darstellen. Die wichtigsten Verknüpfungen sind:

1.2.1. *Konjunktion.* $A \wedge B$ (sprich: A und B) ist genau dann wahr, wenn A und B beide zugleich wahr sind.

Es stehen zwei Varianten von Wahrheitstabellen zur Verfügung:

$A \wedge B$	1	0
1	1	0
0	0	0

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
0	0	0
1	0	0
0	1	0

1.2.2. *Disjunktion.* $A \vee B$ (sprich: A oder B)

A	B	$A \vee B$
1	1	1
0	0	0
1	0	1
0	1	1

Man beachte, dass in der deutschen Sprache das „oder“ oft im ausschließenden Sinne gebraucht wird. „ \vee “ hingegen ist im nichtausschließenden Sinne zu verstehen!

BEISPIEL 1.3. Wollen Sie Tee oder Kaffee?

Das „oder“ ist hier im ausschließenden Sinne gemeint. Ein Mathematiker könnte jedoch einfach mit „ja“ antworten! Mein zweijähriger Sohn hat das nichtausschließende „oder“ übrigens bereits verstanden. Er antwortet beim Abendbrot auf die Frage „Wurst oder Käse?“ stets mit „ja“.

Will man das „oder“ ausschließend verwenden, so bedient man sich der „entweder-oder“-Konstruktion. Die Wahrheitstafel des ausschließenden „oder“ (Antivalenz genannt) lautet:

A	B	$A \text{ xor } B$
1	1	0
0	0	0
1	0	1
0	1	1

1.2.3. *Negation.* $\neg A$ (sprich: nicht A). Die Negation ist eine unäre Operation.

A	$\neg A$
1	0
0	1

1.2.4. *Implikation.* $A \Rightarrow B$ (sprich: A impliziert B). Weitere übliche Sprechweisen für die Implikation sind: „ A impliziert B “, „Wenn A dann B “, „ A ist hinreichend für B “, „ B ist notwendig für A “.

Die Wahrheitstafel der Implikation bereitet erfahrungsgemäß gewisse Schwierigkeiten:

A	B	$A \Rightarrow B$
1	0	0
0	1	1
1	1	1
0	0	1

Zur Motivation diene folgende Betrachtung: Person X stelle die Behauptung $A \Rightarrow B$ auf. Wann können wir sicher sagen, dass X lügt? Falls A falsch ist, so ist die Aussage $A \Rightarrow B$ leer, also kann man X kaum der Lüge überführen. X ist nur dann der Lüge überführbar, wenn A falsch und zugleich B wahr ist. Dem entspricht obige Wahrheitstafel.

Man beachte, dass die extensionale Implikation keinerlei kausalen Zusammenhang (weder implizit noch explizit) zwischen A und B herstellt. Zur Illustration betrachten wir:

Wenn Deutschland zu Europa gehört, dann ist Schnee weiß.

oder

Wenn der Mond ein Würfel ist, so gehört Deutschland zu Australien.

Beide Aussagen sind wahr! Die erste Aussage erweckt den Eindruck als würde ein kausaler Zusammenhang zwischen der geographischen Lage von Deutschland und der Farbe des Schnees bestehen. Die zweite (wahre!) Aussage dürften Menschen, die die extensionale Implikation nicht kennen, als Unsinn betrachten.

FAZIT. *Ex falso sequitur quodlibet* - aus dem Falschen folgt das Beliebige.

DEFINITION 1.4. Zwei zusammengesetzte Aussagen heißen logisch äquivalent (Schreibweise \equiv), falls ihre Wahrheitswerte für alle möglichen Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen übereinstimmen.

SATZ 1.5. $(A \Rightarrow B)$ ist logisch äquivalent zu $(\neg A) \vee B$, oder kurz

$$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A) \vee B.$$

BEWEIS. Der Beweis ergibt sich aus der Betrachtung der folgenden Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
1	0	0	0
0	1	1	1
1	1	1	1
0	0	1	1

□

1.2.5. Äquivalenz. $A \Leftrightarrow B$ (sprich: A ist äquivalent zu B)

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
0	0	1
1	0	0
0	1	0

BEMERKUNGEN 1.6. 1. Man mag sich die Frage stellen, was der Unterschied zwischen „ \equiv “ und „ \Leftrightarrow “ ist. Diese beiden Zeichen liegen in der Tat sehr eng beieinander. „ \equiv “ beinhaltet die Behauptung der logischen Äquivalenz während „ \Leftrightarrow “ lediglich ein logisches Verknüpfungssymbol ist. Die zusammengesetzte Aussage $A \Leftrightarrow B$ kann die Wahrheitswerte 0 oder 1 annehmen. Hingegen sollten wir $A \equiv B$ lesen als: „unabhängig von den Wahrheitswerten der Teilaussagen von A und B ist die Aussage $A \Leftrightarrow B$ stets wahr.“

2. Ähnlich der alten Schulregel „Punktrechnung geht vor Strichrechnung“ gibt es auch für die logischen Verknüpfungssymbole Bindungsprioritäten, die die Zahl der Klammern in den Formeln reduzieren. Die Prioritäten lauten wie folgt:

1. \neg
2. \wedge
3. \vee
4. $\Rightarrow, \Leftrightarrow, \equiv$

Dies bedeutet, dass man statt $(\neg A) \vee B$ einfach $\neg A \vee B$ schreiben kann. Ebenso können in $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$ die Klammern weggelassen werden. Es hat allerdings noch nie geschadet, eine Klammer zu viel zu setzen!

1.3. Tautologien, Schlussregeln.

DEFINITION 1.7. Eine (zusammengesetzte) Aussage heißt eine *Tautologie*, falls sie unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen wahr ist.

Sie heißt ein *Widerspruch*, falls sie unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Teilaussagen falsch ist. M.a.W. A ist genau dann ein Widerspruch, wenn $\neg A$ eine Tautologie ist.

Das Symbol für den Widerspruch lautet: \perp Absurdum

BEISPIELE 1.8. Die folgenden Aussagen sind Tautologien:

$$\begin{aligned} A \vee \neg A, \\ A \wedge \neg A &\Leftrightarrow \perp, \\ P \Rightarrow (P \vee Q), \\ P \wedge Q &\Rightarrow P. \end{aligned}$$

Man überprüft dies unmittelbar durch Aufstellen der jeweiligen Wahrheitstafel. Siehe dazu auch die Wahrheitstafel (1.1).

SATZ 1.9 (DE MORGANSche Regeln). *Die DE MORGANSchen Regeln zur Negation einer Konjunktion bzw. einer Disjunktion lauten:*

$$\begin{aligned} \neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q, \\ \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q. \end{aligned}$$

BEWEIS. Der Beweis ergibt sich aus der Betrachtung der folgenden Wahrheitstafel:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
1	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0

□

Jede Tautologie liefert eine Schlussregel. Die wichtigsten Schlussregeln sind:

- $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$ (modus ponens)
- $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow [P \Rightarrow R]$ (Gesetz des Syllogismus)
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ (Widerspruchsbeweis 1. Variante, Kontrapositiv)
- $P \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow \perp)$ (Widerspruchsbeweis 2. Variante)
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$ (Äquivalenzbeweis)

Jede dieser Tautologien beweist man durch Betrachtung der entsprechenden Wahrheitstafel. Beispielhaft beweisen wir 3.:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

(1.1)

Da in der rechten Spalte unabhängig von den Wahrheitswerten von P und Q stets eine 1 steht, handelt es sich in der Tat um eine Tautologie.

1.4. Aussageformen, Quantoren.

DEFINITION 1.10. Eine *Aussageform* ist ein sprachlicher Ausdruck mit einer oder mehreren Leerstellen (Variablen) so, dass nach Ausfüllen der Leerstellen jeweils eine Aussage entsteht.

Einer Aussageform selbst kommt **kein** Wahrheitswert zu.

BEISPIELE 1.11. 1. $P(x) = x$ ist Bundeskanzler

$P(\text{G. SCHRÖDER})$ (wahr)

$P(\text{M. LESCH})$ (falsch)

2. $P(x, y, z) = (x + y = z)$

$P(2, 3, 4)$ (falsch)

$P(2, 3, 5)$ (wahr)

Eine Aussageform, $P(x)$, mit einer Variablen kann wie folgt zu einer Aussage quantifiziert werden.

	zu lesen als
$\exists_x P(x)$	Es gibt mindestens ein x so, dass $P(x)$ wahr ist.
$\forall_x P(x)$	Für jedes beliebige x eingesetzt in $P(x)$ wird $P(x)$ zu einer wahren Aussage.

Die Symbole \exists, \forall werden nicht weiter erklärt. Vielmehr wird ihr Gebrauch durch *Regeln* festgelegt.

Ist $P(a, b, c, d)$ eine Aussageform mit vier freien Variablen, so wird durch

$$Q(a, b, c) = \exists_d P(a, b, c, d)$$

eine Aussageform mit drei Variablen und durch

$$\begin{aligned} R(a, b) &= \forall_c Q(a, b, c) \\ &= \forall_c \exists_d P(a, b, c, d) \end{aligned}$$

eine Aussageform mit zwei Variablen. In der Formel $\forall_c \exists_d P(a, b, c, d)$ spricht man von a, b als *freie Variablen* und von c, d als (durch Quantoren) *gebundene Variablen*.

Die Regeln zum Gebrauch der Quantoren lauten:

AXIOM 1.12 (Regeln für die Quantoren \forall, \exists). *Sei A eine Aussage und $P(x)$ eine Aussageform. a sei ein Name für ein bestimmtes Objekt. Dann gilt:*

1. $P(a) \Rightarrow \exists_x P(x)$ „Falls P für ein bestimmtes a richtig ist, so ist $\exists_x P(x)$ richtig“;
2. $\forall_x P(x) \Rightarrow P(a)$ „Falls $P(x)$ für alle x gilt, so gilt es für ein Individuum a “;
3. $\forall_x (A \Rightarrow P(x)) \Rightarrow (A \Rightarrow \forall_x P(x))$;
4. $\forall_x (P(x) \Rightarrow A) \Rightarrow (\exists_x P(x) \Rightarrow A)$;
5. $\neg \forall_x P(x) \equiv \exists_x \neg P(x)$;
6. $\neg \exists_x P(x) \equiv \forall_x \neg P(x)$.

Diese Regeln entsprechen unserer intuitiven Vorstellung von „für alle“ und „es gibt“. Dennoch handelt es sich um Axiome in dem Sinne, dass sie (jedenfalls aus den bisherigen Betrachtungen heraus) nicht beweisbar sind.

WARNUNGEN 1.13. 1. Man beachte, dass die Reihenfolge der Quantoren wesentlich ist:

$\forall_x \exists_y ((x \text{ ist Mann}) \Rightarrow (y \text{ ist Frau und } x \text{ und } y \text{ sind verheiratet}))$
 „Jeder Mann ist mit einer Frau verheiratet.“ (falsch)

$\exists_y \forall_x (\dots)$
 „Es gibt eine Frau, die mit jedem Mann verheiratet ist.“ (falsch)

Zwar sind beide Aussagen falsch, doch ist ihr Sinn sehr verschieden.

$$\forall_x \exists_y ((x \text{ ist Mensch}) \Rightarrow (y \text{ ist biologische Mutter von } x))$$

„Jeder Mensch hat eine biologische Mutter.“ (wahr)

$$\exists_y \forall_x (\dots)$$

„Es gibt eine Person, die biologische Mutter aller Menschen ist.“ (falsch)

Diese Beispiele mögen noch so offensichtlich erscheinen. Glauben Sie mir, aus Erfahrung kann ich Ihnen sagen, dass Fehler aus der Vertauschung von Quantoren bei der Diskussion mathematischer Sachverhalte leider (nicht selten) vorkommen.

2. Quantoren sind sprachliche Elemente der Logik, die gewissen syntaktischen Regeln gehorchen. Dazu gehört, dass die durch \forall und \exists gebundenen Variablen **hinter** den Quantoren zu stehen haben.

Es ist eine weit verbreitete Unsitte, Quantoren als reine Abkürzungen in den Text einzustreuen (schlimmstenfalls hinter einer Formel). Auch wenn dies sogar unter professionellen Mathematikern vorkommt, so wird diese Unsitte im Rahmen dieses Kurses als **Fehler** betrachtet werden! Beachten Sie, dass das systematische Negieren von Aussagen nur unter Beachtung der syntaktischen Regeln möglich ist.

Gelegentlich findet man noch den Ausdruck $\exists!$. Dieser kann wie folgt aufgelöst werden:

$$\exists!_x P(x) \equiv (\exists_x P(x)) \wedge \forall_{x,y} ((P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow x = y)$$

„Es gibt genau ein x , so dass $P(x)$ gilt.“

1.5. Was ist ein Beweis? Grob gesagt, ist ein Beweis eine Abfolge von Aussagen A_1, A_2, \dots, A_n , wobei die i -te Aussage A_i *unter Anwendung der logischen Schlussregeln* zweifelsfrei aus den vorangegangenen Aussagen hervorgeht. Dabei ist A_1 die Hypothese und A_n die Konklusion. Einzelne Beweisschritte lassen sich auf einige wenige Beweisschemata zurückführen. Im Folgenden werden diese im Einzelnen besprochen und sie sollten sie sich gut einprägen. Damit ist nicht gemeint, dass Sie die Beweisschemata „Auswendig pauken“ sollten. Vielmehr sollten Sie sie „verstehen“ und durch den täglichen Umgang sollte sich ein Auswendig Lernen erübrigen:

1.6. Beweisschemata.

1.6.1. Direkter Beweis.

„und“ in der Hypothese	„und“ in der Konklusion
A und B	A
A	B
B	Konklusion: A und B
\forall in der Hypothese	\forall in der Konklusion
$\forall_x A(x)$	Sei z beliebig
$A(t)$	\vdots
\vdots	$A(z)$
	Konklusion: $\forall_x A(x)$

Implikation in der Hypothese	Implikation in der Konklusion
$A \Rightarrow B$ \vdots A B	Angenommen A \vdots B Konklusion: $A \Rightarrow B$ (nicht etwa B !)
„oder“ in der Hypothese	„oder“ in der Konklusion
$A \vee B$ Beweis durch Fallunterscheidung: 1. Angenommen A \vdots C 1. Konklusion: $A \Rightarrow C$	\vdots A Konklusion: $A \vee B$
2. Angenommen B \vdots C 2. Konklusion: $B \Rightarrow C$	
Konklusion: C	
\exists in der Hypothese	\exists in der Konklusion
Angenommen $\exists_x A(x)$ $A(z)$ (z ist temporärer Name für ein Ding, das existiert) \vdots C (z darf in C nicht als freie Variable vorkommen) Konklusion: C	\vdots $A(t)$ \vdots Konklusion: $\exists_x A(x)$

1.6.2. Indirekter Beweis.

Widerspruchsbeweis 1. Variante (Kontrapositiv, Schlussregel 3 Seite 9)	Widerspruchsbeweis 2. Variante Schlussregel 4 Seite 9
Behauptung: B	Man möchte C beweisen
Angenommen $\neg B$ \vdots $\neg A$ Konklusion: $A \Rightarrow B$	Widerspruchsannahme: $\neg C$ \vdots \perp (Widerspruch, absurdum) Konklusion: C

1.6.3. *Äquivalenzbeweis.* Das folgende Beweisschema für einen Äquivalenzbeweis kann sowohl für einen direkten wie auch für einen indirekten Beweis verwandt werden:

Behauptung: $A \Leftrightarrow B$
1. Angenommen A
\vdots
B
1. Konklusion: $A \Rightarrow B$
2. Angenommen B
\vdots
A
2. Konklusion $B \Rightarrow A$
Konklusion: $A \Leftrightarrow B$

2. Mengen

Es scheint eine menschliche Eigenschaft zu sein, gewisse Dinge unseres Alltags zu größeren Einheiten zusammenzufassen („Die Bevölkerung der Bundesrepublik“, „Die Einwohner Bonns, die mit dem Fahrrad zur Arbeit fahren...“). Der grundlegende Begriff der Mathematik ist daher der der Menge. Dabei steht „Menge“ nur für die Zusammenfassung gewisser Objekte zu einer Einheit. Im Sprachgebrauch intendiert der Begriff „Menge“ mitunter auch eine gewisse Größe („Das ist aber eine Menge Arbeit“). Der mathematische Begriff der Menge sagt nichts über Größe aus.

Historisch hat sich der Mengenbegriff in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts herausgebildet. Wir nehmen hier den naiven Standpunkt ein und definieren nach G. CANTOR.

DEFINITION 2.1. (Naive Mengendefinition) Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohlunterscheidbarer Objekte der Anschauung oder des Denkens.

Es sei nicht verschwiegen, dass diese Definition nicht unproblematisch ist (vgl. Satz 2.2 unten). Daher wurde zu Beginn des letzten Jahrhunderts auch der Mengenbegriff auf eine axiomatische Grundlage gestellt. Diese sog. ZERMELO-FRAENKEL Theorie können wir im Rahmen dieses Kurses jedoch nur am Rande streifen. Dieser Problemkreis wird im SS 2002 in dem fakultativen Proseminar „Axiomatische Grundlagen der Mathematik“ vertieft werden. Für ein Objekt x und eine Menge A gilt stets

$$x \in A \text{ „}x \text{ ist in } A\text{“, „}x \text{ ist Element von } A\text{“,}$$

oder

$$x \notin A \equiv \neg(x \in A) \text{ „}x \text{ ist nicht in } A\text{“, „}x \text{ ist nicht Element von } A\text{“.}$$

2.1. Gleichheit, Teilmengen. Der Begriff der Gleichheit ist nicht weiter definierbar: $y = x$ bedeutet, dass x und y Bezeichnungen für ein und dasselbe Objekt sind. Es ist aber eine Besonderheit der Mengentheorie, dass zwei Mengen schon durch ihre Elemente bestimmt sind: das *Extensionalitätsaxiom* der Mengentheorie besagt, dass zwei Mengen A und B schon dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente enthalten, genauer

$$A = B \Leftrightarrow \forall_x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Man nennt B eine *Teilmenge* von A , Schreibweise: $B \subset A$, falls aus $x \in A$ bereits $x \in B$ folgt:

$$B \subset A :\Leftrightarrow \forall_x (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

Dabei bedeutet der Doppelpunkt vor „ \Leftrightarrow “, dass die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird, lies: „per definitionem äquivalent zu“. Ähnlich ist „ $:=$ “ zu lesen als „per definitionem gleich“.

Falls $B \subset A$ so ist nicht ausgeschlossen, dass $B = A$. Man nennt B eine *echte* Teilmenge von A , falls $B \subset A$ und $B \neq A$ und schreibt dafür $B \subsetneq A$.

Offenbar gilt

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Dies liefert zugleich eine häufig verwendete Beweisstrategie: um $A = B$ zu zeigen geht man in zwei Schritten vor. Zunächst zeigt man $x \in A \Rightarrow x \in B$. Im zweiten Schritt zeigt man $x \in B \Rightarrow x \in A$.

2.2. Quantoren über Mengen. Sei $A(x)$ eine Aussageform und X eine Menge. Häufig schreibt man

	zu lesen als
$\exists_{x \in X} A(x)$	Es gibt ein $x \in X$, so dass $A(x)$
$\forall_{x \in X} A(x)$	Für alle $x \in X$ gilt $A(x)$

Dies lässt sich auf die bisherige Verwendung der Quantoren wie folgt zurückführen:

$$\begin{aligned} \exists_{x \in X} A(x) &:\Leftrightarrow \exists_x ((x \in X) \wedge A(x)), \\ \forall_{x \in X} A(x) &:\Leftrightarrow \forall_x ((x \in X) \Rightarrow A(x)). \end{aligned}$$

Zum Beispiel kann man die Teilmengenbeziehung und die Mengengleichheit nun wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} B \subset A &\Leftrightarrow \forall_{b \in B} b \in A, \\ B = A &\Leftrightarrow (\forall_{x \in B} x \in A) \wedge (\forall_{x \in A} x \in B). \end{aligned}$$

Wie wir sehen, ist der neue Ausdruck für $B \subset A$ kürzer, während der neue Ausdruck für $B = A$ nicht unbedingt übersichtlicher ist.

2.3. Konstruktion von Mengen. Es gibt eine ganze Reihe von Operationen, die es erlauben, Mengen zu konstruieren.

2.3.1. *Aussonderung.* Ist $A(x)$ eine Aussageform und X eine Menge, so ist gibt es eine Menge Y mit der Eigenschaft

$$y \in Y \Leftrightarrow y \in X \wedge A(y).$$

Y besteht also aus all denjenigen $x \in X$ für die $A(x)$ zutrifft. Die folgende Schreibweise zur Definition von Y ist gebräuchlich:

$$Y = \{x \in X \mid A(x)\}.$$

Die Aussageform $A(x)$ sondert Y aus X aus.

Man beachte, dass die Aussonderung aus einer vorgegebenen Menge vorgenommen wird. I.a. ist eine Mengenbildung der Art

$$\begin{aligned} X &= \{x \mid A(x)\} \\ &= \{\text{alle Objekte } x, \text{ für die } A(x)\} \end{aligned}$$

unzulässig. Als Beispiel diene

SATZ 2.2 (RUSSEL's Antinomie).³

$$X = \{x \mid x \text{ Menge}\}$$

ist keine Menge. *M.a.W.* es gibt keine Menge aller Mengen.

BEWEIS. Angenommen X wäre eine Menge. Aufgrund des Aussonderungsprinzips wäre dann auch

$$R = \{x \in X \mid x \notin x\}$$

eine Menge (die Menge aller derjenigen Mengen, die sich nicht selbst enthalten).

1. Fall: $R \in R$. Aufgrund der Definition von R ist dann $R \notin R$. Widerspruch!

2. Fall: $R \notin R$. Dann folgt $R \in R$. Dies ist wiederum ein Widerspruch.

Die Annahme, dass X eine Menge ist führt in beiden Fällen zu einem Widerspruch. Damit ist die Annahme falsch und der Satz bewiesen. \square

Der naive Mengenbegriff führt also bei zu unbedarftem Umgang zu Widersprüchen. Bei korrekter Anwendung des Aussonderungsprinzips sind Widersprüche bisher nicht bekannt. Dies mag zunächst unbefriedigend erscheinen. In der Tat kann man zeigen, dass es keinen Beweis der Widerspruchsfreiheit der ZERMELO–FRAENKELSchen Mengentheorie geben kann (jedenfalls dann nicht, wenn man sich dabei der Sprache der Mengentheorie bedient). Dies ist weniger schlimm als es scheint: sollten in der Tat Widersprüche entdeckt werden, so würde aller Wahrscheinlichkeit nach damit nicht die Mathematik zusammenbrechen. Vielmehr würde man das ZERMELO–FRAENKELSche Axiomensystem korrigieren müssen. Es ist kaum zu erwarten, dass eine solche Korrektur auf die „Mathematik des Alltags“ wesentliche Auswirkungen hätte.

2.3.2. *Enumerative Mengenbildung.* Sind Objekte a, b gegeben, so bezeichnet $\{a, b\}$ die Menge, die genau diese Objekte enthält.

2.3.3. *Leere Menge.* Eine Konsequenz der Aussonderung ist die Existenz einer Menge ohne Elemente, der sogenannten *leeren Menge*: Sei X irgendeine Menge. Setze

$$\emptyset := \{x \in X \mid x \neq x\}.$$

Offenbar ist

$$\forall x \ x \notin \emptyset.$$

Da Mengen schon dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente besitzen, gibt es nur eine leere Menge. Wir sprechen also von \emptyset als der leeren Menge. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge!

2.3.4. *Vereinigung und Durchschnitt.* Für zwei Mengen A, B ist die Vereinigung $A \cup B$ erklärt durch

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Ist allgemeiner \mathcal{F} ein Mengensystem (eine Menge von Mengen) so setzt man

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = \{x \mid \exists_{F \in \mathcal{F}} x \in F\}.$$

³Bertrand Russel, 1872–1970, brit. Mathematiker und Philosoph, Nobelpreis für Literatur 1950. Nur wenige Mathematiker haben, allerdings in anderen Disziplinen, einen Nobelpreis erhalten. Für Mathematik gibt es keinen Nobelpreis, siehe dazu [2].

Man beachte, dass das Aussonderungsprinzip für die Definition der Vereinigung nicht greift. Es gehört zu den *Axiomen* der Mengentheorie, dass die Vereinigungsbildung eine zulässige Operation ist.

Der *Durchschnitt* zweier Mengen A, B ist definiert durch

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in A \cup B \mid x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x \in A \mid x \in B\} \\ &= \{x \in B \mid x \in A\}, \end{aligned}$$

bzw.

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \{x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \mid \forall F \in \mathcal{F} x \in F\}.$$

2.3.5. *Potenzmenge.* Ist X eine Menge, so bezeichnet $\mathfrak{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$ die Potenzmenge von X . $\mathfrak{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von X . Dass $\mathfrak{P}(X)$ tatsächlich eine Menge ist, gehört ebenfalls zu den *Axiomen* der Mengentheorie.

2.3.6. *Komplement.* Seien A, B Mengen. Die Differenz, $A \setminus B$, ist erklärt durch

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Sind alle betrachteten Mengen Teilmengen einer festen Grundmenge X , so schreibt man an Stelle von $X \setminus A$ auch $\complement A$ oder A^c und nennt A^c das *Komplement* von A (in X). Offenbar gilt $(A^c)^c = A$.

SATZ 2.3 (DE MORGANSche Regeln). *Sei $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X . Dann gilt*

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F\right)^c &= \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F^c, \\ \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F\right)^c &= \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c. \end{aligned}$$

BEWEIS. Sei $x \in (\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F)^c$. Dann ist

$$x \in X \wedge \neg \exists_{F \in \mathcal{F}} x \in F,$$

oder

$$x \in X \wedge \forall_{F \in \mathcal{F}} x \notin F,$$

also

$$x \in X \wedge \forall_{F \in \mathcal{F}} x \in F^c,$$

und somit $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F^c$. Da die Schlüsse umkehrbar sind, folgt die erste Formel.

Die zweite Formel folgt aus der ersten:

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F\right)^c &= \left(\bigcap_{F \in \mathcal{F}} (F^c)^c\right)^c \\ &= \left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c\right)^{cc} \\ &= \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^c. \end{aligned}$$

□

2.3.7. *Geordnete Paare und das kartesische Produkt.* Für Objekte a, b ist das *geordnete Paar* definiert durch

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

LEMMA 2.4. *Sind $(a, b), (c, d)$ geordnete Paare, so gilt*

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

BEWEIS. Offenbar ist nur „ \Rightarrow “ beweisbedürftig. Sei also

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}. \quad (2.1)$$

Dann ist

$$\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

1. Fall: $\{a\} = \{c\}$

Dann ist $a \in \{c\}$ und somit $a = c$.

2. Fall: $\{a\} = \{c, d\}$

Dann sind $c, d \in \{a\}$ und folglich $c = d = a$.

Damit ist $a = c$ bewiesen.

Weiterhin liefert (2.1) die Beziehung $\{a, b\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

1. Fall: $\{a, b\} = \{c\}$

Wie oben folgt $a = b = c$. Dann ist aber

$$\{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$$

und somit $\{c, d\} = \{c\} = \{a\}$, also auch $d = c = a = b$.

2. Fall: $\{a, b\} = \{c, d\}$

Dann ist $d \in \{a, b\}$, also $d = a$ oder $d = b$. Ist $d = b$ so sind wir fertig. Ist hingegen $d = a = c$, so folgt wie oben aus $\{a, b\} = \{c, d\} = \{c\}$ auch $b = c = d$.

□

Sind A, B Mengen, so definieren wir das *kartesische Produkt*, $A \times B$, als die Menge aller geordneten Paare von Elementen aus A und aus B :

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= \{x \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A \cup B)) \mid \exists_{a \in A} \exists_{b \in B} x = (a, b)\}. \end{aligned}$$

Dabei zeigt die zweite Zeile, dass es sich bei $A \times B$ tatsächlich um eine Menge handelt.

3. Relationen und Abbildungen

3.1. Relationen.

DEFINITION 3.1. Seien X, Y Mengen. Eine Teilmenge $R \subset X \times Y$ nennt man auch eine *Relation* von X nach Y . Ist $X = Y$ so spricht man von einer binären Relation auf X .

Für eine Relation R von X nach Y erklärt man den *Definitionsbereich* durch

$$\mathcal{D}(R) := \{x \in X \mid \exists_{y \in Y} (x, y) \in R\}. \quad (3.1)$$

Das *Bild* R ist analog definiert als

$$\mathcal{R}(R) := \{y \in Y \mid \exists_{x \in X} (x, y) \in R\}. \quad (3.2)$$

BEISPIELE 3.2. 1.

$$X = \{\text{Studenten der Universität zu Köln}\},$$

$$(x, y) \in R :\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ studieren dasselbe Fach.}$$

2. Auf der Menge der ganzen Zahlen, \mathbb{Z} , ist \leq eine binäre Relation.

DEFINITION 3.3. Eine binäre Relation \sim auf X heißt

- *reflexiv*, falls $x \sim x$ für alle $x \in X$,
- *symmetrisch*, falls aus $x \sim y$ auch $y \sim x$ folgt,
- *transitiv*, falls aus $x \sim y$ und $y \sim z$ auch $x \sim z$ folgt.

Eine binäre Relation \sim auf x heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

BEISPIELE 3.4. 1. Relation 1. aus Beispiel 3.2 ist reflexiv und symmetrisch, jedoch nicht transitiv.

Zum Beweis betrachten wir einen Studenten x mit den Fächern Mathematik und BWL, einen Studenten y mit den Fächern Mathematik und Physik sowie einen Studenten z mit den Fächern Physik und Chemie. Dann ist xRy , yRz jedoch nicht xRz .

2. Relation 2. aus Beispiel 3.2 ist reflexiv und transitiv, nicht jedoch symmetrisch.
3. $\emptyset \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist symmetrisch und transitiv, jedoch nicht reflexiv.
4. Sei $X = \{\text{Menschen}\}$ und setze

$$x \sim y :\Leftrightarrow x, y \text{ sind beide Raucher oder beide Nichtraucher.}$$

Dann ist \sim eine Äquivalenzrelation.

Wir betrachten nun eine Äquivalenzrelation \sim auf einer Menge X . Für $x \in X$ nennt man

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

die *Äquivalenzklasse* von x . Desweiteren ist

$$\begin{aligned} X/\sim &:= \{Y \in \mathfrak{P}(X) \mid \exists x \in X Y = [x]\} \\ &= \{[x] \in \mathfrak{P}(X) \mid x \in X\} \end{aligned}$$

die *Menge der Äquivalenzklassen* bzw. der *Quotient von X nach \sim* .

Ein System $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ nichtleerer Teilmengen (d.h. $\forall F \in \mathcal{F} F \neq \emptyset$) nennen wir eine *Partition von X* , falls gilt

- (i) $\bigcup \mathcal{F} = X$,
- (ii) die Elemente von \mathcal{F} sind paarweise disjunkt, d.h.

$$\forall F, G \in \mathcal{F} (F = G \vee F \cap G = \emptyset).$$

Zu einer solchen Partition \mathcal{F} erklären wir eine Relation $\sim_{\mathcal{F}}$ auf X wie folgt:

$$\begin{aligned} x \sim_{\mathcal{F}} y &:\Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{F} x, y \in F \\ &\Leftrightarrow x, y \text{ gehören zur selben Menge der Partition.} \end{aligned}$$

$\sim_{\mathcal{F}}$ ist eine Äquivalenzrelation. Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich. Zum Beweis der Transitivität betrachten wir $x, y, z \in X$ mit $x \sim_{\mathcal{F}} y$ und $y \sim_{\mathcal{F}} z$. Dann gibt es $F, G \in \mathcal{F}$ mit $x, y \in F$ und $y, z \in G$. Damit ist $y \in F \cap G$. Da die Elemente von \mathcal{F} paarweise disjunkt sind, folgt daraus schon $F = G$ und somit $x \sim_{\mathcal{F}} z$.

Der folgende Satz sagt uns, dass Äquivalenzrelationen und Partitionen im Grunde dasselbe sind.

SATZ 3.5. *Sei X eine nichtleere Menge.*

1. *Sei \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Dann ist $\mathcal{F} = X/\sim$ eine Partition von X und es gilt $\sim_{\mathcal{F}} = \sim$.*
2. *Sei \mathcal{F} eine Partition von X . Dann ist $\sim_{\mathcal{F}}$ eine Äquivalenzrelation und es gilt $X/\sim_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.*

BEWEIS. 1. Seien $x, y \in X$. Ist $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, so gibt es ein $z \in [x] \cap [y]$, also $x \sim z$ und $z \sim y$. Aus der Transitivität folgt $x \sim y$. Wieder aus der Transitivität folgt nun für jedes $a \in [x]$ auch $a \sim y$. Also ist $[x] \subset [y]$ und aus Symmetriegründen $[x] = [y]$. Damit ist gezeigt, dass die Äquivalenzklassen paarweise disjunkt sind. Jede Äquivalenzklasse $[x]$ enthält das Element x , sie ist also nicht leer. Jedes $x \in X$ gehört zur Äquivalenzklasse $[x]$. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{F} = X/\sim$ eine Partition von X ist. Weiterhin

$$\begin{aligned} x \sim_{\mathcal{F}} y &\Leftrightarrow \exists_{[z] \in X/\sim} : x, y \in [z] \\ &\Leftrightarrow \exists_{z \in X} : (x \sim z) \wedge (z \sim y) \\ &\Leftrightarrow x \sim y. \end{aligned}$$

2. Dass $\sim_{\mathcal{F}}$ eine Äquivalenzrelation ist, wurde bereits oben gezeigt. Sei $x \in X$ und $F \in \mathcal{F}$ die einzige Menge mit $x \in F$. Man sieht nun unmittelbar, dass $[x] = F$. \square

Äquivalenzrelationen werden uns noch sehr häufig begegnen!

3.2. Abbildungen.

DEFINITION 3.6. Eine Relation f von X nach Y nennt man eine *Abbildung*, falls es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ gibt.

Man betrachtet Abbildungen auch als *Zuordnungsvorschriften*. Jedem $x \in X$ ist genau ein $y \in Y$, nämlich dasjenige mit $(x, y) \in f$, zugeordnet. Wir schreiben daher Abbildungen als

$$f : X \rightarrow Y.$$

Anstelle von $(x, y) \in f$ schreibt man $y = f(x)$.

In der Literatur werden Abbildungen oft als Zuordnungsvorschriften definiert und es wird zwischen der Abbildung f und ihrem Graphen $\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ unterschieden. Bei dieser Definition stellt sich die Frage was unter einer Zuordnungsvorschrift zu verstehen ist. Historisch ist das lange diskutiert worden. Es gab Mathematiker, die unter einer Zuordnungsvorschrift eine konkrete Rechenvorschrift zur Berechnung von $f(x)$ aus x verstehen wollten. Dieses Verständnis hat sich als zu eng gefasst erwiesen.

Die heutige mengentheoretische Sichtweise des Abbildungsbegriffes hat sich durchgesetzt. Die oft angetroffene Unterscheidung zwischen der Abbildung und ihren Graphen ist dann jedoch künstlich und eigentlich obsolet.

BEISPIELE 3.7. 1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $k \mapsto k + 2$.

Falls die Zuordnungsvorschrift tatsächlich in Form einer Formel angegeben werden kann, so bedient man sich der vorstehenden Notation.

2. Sei X die Menge der Studenten der Uni Köln. Die Zuordnung

$$f : X \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \text{Matrikelnummer von } x$$

ist eine Abbildung.

3. Sei X wie in 2. und Y die Menge der Fakultäten der Uni Köln. Wir setzen

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto \text{Fakultät des Hauptfaches von } x.$$

Möglicherweise ist dies jedoch keine Abbildung, da es Studenten geben soll, die ein Doppelstudium durchführen.

4. Auf einer beliebigen Menge X ist die Identität, id_X , erklärt durch

$$\text{id}_X : X \longrightarrow X, x \mapsto x,$$

bzw.

$$\text{id}_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}.$$

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Für $A \subset X$ heißt

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists_{x \in A} f(x) = y\}$$

das *Bild* von A unter f . Diese Begriffsbildung steht natürlich in Beziehung zum in (3.1) bereits definierten Bild einer Relation. Für $A \subset X$ bezeichnen wir zunächst mit $g := f \upharpoonright A$ die *Einschränkung von f auf A* , d.h. $g : A \rightarrow Y, a \mapsto f(a)$ bzw. in mengentheoretischer Notation $g = f \cap A \times Y$. Dann ist $f(A) = g(A) = \mathcal{R}(g)$.

Desweiteren bezeichnet für $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

das *Urbild* von B unter f .

Sind $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen, so definiert man ihre *Komposition* durch

$$g \circ f : X \rightarrow Z, (g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad (3.3)$$

bzw.

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists_{y \in Y} ((x, y) \in f \wedge (y, z) \in g)\}. \quad (3.4)$$

Die Komposition kann analog auch für Relationen erklärt werden.

SATZ 3.8. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Dann gilt für $A, B \subset X$, $C, D \subset Y$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D),$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D),$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

WARNUNG 3.9. Im allgemeinen ist $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$. Als Gegenbeispiel betrachten wir $X = Y = \{1, 2\}$ und die Abbildung

$$f : X \rightarrow Y, x \mapsto 1 \text{ für } x = 1, 2.$$

Dann ist einerseits $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$, also $f(\{1\} \cap \{2\}) = \emptyset$. Andererseits ist $f(\{1\}) \cap f(\{2\}) = \{1\} \neq \emptyset$.

BEWEIS VON SATZ 3.8. Wir beweisen beispielhaft die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} x &\in f^{-1}(C \cap D) \\ \Leftrightarrow f(x) &\in C \cap D \\ \Leftrightarrow (f(x) \in C) \wedge (f(x) \in D) \\ \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(C)) \wedge (x \in f^{-1}(D)) \\ \Leftrightarrow x &\in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D). \end{aligned}$$

□

LEMMA 3.10. Für Abbildungen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ gilt das Assoziativgesetz

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

BEWEIS. Für $a \in A$ ist

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) \\ &= (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a). \end{aligned}$$

□

DEFINITION 3.11. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt

- *injektiv*, falls $\forall_{x,x' \in X} f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$,
- *surjektiv*, falls $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} f(x) = y$,
- *bijektiv*, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

BEISPIELE 3.12. Die Abbildung von Beispiel 3.7 2. ist sicher nicht surjektiv, da es mehr natürliche Zahlen als Studenten gibt. Da Studenten durch ihre Matrikelnummern eindeutig identifizierbar sein sollen, dürfte die Abbildung, ein fehlerfreies Arbeiten des Studentensekretariats vorausgesetzt, injektiv sein.

Die Abbildung von Beispiel 3.7 3. ist surjektiv und nicht injektiv. Wäre sie nicht surjektiv so gäbe es Fakultäten ohne Studenten, wäre sie injektiv, so hätte jede Fakultät höchstens einen Studenten.

Für eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ definiert man die *Umkehrabbildung* $f^{-1} : Y \rightarrow X$ wie folgt

$$f^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in f\}. \quad (3.5)$$

f^{-1} ist tatsächlich eine Abbildung: ist $y \in Y$ gegeben, so gibt es wegen der Surjektivität von f ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wegen der Injektivität von f ist x eindeutig bestimmt, also $f^{-1}(y) = x$. Es gilt offenbar

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_Y, \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X.$$

Man beachte, dass das Symbol f^{-1} in zwei Bedeutungen gebraucht wird. Die Umkehrabbildung ist nur für bijektive Abbildungen erklärt. Hingegen ist das Urbild von Mengen für jede Abbildung definiert. Die Unterscheidung ergibt sich aus dem Kontext!

SATZ 3.13. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

1. f ist genau dann injektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ so gibt, dass $g \circ f = \text{id}_X$.
2. f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ so gibt, dass $f \circ g = \text{id}_Y$.

BEWEIS. 1. Zunächst sei $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$. Ist nun $f(x) = f(x')$ für $x, x' \in X$, so folgt

$$\begin{aligned} x &= \text{id}_X(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ &= g(f(x')) = (g \circ f)(x') = \text{id}_X(x') = x', \end{aligned}$$

also ist f injektiv.

Umgekehrt sei f injektiv. Dann ist $f : X \rightarrow f(X) \subset Y$ eine bijektive Abbildung. Sei $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ die Umkehrabbildung. Wähle irgendein $x_0 \in X$ und setze

$$g : Y \longrightarrow X, \quad y \mapsto \begin{cases} x_0, & y \notin f(X), \\ f^{-1}(y), & y \in f(X), \end{cases}$$

bzw. in mengentheoretischer Schreibweise

$$g := \{(y, x) \in Y \times X \mid ((y \notin f(X)) \wedge x = x_0) \vee ((x, y) \in f)\}.$$

Dann ist offenbar $g \circ f = \text{id}_X$.

2. Zunächst sei $g : Y \rightarrow X$ mit $f \circ g = \text{id}_Y$. Ist nun $y \in Y$ so folgt $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$ und f ist surjektiv.

Zum Beweis der Umkehrung benötigt man das Auswahlaxiom (s. Axiom 3.16). Informell funktioniert der Beweis wie folgt: Zu $y \in Y$ wählen wir aufgrund der Surjektivität von f ein $g(y) \in X$ mit $f(g(y)) = y$. g ist die gesuchte Abbildung. \square

Der letzte Teil des Beweises hinterlässt ein ungutes Gefühl, da der Auswahlprozess nicht weiter spezifiziert wird. Bei unendlichen Mengen wird man unendlich oft auswählen müssen und praxisorientierte Menschen mögen so etwas für fragwürdig halten. Ob eine derartige Schlussweise zulässig ist, wurde zu Beginn des letzten Jahrhunderts in der Tat lange diskutiert. Es zeigte sich, dass man bei Ablehnung solcher Schlussweisen im Grunde ganze Gebiete der Mathematik negieren muss. Siehe auch die Diskussion im Anschluss an Axiom 3.16 bzw. im Abschnitt 3.4 unten.

Zum Schluss zeigen wir noch eine erste Anwendung des Begriffes der Äquivalenzrelation:

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Auf X erklären wir eine binäre Relation wie folgt:

$$x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Man überzeugt sich sofort, dass \sim_f eine Äquivalenzrelation ist. Wir erklären nun

$$\bar{f} : X / \sim_f \rightarrow Y$$

durch

$$\bar{f}([x]) := f(x).$$

\bar{f} ist wohldefiniert, denn sind x, x' mit $[x] = [x']$ so ist auch $f(x) = f(x')$. Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X / \sim_f & & \end{array}$$

Dabei ist $\pi(x) = [x]$ die kanonische Projektion. Wir zeigen noch, dass \bar{f} injektiv ist: ist $\bar{f}([x]) = \bar{f}([x'])$, so ist $f(x) = f(x')$, also $x \sim_f x'$ und somit $[x] = [x']$.

Wir haben also die Abbildung $f = \bar{f} \circ \pi$ zerlegt in das Produkt einer surjektiven und einer injektiven Abbildung.

3.3. Indizierte Familien, allgemeines kartesisches Produkt und das Auswahlaxiom. Ist man bei einer Abbildung $f : I \rightarrow X$ weniger an den Eigenschaften der Zuordnungsvorschrift als an den Werten $f(i)$ interessiert, so benutzt man häufig die Indexschreibweise, etwa

$$(x_i)_{i \in I}, \text{ wobei } x_i = f(i),$$

und nennt $(x_i)_{i \in I}$ eine *Familie* mit Indexmenge I .

Ist $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen (i.e. eine Abbildung $f : I \rightarrow \mathcal{F}, X_i := f(i)$), so wollen wir das allgemeine kartesische Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ erklären. Dazu betrachten wir

zunächst $I = \{1, 2\}$ und setzen

$$\begin{aligned} \phi : \{f : F \rightarrow X_1 \cup X_2 \mid f(1) \in X_1, f(2) \in X_2\} &\rightarrow X_1 \times X_2 \\ f &\mapsto (f(1), f(2)). \end{aligned}$$

ϕ ist offenbar eine Bijektion. M.a.W. das kartesische Produkt $X_1 \times X_2$ kann als eine gewisse Menge von Abbildungen von $\{1, 2\}$ nach $X_1 \cup X_2$ aufgefasst werden. Wir definieren daher

DEFINITION 3.14. Ist $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen, so heißt

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \mid \forall i \in I f(i) \in X_i \right\}$$

das *kartesische Produkt* der Familie X_i .

LEMMA 3.15. Seien X, Y Mengen. Genau dann ist $X \times Y = \emptyset$ wenn $X = \emptyset$ oder $Y = \emptyset$.

BEWEIS. Ist $X = \emptyset$ oder $Y = \emptyset$ so ist offenbar $X \times Y = \emptyset$. Ist $X \neq \emptyset$ und $Y \neq \emptyset$ so gibt es ein $x \in X$ und ein $y \in Y$ und es folgt $(x, y) \in X \times Y$, also $X \times Y \neq \emptyset$. \square

Erstaunlicherweise ist die analoge Aussage für ein beliebiges kartesisches Produkt auf der Basis der bisher formulierten Axiome nicht beweisbar.

AXIOM 3.16 (Auswahlaxiom). Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen. Dann gibt es eine Abbildung (Auswahlfunktion!)

$$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

mit $f(i) \in X_i$ für alle $i \in I$. M.a.W.

$$\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset.$$

Die Auswahlfunktion f wählt also simultan aus jedem X_i ein Element $f(i)$ aus. Das Auswahlaxiom garantiert die Existenz genügend vieler Abbildungen. Es entspricht unserer Intuition. Man beachte jedoch seinen nicht konstruktiven Charakter.

Wir diskutieren kurz wie man das Auswahlaxiom im letzten Teil des Beweises von Satz 3.13 benutzt: Sei also $f : X \rightarrow Y$ surjektiv. Wir betrachten die Familie von Mengen

$$(f^{-1}(\{y\}))_{y \in Y}.$$

Da f surjektiv ist, ist $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ für alle $y \in Y$. Aufgrund des Auswahlaxioms gibt es also eine Abbildung

$$g : Y \rightarrow \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(\{y\}) = X$$

mit $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in Y$. Dies bedeutet aber nichts anderes als

$$\forall_{y \in Y} f(g(y)) = y.$$

3.4. Die Axiome der Mengentheorie. Wir haben im bisherigen Verlauf des Abschnitts 3 fast alle Axiome der sog. ZERMELO-FRAENKELschen Mengentheorie in informeller Weise kennengelernt. Ich möchte diese Axiome hier, zumindest soweit dies möglich ist, nochmals zusammenstellen.

AXIOM 0 (Existenz). *Es gibt eine Menge:*

$$\exists_x (x = x).$$

AXIOM 1 (Extensionalität). *Zwei Mengen X, Y sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen:*

$$\forall_{X, Y} (\forall_z (z \in X \Leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y).$$

AXIOM 2 (Aussonderung). *Ist X eine Menge und $A(x)$ eine Aussageform, so ist auch $\{x \in X \mid A(x)\}$ eine Menge:*

$$\forall_X \exists Y \forall_x x \in Y \Leftrightarrow (x \in X) \wedge A(x).$$

AXIOM 3 (Paaraxiom). *Für a, b ist $\{a, b\}$ eine Menge:*

$$\forall_{a, b} \exists_M \forall_x x \in M \Leftrightarrow x = a \vee x = b.$$

AXIOM 4 (Vereinigung). *Für jedes Mengensystem \mathcal{F} existiert die Vereinigungsmenge $\cup \mathcal{F}$:*

$$\forall_{\mathcal{F}} \exists_M \forall_x x \in M \Leftrightarrow \exists_{F \in \mathcal{F}} x \in F.$$

AXIOM 5 (Potenzmenge). *Für jede Menge X existiert die Menge aller Teilmengen $\mathfrak{P}(X)$:*

$$\forall_X \exists_P \forall_z z \in P \Leftrightarrow z \subset X.$$

AXIOM 6 (Unendlichkeitsaxiom). *Dieses kann hier nur informell mitgeteilt werden. Es besagt, dass es eine unendliche Menge, etwa die natürlichen Zahlen gibt.*

AXIOM 7 (Ersetzungsaxiom). *Dieses Axiom kann an dieser Stelle nicht erklärt werden. Interessierte Studenten verweise ich auf mein Proseminar im kommenden Sommersemester oder auf [3, 1]. Zur Beruhigung sei aber gesagt, dass das Ersetzungsaxiom für diesen Kurs ohne Bedeutung ist.*

AXIOM 8 (Regularität, schwache Form). *Es gibt keine Menge, die sich selbst als Element enthält:*

$$\forall_X X \notin X.$$

AXIOM 9 (Auswahlaxiom). Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen. Dann gibt es eine Abbildung

$$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

mit $f(i) \in X_i$ für alle $i \in I$.

Die Axiome 0-8 nennt man die ZERMELO-FRAENKELschen Axiome der Mengentheorie (ZF). Unter ZFC versteht man ZF + Axiom 9 (C steht für „choice“). Man kann die gesamte Mathematik im Grunde aus ZFC ableiten. Wie auf Seite 15 bereits ausgeführt wurde, ist es nicht bekannt ob ZFC widerspruchsfrei ist; wir alle hoffen dies natürlich. Das Auswahlaxiom war lange Zeit Gegenstand kontroverser Diskussionen. Man weiß heute jedoch folgendes:

Ist ZF widerspruchsfrei, so auch ZF+C.

Ist ZF widerspruchsfrei, so auch ZF+ \neg C.

D.h. falls das Axiomensystem 0-8 widerspruchsfrei ist, so führt weder die Akzeptanz des Auswahlaxioms noch seine Ablehnung zu Widersprüchen.

Damit wird die Akzeptanz des Auswahlaxioms zu einer Frage des Geschmacks. Unter rein pragmatischen Gesichtspunkten kann man auf das Auswahlaxiom jedoch nicht verzichten und so werden wir es im Folgenden akzeptieren. Gelegentlich werde ich jedoch darauf hinweisen, wenn das Auswahlaxiom verwendet wird.

Das Auswahlaxiom hat eine ganze Reihe äquivalenter Formulierungen auf die wir hier nicht weiter eingehen. Wir möchten jedoch eine erstaunliche Anwendung des Auswahlaxioms zumindest erwähnen. Dazu zunächst einige Bezeichnungen:

Sei X eine Menge und $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X . $F \in \mathcal{F}$ heißt *maximal*, falls aus $G \in \mathcal{F}$ und $F \subset G$ bereits $F = G$ folgt. Eine Teilmenge $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ heißt eine *Kette*, falls für $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ stets $K_1 \subset K_2$ oder $K_2 \subset K_1$ gilt.

THEOREM 3.17 (spezielle Form des ZORNschen Lemmas). Sei X eine Menge und $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X . Gilt für jede Kette $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ auch

$$\left(\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K \right) \in \mathcal{F}$$

so besitzt \mathcal{F} ein maximales Element.

Während das Auswahlaxiom recht intuitiv ist, ist Theorem 3.17 eine starke Existenzaussage, die Sie im Laufe Ihres Studiums noch oft benötigen werden. Umso erstaunlicher ist es, dass auf der Grundlage der Axiome 0-8 Theorem 3.17 und das Auswahlaxiom *äquivalent* sind.

Der Beweis von Theorem 3.17 kann nicht konstruktiv sein. Man starte etwa mit $F_1 \in \mathcal{F}$. Ist F_1 maximal, so sind wir fertig, sonst gibt es $F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \subsetneq F_2$. Man fahre so fort und erhält eine Kette $(F_n)_{n=1,2,\dots}$. Nun bilde man

$$\tilde{F}_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Aufgrund der Voraussetzung über Ketten in Theorem 3.17 ist $\tilde{F}_1 \in \mathcal{F}$. Ist \tilde{F}_1 maximal so sind wir fertig, sonst gibt es $\tilde{F}_2 \dots$. Es ist nicht klar, wie dieser Prozess zum Erfolg führen soll!

Ich verweise nochmals auf das im SS 2002 geplante Proseminar, wo diese grundlagentheoretischen Fragen vertieft werden. Insbesondere werden Sie dort einen Beweis von Theorem 3.17 kennenlernen.

KAPITEL II

Natürliche, ganze und rationale Zahlen

In diesem Kapitel werden wir die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen einführen. Wir gehen dabei von den PEANO–Axiomen für die natürlichen Zahlen aus. Die Konstruktion der ganzen und rationalen Zahlen werden wir nur streifen, da diese in der Vorlesung Lineare Algebra von Herrn FAIGLE behandelt worden ist.

1. Die Peano–Axiome der natürlichen Zahlen, vollständige Induktion

Die natürlichen Zahlen entspringen dem Zählen, eine Fähigkeit, die in (fast) allen Kulturen existiert. Es soll jedoch einen Stamm südamerikanischer Ureinwohner geben, in dessen Sprache nur die Zahlen 1,2,3 existieren; größere Zahlen werden durch einen Blick völliger Bestürzung ausgedrückt. Von L. KRONECKER stammt der Ausspruch „die natürlichen Zahlen hat Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk“.

G. PEANO hat zuerst Axiome formuliert, die die natürlichen Zahlen vollständig beschreiben. Man kann aber auch, ausgehend von der ZFC-Mengentheorie, ein *Modell* der natürlichen Zahlen konstruieren. Dann werden die PEANO–Axiome zu beweisbaren Sätzen. Diese Konstruktion können wir hier aus Zeitgründen nicht durchführen. Interessierte Studenten verweise ich auf die Bücher [4, 1] bzw. auf mein Proseminar im SS 2001. Die PEANO–Axiome der natürlichen Zahlen lauten:

AXIOM 1.1 (PEANO–Axiome für \mathbb{N}). *Es gibt eine Menge \mathbb{N} , genannt Menge der natürlichen Zahlen, mit den folgenden Eigenschaften:*

- (N0) *Es gibt ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbb{N}$.*
- (N1) *Auf \mathbb{N} ist eine injektive Abbildung $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ erklärt.*
- (N2) (Induktionsprinzip) *Enthält eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ die 0 und ist mit jedem $n \in A$ auch $S(n) \in A$, so gilt schon $A = \mathbb{N}$:*

$$\forall A \in \mathfrak{P}(\mathbb{N}) (0 \in A \wedge \forall n \in A S(n) \in A) \Rightarrow A = \mathbb{N}.$$

Man beachte, dass (N1) auch beinhaltet, dass $0 \notin S(\mathbb{N})$. Diese Aussage wird oft als separates Axiom formuliert.

Man schreibt nun wie gewohnt

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

anstelle von

$$0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \dots$$

Das Induktionsprinzip liefert ein Beweisverfahren, welches oft wie folgt formuliert wird:

SATZ 1.2 (Beweisprinzip der vollständigen Induktion). *Sei $A(n)$ eine Aussageform. Es gelte*

- $A(0)$ ist wahr,
- $\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

BEWEIS. Man setzt $A := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$. Dann liefert (N2) sofort $A = \mathbb{N}$. \square

Das Induktionsprinzip liefert nun, dass die Abbildung S nur den Wert 0 ausläßt:

LEMMA 1.3. *Es gilt $\mathcal{R}(S) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

BEWEIS. Wir betrachten die Menge $A := \{0\} \cup \mathcal{R}(S)$. Offenbar ist $0 \in A$ und falls $n \in A$, so auch $S(n)$. Nach dem Induktionsprinzip ist $A = \mathbb{N}$ und die Behauptung ist bewiesen. \square

Mit Hilfe der PEANO-Axiome gelingt es rekursiv (vgl. Abschnitt 2 unten) eine Addition und eine Multiplikation festzulegen. Dies wollen wir hier nicht im Einzelnen ausführen. Wir halten nur fest.

THEOREM 1.4. 1. *Es gibt genau eine Abbildung $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$x + 0 = x, \quad x + (y + 1) = S(x + y).$$

Weiterhin gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$:

(M1) $(x + y) + z = x + (y + z)$; (Assoziativgesetz)

(M2) 0 ist neutrales Element der Addition, d.h. $x + 0 = 0 + x = x$ für jedes $x \in \mathbb{N}$;

(M3) $x + y = y + x$. (Kommutativgesetz)

2. *Es gibt genau eine Abbildung \cdot : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$x \cdot 0 = 0, \quad x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x.$$

Weiterhin gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$:

(R1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$; (Assoziativgesetz der Multiplikation)

(R2) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$; (Distributivgesetz)

(R3) $x \cdot y = y \cdot x$; (Kommutativgesetz der Multiplikation)

(R4) 1 ist neutrales Element der Multiplikation, d.h. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

(M1-3) besagen, dass die natürlichen Zahlen mit der Addition ein kommutatives Monoid bilden. (R1-4) sind im wesentlichen die Axiome der Multiplikation einer Ringstruktur. Gäbe es zu jedem $x \in \mathbb{N}$ ein inverses Element $y \in \mathbb{N}$ mit $x + y = 0$, so würde \mathbb{N} mit der Addition eine abelsche Gruppe bilden. Zusammen mit der Multiplikation hätten wir dann einen kommutativen Ring.

SATZ 1.5. 1. *In \mathbb{N} gilt die Kürzungsregel, d.h.*

$$\forall_{x,y,z \in \mathbb{N}} : x + z = y + z \Rightarrow x = y.$$

2. *Seien $x, y \in \mathbb{N}, x \neq y$. Entweder es gibt genau ein $z \in \mathbb{N}$, so dass $x = y + z$ oder es gibt genau ein $z \in \mathbb{N}$, so dass $y = x + z$. Das so eindeutig bestimmte z nennen wir $x - y$ bzw. $y - x$.*

BEWEIS. 1. Wir führen den Beweis durch Induktion nach z . Im Falle $z = 0$ ist nichts zu beweisen. Die Behauptung gelte für z . Ist nun $x + z + 1 = y + z + 1$ so folgt aus der Injektivität von S schon $x + z = y + z$ und aus der Induktionsannahme $x = y$.

2. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus 1. Der Beweis der Existenz erfolgt durch Induktion nach x . Die Behauptung gilt für $x = 0$, da $y = 0 + y$. Wir nehmen nun an, die Behauptung gelte für x und betrachten das Paar $x + 1, y$.

1. Fall: $y = x + z$.

Falls $z = 0$ so ist $(x + 1) = y + 1$ und die Behauptung gilt auch für $x + 1$. Ist $z \neq 0$ so gibt es wegen Lemma 1.3 ein $z' \in \mathbb{N}$ mit $z = z' + 1$, also $y = x + z' + 1 = (x + 1) + z'$.

2. Fall: $x = y + z$.

Dann ist $(x + 1) = y + (z + 1)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $x - y$ und $y - x$ nicht beide gleichzeitig existieren können: es sei also $x = y + z$ und $y = x + z'$. Dann ist $x + y = x + y + (z + z')$ und mit der Kürzungsregel $z + z' = 0$. Wäre $z \neq 0$ so gäbe es wegen Lemma 1.3 ein $m \in \mathbb{N}$ mit $z = m + 1$, also hätten wir $0 = (z' + m) + 1$ im Widerspruch zu (N1). Analog führt die Annahme $z' \neq 0$ zu einem Widerspruch. Also ist $z = z' = 0$ und folglich $x = y$ im Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq y$. \square

Der vorstehende Satz liefert den Schlüssel zur Einführung einer *Ordnungsrelation* auf \mathbb{N} :

DEFINITION 1.6. Für $x, y \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists_{z \in \mathbb{N}} : y = x + z.$$

Ist $x \leq y$ und $x \neq y$ so schreiben wir dafür $x < y$.

SATZ 1.7. 1. Die binäre Relation \leq ist eine Ordnung auf \mathbb{N} , d.h.

(O1) Für $x, y \in \mathbb{N}$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.

(O2) Ist $x \leq y$ und $y \leq x$ so ist $x = y$.

(O3) \leq ist reflexiv, d.h. $\forall_{x \in \mathbb{N}} : x \leq x$.

(O4) \leq ist transitiv, d.h. $\forall_{x, y, z \in \mathbb{N}} : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

2. $x \leq y$ genau dann, wenn $x + z \leq y + z$.

3. Ist $x \leq y$ so auch $x \cdot z \leq y \cdot z$.

BEWEIS. 1. (O1) und (O2) folgen aus Satz 1.5 und (O3) folgt unmittelbar aus der Definition. Zum Beweis von (O4) betrachten wir $x \leq y, y \leq z$. Dann ist $y = x + m$ und $z = y + n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Folglich ist $z = y + n = x + (m + n)$, also $x \leq z$.

2. und 3. sind einfach und werden als Übung überlassen. \square

LEMMA 1.8. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

1. $n \geq 0$.

2. $\neg(n < m < n + 1)$.

BEWEIS. 1. ist wegen $n = 0 + n$ trivial.

2. Ist $m > n$ so gibt es ein $z \in \mathbb{N}$ mit $m = n + z$. $z \neq 0$ denn sonst wäre $m = n$. Also ist wegen Lemma 1.3 $z = z' + 1$ mit $z' \in \mathbb{N}$. Somit erhalten wir $m = n + z' + 1 = (n + 1) + z'$ und folglich $m \geq n + 1$. \square

Das Induktionsprinzip wird oft in folgender Variante verwendet:

SATZ 1.9 (Induktion 2. Art). Sei $A(n)$ eine Aussageform. Es gelte für ein $n_0 \in \mathbb{N}$:

– $A(n_0)$ ist wahr,

- Falls die Aussage $A(k)$ für jede natürliche Zahl k mit $n_0 \leq k < n$ richtig ist, so gilt sie schon für n .

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Dieser Satz beinhaltet zwei Verschärfungen des Satzes 1.2. Einerseits kann der Induktionsanfang auch bei n_0 starten, wenn die Aussage erst ab n_0 bewiesen werden soll. Andererseits dürfen wir im Induktionsschritt annehmen, dass die Aussage bereits für alle $n_0 \leq k < n$ bewiesen ist.

BEWEIS. Wir betrachten die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} \mid (n < n_0) \vee \forall_{k \in \mathbb{N}, n_0 \leq k \leq n} : A(k)\}.$$

Sicherlich ist $0 \in B$. Sei nun $n \in B$.

1. Fall: $n < n_0$.

Wegen Lemma 1.8 ist $n + 1 \leq n_0$, also in jedem Falle $n + 1 \in B$.

2. Fall: $n \geq n_0$.

Dann gilt $A(k)$ für $n_0 \leq k \leq n$, also auch $A(n + 1)$ und somit $n + 1 \in B$.

Nach dem Induktionsprinzip ist nun $B = \mathbb{N}$, also gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$. □

Wir geben eine Anwendung der Induktion zweiter Art.

SATZ 1.10. Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element, d.h.

$$\exists_{a \in A} \forall_{b \in A} b \geq a.$$

BEWEIS. Sei $A \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge ohne kleinstes Element. Wir müssen zeigen, dass $A = \emptyset$. Dazu betrachten wir $B = \mathbb{N} \setminus A$. Sicherlich ist $0 \in B$, denn wäre $0 \in A$, so wäre 0 das kleinste Element von A . Wir nehmen nun an, dass $1, \dots, n - 1 \in B$.¹ Wäre $n \in A$, so wäre damit n das kleinste Element von A . Also muß auch n in B sein.

Nach dem Induktionsprinzip ist $B = \mathbb{N}$ und folglich $A = \emptyset$. □

2. Ganze und rationale Zahlen

Ich möchte kurz andeuten, wie man die ganzen und rationalen Zahlen konstruiert. Die Ausführung der Details ist langwierig und vielleicht auch etwas langweilig.

Wir hatten im Abschnitt 1 bemerkt, dass die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit der Addition und Multiplikation bis auf eine Ausnahme alle Axiome eines kommutativen Ringes mit 1 erfüllen. Die einzige Ausnahme ist, dass ein $n \in \mathbb{N}$ im allgemeinen kein additiv Inverses besitzt. Anders ausgedrückt, in \mathbb{N} ist die Gleichung

$$n + x = m \tag{2.1}$$

nicht unbeschränkt lösbar. (2.1) ist genau dann lösbar, wenn $n \leq m$. Dann ist $x = m - n \in \mathbb{N}$. Man behebt diesen Mangel durch eine algebraische Standardkonstruktion, die zu jedem Monoid eine entsprechende Gruppe erzeugt. Die Konstruktion wurde Ihnen in der LA-Vorlesung von Herrn FAIGLE mitgeteilt. Wir halten nur fest.

SATZ 2.1. 1. Die ganzen Zahlen \mathbb{Z} bilden mit der Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring mit 1. D.h. zusätzlich zu (M1-M3), (R1-R4) aus Theorem 1.4 gilt:

(M4) Zu jedem $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein inverses Element $-x \in \mathbb{Z}$ so, dass $x + (-x) = 0$.

¹ $1, \dots, n - 1 \in B$ ist eine abkürzende Schreibweise für $\forall_{k \in \mathbb{N}} : 1 \leq k \leq n - 1 \Rightarrow k \in B$.

2. \mathbb{Z} enthält die natürlichen Zahlen mit ihrer Addition und Multiplikation.
3. Für jedes $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist entweder $x \in \mathbb{N}$ oder $-x \in \mathbb{N}$, d.h. \mathbb{Z} ist die disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-x \mid x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Die Ordnung läßt sich auf \mathbb{Z} wie folgt ausdehnen: für $x, y \in \mathbb{Z}$ setzt man

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{N}.$$

Dann bleiben Satz 1.7, 1. und 2. gültig. Satz 1.7, 3. ist leicht zu modifizieren: seien $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \leq y$. Dann ist $0 \leq y - x$. Ist nun $z \in \mathbb{N}$, so liefert Satz 1.7, 3.

$$0 \leq (y - x) \cdot z = yz - xz,$$

also

$$xz \leq yz.$$

Satz 1.7, 3. ist daher zu ersetzen durch

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \forall z \in \mathbb{N} : x \leq y \implies xz \leq yz. \quad (2.2)$$

Der Ring der ganzen Zahlen hat den Mangel, dass die lineare Gleichung

$$ax = b$$

für $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Z}$ nicht allgemein lösbar ist. Insbesondere hat nicht jedes $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses.

Dieser Mangel wird durch die Konstruktion der rationalen Zahlen, \mathbb{Q} , behoben. Diese Konstruktion wurde ebenfalls von Herrn FAIGLE in der LA-Vorlesung behandelt. Wir halten nur fest:

- SATZ 2.2.
1. Die rationalen Zahlen, \mathbb{Q} , bilden mit der Addition und Multiplikation einen Körper.
 2. \mathbb{Z} ist ein Unterring von \mathbb{Q} .
 3. Jedes $x \in \mathbb{Q}$ besitzt eine Darstellung $x = m/n$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Die Ordnung auf \mathbb{Z} läßt sich auf \mathbb{Q} wie folgt fortsetzen:

$$\forall p, p' \in \mathbb{Z} \forall q, q' \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'} \iff pq' \leq p'q.$$

Man überzeugt sich, dass dies in der Tat wohldefiniert ist und Satz 1.7 mit der Modifikation (2.2) entsprechend gilt.

Von nun an betrachten wir $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ mit ihrer Addition, Multiplikation und Ordnung als bekannt!

3. Rekursion, Definition durch Induktion

Oft werden Konstruktionen induktiv durchgeführt, d.h. der $n + 1$ -te Schritt setzt voraus, dass die ersten n Schritte bereits durchgeführt sind. Abstrakt besteht eine rekursive Definition aus

- einer Anweisung für den 0-ten Schritt.
- einer Anweisung unter der Annahme, die ersten n -Schritte seien bereits ausgeführt.

Ein Beispiel hierfür sind rekursive Definitionen von Folgen.

BEISPIEL 3.1. Sei $a_0 = 7$ und

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n/2, & a_n \text{ gerade,} \\ 3a_n + 1, & a_n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann erhält man die Folge 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1... etc.

Die COLLATZ-Vermutung besagt, dass diese Rekursion für *jeden* Startwert in der Schleife 4, 2, 1, 4, 2, 1,... endet. Diese Vermutung ist bis heute unbewiesen!

Hinter der Definition durch Rekursion steckt das folgende mathematische Prinzip, welches man auch den DEDEKINDSchen Rekursionssatz nennt:

SATZ 3.2. Sei X eine Menge und $\phi : \bigcup_{n=1}^{\infty} X^n \rightarrow X$ eine Abbildung. Dann gibt es zu $a \in X$ genau eine Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ mit

- (1) $f(0) = a$,
- (2) $f(n+1) = \phi(f(0), \dots, f(n))$.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst die

ZWISCHENBEHAUPTUNG. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Abbildung $f_n : \{0, \dots, n\} \rightarrow X$ mit

- (i) $f_n(0) = a$,
- (ii) $f_n(k+1) = \phi(f_n(0), \dots, f_n(k))$ für $k \leq n-1$.

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n . Für $n = 0$ ist die Behauptung klar: es ist $f_0 : \{0\} \rightarrow X$, $f_0(0) = a$.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$: Ist $f : \{0, \dots, n+1\} \rightarrow X$ eine Abbildung mit (i), (ii) so erfüllt $f \upharpoonright \{0, \dots, n\}$ ebenfalls (i) und (ii). Nach Induktionsannahme ist dann $f \upharpoonright \{0, \dots, n\} = f_n$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f(n+1) &= \phi(f(0), \dots, f(n)) \\ &= \phi(f_n(0), \dots, f_n(n)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dies beweist die Eindeutigkeit. Offenbar erfüllt nun

$$f_{n+1}(k) := \begin{cases} f_n(k), & k \leq n, \\ \phi(f_n(0), \dots, f_n(n)), & k = n+1, \end{cases} \tag{3.2}$$

die Bedingungen (i) und (ii) womit auch die Existenz bewiesen ist. Damit ist die Zwischenbehauptung bewiesen.

Die Eindeutigkeitsbehauptung des Satzes ergibt sich nun wie folgt: sei $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ mit (1) und (2). Dann erfüllt $f \upharpoonright \{0, \dots, n\}$ die Bedingungen (i) und (ii) der Zwischenbehauptung. Folglich ist $f \upharpoonright \{0, \dots, n\} = f_n$. Da n beliebig war, liefert dies die Eindeutigkeit.

Zum Beweis der Existenz setzen wir nun

$$f(n) := f_n(n). \tag{3.3}$$

Dann ist $f(0) = f_0(0) = a$ und

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f_{n+1}(n+1) \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \phi(f_n(0), \dots, f_n(n)) \\ &= \phi(f_0(0), f_1(1), \dots, f_n(n)) \\ &= \phi(f(0), \dots, f(n)). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dabei haben wir in der vorletzten Zeile benutzt, dass für $m < n$ wegen der Eindeutigkeit der f_n gilt $f_n \upharpoonright \{0, \dots, m\} = f_m$. \square

BEISPIELE 3.3. 1. Im obigen Beispiel 3.1 ist die Abbildung ϕ des Rekursionsatzes gegeben durch

$$\phi : \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}, \quad \phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_n/2, & \text{falls } x_n \text{ gerade,} \\ 3x_n + 1, & \text{falls } x_n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

2. Die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist rekursiv wie folgt definiert

$$F_0 := 0, \quad F_1 := 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

In diesem Falle ist die Abbildung ϕ des Rekursionsatzes gegeben durch

$$\phi : \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}, \quad \phi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ x_n + x_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

3. Wie in Theorem 1.4 schon angedeutet, sind Addition und Multiplikation auf \mathbb{N} rekursiv definiert durch

$$x + 0 = x, \quad x + (y + 1) = S(x + y).$$

In diesem Fall haben wir

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = S(x_n).$$

4. Sei K ein Ring oder Körper. Dann definieren wir für Elemente a_1, a_2, \dots in K die Summen- und Produktsymbole durch

$$\sum_{k=1}^0 a_k := 0, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + a_{n+1} (= a_1 + \dots + a_{n+1}),$$

bzw.

$$\prod_{k=1}^0 a_k := 1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot a_{n+1} (= a_1 \cdot \dots \cdot a_{n+1}).$$

5. Die Fakultät ist (rekursiv) definiert durch

$$0! := 1, \quad (n+1)! := (n+1) \cdot n! = \prod_{k=1}^{n+1} k.$$

6. Sei K ein Ring oder Körper und $x \in K$. Dann setzt man

$$0 \cdot x := 0, \quad (n+1) \cdot x := (n \cdot x) + x,$$

bzw.

$$x^0 := 1, \quad x^{n+1} := (x^n) \cdot x.$$

Diese Definitionen können auch nicht-rekursiv erfolgen. Dazu betrachten wir die Folge $x_n := x, n \in \mathbb{N}$, und setzen

$$n \cdot x := \sum_{k=1}^n x_k; \quad x^n := \prod_{k=1}^n x_k.$$

Für $n < 0, x \in K$ setzt man noch

$$n \cdot x := -(-n) \cdot x$$

bzw. falls $x \neq 0$

$$x^n := (x^{-n})^{-1}.$$

Man überprüft nun unmittelbar, dass für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} n \cdot x + m \cdot x &= (n + m) \cdot x, \\ x^n \cdot x^m &= x^{n+m}, \\ (x^n)^m &= x^{n \cdot m}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Beachten Sie, dass nicht notwendigerweise $\mathbb{N} \subset K$ sein muß. Insofern handelt es sich bei dem „Produkt“ $n \cdot x$ nicht um die Körpermultiplikation. Daher ist die Nullteilerfreiheit eines Körpers hier nicht anwendbar. In dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit 2 Elementen gilt etwa $2 \cdot 1 = 0$! Allgemein nennt man K einen Körper der *Charakteristik* 0, falls $n \cdot 1 \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Andernfalls nennt man K einen Körper der Charakteristik $p \neq 0$ falls $p \cdot 1 = 0$ und p die kleinste natürliche Zahl $= 0$ mit dieser Eigenschaft ist.

\mathbb{F}_2 ist ein Körper der Charakteristik 2, \mathbb{Q} hat die Charakteristik 0. Man kann zeigen, dass die Charakteristik stets eine Primzahl ist.

KAPITEL III

Die reellen Zahlen

Die Tatsache, dass bereits einfachste Gleichungen in \mathbb{N} oder \mathbb{Z} keine Lösung besitzen, führte uns auf die Konstruktion des Körpers \mathbb{Q} der rationalen Zahlen. Da es sich um einen Körper handelt, sind nun lineare Gleichungen der Form

$$ax + b = 0$$

für $b \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q}^*$ stets lösbar. Anders verhält es sich jedoch bekanntermaßen mit algebraischen Gleichungen höherer Ordnung. Schon die einfache quadratische Gleichung

$$x^2 = 2$$

besitzt in \mathbb{Q} keine Lösung. Zum Beweis nehmen wir an, wir hätten eine rationale Zahl $p/q, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ mit $(p/q)^2 = 2$. Wir dürfen annehmen, dass der Bruch p/q gekürzt ist; insbesondere sind dann p, q nicht beide zugleich durch 2 teilbar. Multiplikation der Gleichung $(p/q)^2 = 2$ mit q^2 liefert

$$p^2 = 2q^2.$$

Dies bedeutet, dass p gerade sein muß; denn das Quadrat einer ungeraden Zahl ist stets ungerade. Wir können also $p = 2p'$ mit $p' \in \mathbb{Z}$ schreiben. Einsetzen liefert nun

$$4p'^2 = 2q^2, \text{ oder } q^2 = 2p'^2.$$

Dies bedeutet, dass auch q gerade ist. Dies widerspricht jedoch der Annahme, dass der Bruch p/q gekürzt ist.

Dass in \mathbb{Q} das Wurzelziehen nicht unbeschränkt durchführbar ist, ist ein erheblicher Mangel. Dieser Mangel könnte jedoch auf rein algebraischem Wege behoben werden. Allerdings gibt es Zahlen, die sich selbst einer algebraischen Beschreibung entziehen. Dazu gehört die Kreiszahl π , die als Fläche des Kreises vom Radius 1 definiert ist. Im Jahre 1882 konnte F. LINDEMANN folgendes zeigen:

π ist keine algebraische Zahl, d.h. für beliebige rationale Zahlen a_0, a_1, \dots, a_n gilt stets

$$a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n \neq 0.$$

D.h. die Zahl π genügt keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten. Um also π als Zahl verstehen zu können, müssen wir zunächst einen Zahlbereich (Körper) konstruieren, welcher π enthält. Dies führt nahezu zwangsläufig auf den Körper der reellen Zahlen.

1. Angeordnete Körper, Absolutbetrag

Wir hatten in den Abschnitten II.1 und II.2 eine Ordnung auf den natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen eingeführt, die mit der algebraischen Struktur verträglich ist. In diesem Abschnitt werden wir den Ordnungsbegriff etwas näher beleuchten.

DEFINITION 1.1. Ein Körper K heißt ein *angeordneter Körper*, falls eine Teilmenge $P \subset K$ so ausgezeichnet ist, dass gilt

- (A1) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der 3 Bedingungen $x \in P$, $x = 0$, $-x \in P$,
 (A2) $\forall_{x,y \in K} x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$,
 (A3) $\forall_{x,y \in K} x, y \in P \Rightarrow x \cdot y \in P$.

BEMERKUNGEN 1.2.

1. \mathbb{Q} ist ein angeordneter Körper.
2. Wir schreiben für $x, y \in K$

$$x < y \iff y - x \in P,$$

$$x \leq y \iff x < y \vee x = y.$$

Dann definiert \leq eine Ordnungsrelation auf K und es gilt sinngemäß Satz II.1.7 wobei Satz II.1.7, 3. durch (II.2.2) zu ersetzen ist. Diese Tatsachen ergeben sich aus:

FOLGERUNG 1.3. Für $x, x', y, y', z \in K$ gilt:

1. $x \leq y \vee y \leq x$.
2. $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$.
3. $x < y \wedge y < z \implies x < z$.
4. $x < y \iff x + z < y + z$.
5. $x < y \iff -y < -x$.
6. $x < y \wedge x' < y' \implies x + x' < y + y'$.
7. $x < y, z > 0 \implies xz < yz$.
8. $0 \leq x < y, 0 \leq x' < y' \implies xx' < yy'$.
9. $x < y, z < 0 \implies zy < zx$.
10. $x \neq 0 \implies x^2 > 0$.
11. $x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0$.
12. $0 < x < y \implies 0 < y^{-1} < x^{-1}$.
13. $1 > 0$.

BEWEIS. 1. Wegen (A1) ist $x - y > 0 \vee x - y = 0 \vee y - x > 0$, also $x \leq y \vee y \leq x$.

2. Wäre $x \neq y$ so wären $x - y \in P$ und $y - x \in P$ im Widerspruch zu (A1).
3. Es ist $z - x = (z - y) + (y - x) \in P$ wegen (A2), also $x < z$.
- 4.

$$\begin{aligned} x < y &\iff y - x \in P \\ &\iff y + z - (x + z) \in P \\ &\iff x + z < y + z. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x < y &\iff y - x \in P \\ &\iff (-x) - (-y) \in P \\ &\iff -y < -x. \end{aligned}$$

6. $x + x' < x + y' < y + y'$, wobei zweimal 4. verwandt wurde.
7. (A3) liefert $yz - xz = (y - x) \cdot z > 0$, also $xz < yz$.

8. Zweimalige Anwendung von 7. liefert
 $xx' \leq xy' < yy'$.
9. Wegen 5. ist $-z > 0$, also wegen 7. $(-z)x < (-z)y$ und nochmals 5. liefert
 $zy < zx$.
10. Falls $x > 0$ so folgt die Behauptung aus (A3). Falls $x < 0$, so ist $-x > 0$ und
 folglich $x^2 = (-x)^2 > 0$.
11. Folgt aus 10. und $x^{-1} = x(x^{-1})^2$.
12. Folgt durch zweimalige Anwendung von 7: $x < y \Rightarrow x/y < 1 \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$.
13. $1 = 1^2 > 0$ wegen 10.

□

SATZ 1.4. Sei K ein angeordneter Körper. Dann ist $\text{char } K = 0$ und es gibt genau eine Abbildung $f : \mathbb{Q} \rightarrow K$ mit

- (i) $f(1) \neq 0$,
- (ii) $f(a + b) = f(a) + f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$,
- (iii) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$.

Dieses f ist injektiv und ordnungserhaltend und es gilt für $x = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$f(x) = (m \cdot 1_K)(n \cdot 1_K)^{-1}.$$

M.a.W., wir dürfen \mathbb{Q} als Teilkörper von K auffassen.

BEWEIS. Wir zeigen induktiv $n \cdot 1_K > 0$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $1_K > 0$ wegen Folgerung 1.3, 12. Ist $n \cdot 1_K > 0$ so liefert Folgerung 1.3, 6. die Ungleichung $(n+1)1_K = n \cdot 1_K + 1_K > 0$. Damit ist $\text{char } K = 0$ gezeigt.

Eindeutigkeit: Sei f gegeben. Dann ist $f(1_{\mathbb{Q}})^2 = f(1_{\mathbb{Q}}) \cdot f(1_{\mathbb{Q}}) = f(1_{\mathbb{Q}}^2) = f(1_{\mathbb{Q}})$, also

$$f(1_{\mathbb{Q}})(f(1_{\mathbb{Q}}) - 1_K) = 0.$$

Wegen (i) folgt $f(1_{\mathbb{Q}}) = 1_K$.

Ebenso ist

$$f(0_{\mathbb{Q}}) = f(0_{\mathbb{Q}} + 0_{\mathbb{Q}}) = f(0_{\mathbb{Q}}) + f(0_{\mathbb{Q}}),$$

also $f(0_{\mathbb{Q}}) = 0_K$.

Induktiv nehmen wir nun $f(n) = n \cdot 1_K$ an, Dann ist

$$\begin{aligned} f(n + 1_{\mathbb{Q}}) &= f(n) + 1_K = n \cdot 1_K + 1_K \\ &= (n + 1) \cdot 1_K. \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{Z}, n < 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned} f(n) + (-n)1_K &= f(n) + f(-n) \\ &= f(n + (-n)) = f(0_{\mathbb{Q}}) = 0_K, \end{aligned}$$

also

$$f(n) = n \cdot 1_K.$$

Damit ist $f(n) = n \cdot 1_K$ für $n \in \mathbb{Z}$ bewiesen.

Schließlich erhalten wir für $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} m \cdot 1_K &= f(m) = f\left(\frac{m}{n} \cdot n\right) \\ &= f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f(n) \\ &= f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot (n \cdot 1_K), \end{aligned}$$

also

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m \cdot 1_K}{n \cdot 1_K}. \quad (1.1)$$

Damit ist gezeigt, dass f notwendigerweise durch die Formel (1.1) gegeben ist.

Existenz: Wir definieren f durch (1.1). Es ist klar, dass f dann (i)-(iii) erfüllt.

Zur Injektivität: Hierfür wird (i) nicht benötigt. Sei $f(x) = f(x')$. Wäre $x - x' \neq 0$, so wäre

$$f(1) = f\left(\frac{x - x'}{x - x'}\right) = f(x - x')f\left(\frac{1}{x - x'}\right) = (f(x) - f(x'))f\left(\frac{1}{x - x'}\right) = 0,$$

im Widerspruch zu (i). Also ist doch $x = x'$.

Im Hinblick auf (1.1) ist f ordnungserhaltend □

Von nun an fassen wir \mathbb{Q} als Teilkörper von K auf!

1.1. Der Absolutbetrag. Es sei K ein angeordneter Körper. Für $x \in K$ setzen wir

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

SATZ 1.5. $|\cdot|$ hat folgende Eigenschaften:

1. Es ist stets $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
2. $|-x| = |x|$ für alle $x \in K$.
3. $|xy| = |x| |y|$ für alle $x, y \in K$.
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ für alle $x \in K$, $y \in K^*$.

BEWEIS. 1. und 2. sind klar.

3. Überprüft man durch Fallunterscheidung.

4. $x = \frac{x}{y} \cdot y$, also $|x| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y|$ und es folgt die Behauptung. □

SATZ 1.6 (Dreiecksungleichung). Für $x, y \in K$ gilt

$$\begin{aligned} |x + y| &\leq |x| + |y|, \\ |x + y| &\geq \left| |x| - |y| \right|. \end{aligned}$$

BEWEIS. Offenbar ist $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$. Folgerung 1.3 liefert $x + y \leq |x| + |y|$. Analog sieht man $-x - y \leq |x| + |y|$, also insgesamt $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Die zweite Ungleichung folgt aus der ersten:

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|,$$

folglich

$$|x| - |y| \leq |x + y|.$$

Vertauscht man die Rollen von x und y so erhält man $|y| - |x| \leq |x + y|$, also insgesamt $\left| |x| - |y| \right| \leq |x + y|$. □

Eine wichtige Ungleichung ist die sog. BERNOULLISCHE Ungleichung.

SATZ 1.7 (BERNOULLISCHE Ungleichung). *Sei $a \in K^*$ mit $1 + a > 0$. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,*

$$(1 + a)^n > 1 + na.$$

Für $n = 1$ gilt offenbar Gleichheit.

BEWEIS. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n . Für $n = 1$ gilt Gleichheit. Für $n \geq 1$ gelte $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Dann folgt wegen $(1 + a) > 0$

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} &\geq (1 + na)(1 + a) \\ &= 1 + (n + 1)a + a^2 > 1 + (n + 1)a. \end{aligned} \quad \square$$

1.2. Archimedisch angeordnete Körper.

DEFINITION 1.8. Ein angeordneter Körper heißt *archimedisch angeordnet*, falls es zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $n > x$.

BEMERKUNGEN 1.9.

1. Nicht jeder angeordnete Körper ist auch archimedisch angeordnet. Vgl. dazu Aufgabe 20.
2. \mathbb{Q} ist archimedisch angeordnet: Sei etwa $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Falls $p \leq 0$ so ist $x \leq 0$ und wir wählen $n = 1$. Ist $p > 0$ so setzen wir $n = p + 1$ und erhalten

$$p = q \cdot \frac{p}{q} \geq \frac{p}{q},$$

also $n > \frac{p}{q}$.

Im Folgenden sei K ein archimedisch angeordneter Körper.

SATZ 1.10.

1. Zu $x, y \in K$, $x, y > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $nx > y$.
2. Zu $x \in K$ gibt es genau ein $[x] \in \mathbb{Z}$ so, dass $[x] \leq x < [x] + 1$.
3. Zu $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
4. Zu $x, y \in K$, $x < y$, gibt es $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $x < \frac{p}{q} < y$.

4. Bedeutet, dass \mathbb{Q} in K „dicht“ liegt.

BEWEIS. 1. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{y}{x}$. Dann ist $nx > y$.

2. Wir nehmen zunächst $x \geq 0$ an. Da K archimedisch angeordnet ist, ist die Menge

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n > x\}$$

nicht leer. Nach Satz II.1.10 besitzt sie ein kleinstes Element, etwa k . Setze $[x] := k - 1$. Dann ist sicherlich $[x] + 1 = k > x$ nach Konstruktion. Wäre sogar $[x] > x$ so wäre k nicht das kleinste Element von A , also $[x] \leq x < [x] + 1$.

Ist $x < 0$ so ist

$$[-x] \leq -x < [-x] + 1,$$

also

$$-[-x] - 1 < x \leq -[-x].$$

Wir setzen daher

$$[x] := \begin{cases} -[-x] - 1, & x \neq -[-x], \\ -[-x], & x = -[-x]. \end{cases}$$

Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir $n, m \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} n &\leq x < n + 1, \\ m &\leq x < m + 1. \end{aligned}$$

Dann ist

$$n - m - 1 < 0 < n - m + 1,$$

und Lemma II.1.8 liefert $n = m$.

3. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \varepsilon^{-1}$. Dann ist $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

4. O.B.d.A. sei $0 \leq x < y$. Wähle $q \in \mathbb{N}$ so, dass $q(y - x) > 1$ und setze

$$p := [qx] + 1.$$

Dann ist

$$qx < p \leq qx + 1 < qy,$$

also

$$x < \frac{p}{q} < y.$$

□

SATZ 1.11.

1. Sei $b > 1$. Dann gibt es zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > x$.
2. Sei $0 < b < 1$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n < \varepsilon$.

BEWEIS. 1. Nach der BERNOULLISCHEN Ungleichung ist

$$b^n = (1 + (b - 1))^n \geq 1 + n(b - 1),$$

und da K archimedisch angeordnet ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n(b - 1) > x$.

2. Nach 1. gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\left(\frac{1}{b}\right)^n > \varepsilon^{-1},$$

folglich $b^n < \varepsilon$.

□

2. Supremum und Infimum

In diesem Abschnitt sei $K \supset \mathbb{Q}$ ein archimedisch angeordneter Körper.

DEFINITION 2.1. Für $a, b \in K$, $a < b$, setzen wir

1. $[a, b] := \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes, beschränktes Intervall)
2. $[a, b) := \{x \in K \mid a \leq x < b\}$
 $(a, b] := \{x \in K \mid a < x \leq b\}$ (halboffene, beschränkte Intervalle)
3. $(a, b) := \{x \in K \mid a < x < b\}$ (offenes, beschränktes Intervall)
4. $[a, \infty) := \{x \in K \mid a \leq x\}$
 $(-\infty, b] := \{x \in K \mid x \leq b\}$ (abgeschlossene, unbeschränkte Intervalle)
5. $(a, \infty) := \{x \in K \mid a < x\}$
 $(-\infty, b) := \{x \in K \mid x < b\}$
 $(-\infty, \infty) := K$ (offene, unbeschränkte Intervalle)

Weiterhin definieren wir

$$K_+ := \{x \in K \mid x \geq 0\}$$

$$K_- := \{x \in K \mid x \leq 0\}.$$

Die Eigenschaften „beschränkt“ bzw. „unbeschränkt“ lassen sich für beliebige Teilmengen von K erklären:

DEFINITION 2.2. $x \in \mathcal{P}(K)$ heißt nach *oben* (unten) *beschränkt* mit oberer (unterer) Schranke S , falls

$$\forall_{x \in X} \quad x \leq S \quad (x \geq S).$$

X heißt *beschränkt*, falls x nach oben und unten beschränkt ist.

BEISPIEL 2.3.

1. Für $a, b \in K$, $a < b$ sind die Intervalle (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ beschränkt. Die Intervalle $[a, \infty)$, (a, ∞) sind nach unten, nicht jedoch nach oben beschränkt.
2. \mathbb{N} ist nach unten durch 0 beschränkt; \mathbb{N} ist jedoch nicht nach oben beschränkt. \mathbb{Z}, \mathbb{Q} sind weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Das beschränkte Intervall $[a, b]$ hat die Eigenschaft, dass mit b eine obere Schranke zu $[a, b]$ selbst gehört. Hingegen ist kein Element von $[a, b)$ eine obere Schranke!

DEFINITION 2.4. Sei $x \in \mathcal{P}(K)$.

1. Ist S eine obere (untere) Schranke von X und gleichzeitig $S \in X$, so heißt S ein *Maximum* (*Minimum*) von X .
2. Sei $\mathcal{S}_\pm(X) = \{S \in K \mid S \text{ ist obere/untere Schranke von } X\}$. Ein Minimum (Maximum) S von $\mathcal{S}_+(X)$ ($\mathcal{S}_-(X)$) nennt man ein *Supremum* (*Infimum*) von X .

SATZ 2.5.

1. *Maximum und Minimum, erst recht also Supremum und Infimum, einer Menge sind eindeutig bestimmt.*
2. *Existiert $\max(X)$ ($\min(X)$), so ist $\max(X) = \sup(X)$ ($\min(X) = \inf(X)$).*

BEWEIS. 1. Es genügt, den Beweis für das Maximum zu führen. Seien S_1, S_2 Maxima der Menge X . Damit sind $S_1, S_2 \in X$ und S_1, S_2 sind obere Schranken von X .

Aus $S_1 \in X$ und $S_2 \in \mathcal{S}_+(X)$ folgt $S_1 \leq S_2$ und aus $S_2 \in X, S_1 \in \mathcal{S}_+(X)$ folgt $S_2 \leq S_1$, also insgesamt $S_1 = S_2$.

2. Sei $S = \max(X)$. Dann ist $S \in X \cap \mathcal{S}_+(X)$. Ist nun $S' \in \mathcal{S}_+(X)$ so folgt hieraus $S' \geq S$, also ist $S = \min(\mathcal{S}_+(X)) = \sup(X)$. \square

DEFINITION 2.6. Für $X \in \mathcal{P}(K)$ bezeichnen im Falle der Existenz $\max(X)$, $\min(X)$, $\sup(X)$, $\inf(X)$ das Maximum, Minimum, Supremum bzw. Infimum von X .

Ergänzend setzen wir für eine nach oben (unten) unbeschränkte Menge X : $\sup(X) := +\infty$ ($\inf(X) := -\infty$).

Desweiteren setzen wir $\sup(\emptyset) := \infty$, $\inf(\emptyset) = +\infty$.

BEISPIEL 2.7.

1. $\max([a, b]) = b$, $\min([a, b]) = a$. $(a, b]$, (a, b) , haben kein Minimum. Es ist aber $\inf((a, b)) = \inf((a, b]) = a$, denn

$$\mathcal{S}_-((a, b)) = \mathcal{S}_-((a, b]) = (-\infty, a].$$

2. Ist $X \subset K$ endlich (vgl. den nachfolgenden Abschnitt 3) und nicht leer, so existieren $\max(X)$ und $\min(X)$.

SATZ 2.8. Sei $X \subset K$, $X \neq \emptyset$. Eine Zahl $S \in K$ ist genau dann das Supremum von X , falls gilt:

$$S \in \mathcal{S}_+(X) \wedge (\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x_\varepsilon \in X} : S - \varepsilon < x_\varepsilon \leq S). \quad (2.1)$$

BEWEIS. 1. Sei $S = \sup X$ und $\varepsilon > 0$. Da $S = \min \mathcal{S}_+(X)$, kann $S - \varepsilon$ keine obere Schranke von X sein. Also gibt es ein $x_\varepsilon \in X$ mit $S - \varepsilon < x_\varepsilon \leq S$.

2. Umgekehrt sei $S \in \mathcal{S}_+(X)$ und es gelte (2.1). Sei nun $\tilde{S} \in \mathcal{S}_+(X)$ ein weiteres Element. Wäre $\tilde{S} < S$, so gäbe es zu $\varepsilon = S - \tilde{S} > 0$ ein $x_\varepsilon \in X$ mit $\tilde{S} = S - \varepsilon < x_\varepsilon \leq S$. Dies aber widerspricht $\tilde{S} \in \mathcal{S}_+(X)$. Also doch $\tilde{S} \geq S$ und $S = \sup(X)$ ist bewiesen. \square

BEISPIEL 2.9. Wir diskutieren das Existenzproblem für Wurzeln. Sei $a \in K$, $a > 0$ und $q \in \mathbb{N}^*$. Wir betrachten die Gleichung

$$x^q = a \quad (2.2)$$

für $x > 0$. Diese Gleichung hat höchstens eine Lösung, denn es gilt für $x, y \in K_+$:

$$x < y \iff x^q < y^q. \quad (2.3)$$

Den einfachen Induktionsbeweis überlasse ich als Übung.

Wir betrachten nun die Menge

$$A = \{x \in K \mid 0 \leq x \wedge x^q \leq a\}.$$

Sicherlich ist $A \neq \emptyset$ denn $0 \in A$. Nun zeigen wir dass A nach oben beschränkt ist: Aus der BERNOULLISCHEN Ungleichung folgt nämlich für $x \in A$

$$(1 + a)^q \geq 1 + qa \geq 1 + a > x^q,$$

also wegen (2.3) auch $x < 1 + a$.

Wir nehmen nun an, dass $\xi = \sup A$ existiert und zeigen, dass dann $\xi^q = a$:

a) Angenommen $\xi < a$: dann folgt für $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \left(\xi + \frac{1}{n}\right)^q &= \xi^q + \sum_{k=1}^q \binom{q}{k} \xi^{q-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &\leq \xi^q + \frac{1}{n} \alpha, \quad \alpha := \sum_{k=1}^q \binom{q}{k} \xi^{q-k}. \end{aligned}$$

Nach Satz 1.10 gibt es nun ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{1}{n} < (a - \xi^q)/\alpha$. Dann ist

$$\left(\xi + \frac{1}{n}\right)^q \leq \xi^q + \frac{\alpha}{n} < a$$

und folglich $\xi + \frac{1}{n} \in A$ im Widerspruch zu $\xi = \sup A$.

b) Angenommen $\xi > a$: dann folgt für $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\xi}$

$$\begin{aligned} \left(\xi - \frac{1}{n}\right)^q &= \xi^q \left(1 - \frac{1}{n\xi}\right)^q \geq \xi^q \left(1 - \frac{q}{n\xi}\right) \\ &= \xi^q - \frac{1}{n} q \xi^{q-1}. \end{aligned}$$

Nach Satz 1.10 gibt es wieder ein $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\xi}$ so, dass

$$n > (\xi^q - a)/q\xi^{q-1}.$$

Dann ist

$$\left(\xi - \frac{1}{n}\right)^q \geq \xi^q - \frac{1}{n}q\xi^{q-1} > a.$$

Wegen (2.3) ist damit auch $\xi^q - \frac{1}{n}$ eine obere Schranke von A im Widerspruch zu $\xi = \sup A$.

Falls also $\sup A$ existiert, so ist $\sup A$ die einzige nichtnegative Lösung der Gleichung (2.2). Im Umkehrschluss bedeutet das, dass die Menge

$$\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \wedge x^2 \leq 2\}$$

kein Supremum im Körper \mathbb{Q} besitzen kann; denn wir haben zu Beginn des Kapitels III gezeigt, dass es keine rationale Zahl x gibt mit $x^2 = 2$.

Die Existenz des Supremums einer nichtleeren nach oben beschränkten Menge ist damit als von besonderer Wichtigkeit erkannt!

DEFINITION 2.10 (Vollständigkeitsaxiom). Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. K heißt *vollständig*, falls jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $X \subset K$ ein Supremum in K besitzt.

Bis jetzt ist keineswegs klar, ob ein solcher Körper existiert. Wir nehmen für den Moment an, wir hätten einen vollständigen archimedisch angeordneten Körper \mathbb{R} vorliegen. In der Tat begnügen sich viele Lehrbücher zur Analysis lediglich damit, die Axiome eines vollständigen archimedisch angeordneten Körpers als die Axiome der reellen Zahlen aufzulisten, ohne ein Modell und damit (auf der Basis der ZFC Mengentheorie) die Existenz von \mathbb{R} zu beweisen. Dieser axiomatische Zugang, welcher sicherlich 4-5 Vorlesungsstunden einspart, ist von D. HILBERT vorgeschlagen worden. B. RUSSELL meinte dazu etwas süffisant, dass die Vorzüge dieses axiomatischen Zugangs denen ähnlich seien, die der Diebstahl vor ehrlicher Arbeit hat. Wir werden ehrlich arbeiten und später, nachdem wir den Begriff der Konvergenz diskutiert haben, die Existenz und Eindeutigkeit des Körpers \mathbb{R} beweisen!

Beispiel 2.9 liefert nun sofort:

SATZ 2.11. Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gibt es zu jedem $q \in \mathbb{Z}$ genau ein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^q = a$.

BEWEIS. Falls $q \in \mathbb{N}$, so folgt dies sofort aus Beispiel 2.9. Ist $q < 0$ so folgt die Behauptung aus dem bewiesenen Fall $q \geq 0$ sowie $x^{-q} = a \iff x^q = a^{-1}$. \square

DEFINITION 2.12. Für $a \in \mathbb{R}_+$, $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, setzen wir

$$a^r := (a^p)^{\frac{1}{q}},$$

d.h. a^r ist die einzige Lösung $x \in \mathbb{R}_+$ der Gleichung

$$x^q = a^p.$$

SATZ 2.13. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$, $r, s \in \mathbb{Q}$:

1. a^r ist wohldefiniert, d.h. ist $r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, so gilt

$$(a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{p'})^{\frac{1}{q'}}.$$

2.

$$\begin{aligned} a^r b^r &= (ab)^r, \\ (a^r)^a &= a^{rs}, \\ a^r a^s &= a^{r+s}. \end{aligned}$$

3. Ist $r > 0$ so gilt:

$$a^r < b^r \iff a < b.$$

4. Ist $a > 1$ so gilt:

$$a^r < a^s \iff r < s.$$

BEWEIS. 1. Ist $p/q = p'/q'$, so gilt

$$\begin{aligned} \left((a^p)^{\frac{1}{q}} \right)^{q \cdot q'} &= \left(\left((a^p)^{\frac{1}{q}} \right)^q \right)^{q'} = (a^p)^{q'} = a^{pq'} \\ &= a^{p'q} = \dots = \left((a^{p'})^{\frac{1}{q'}} \right)^{qq'}, \end{aligned}$$

also nach Satz 2.11 $(a^p)^{1/q} = (a^{p'})^{1/q'}$.2. $(a^r b^r)^q = a^p \cdot b^p = (ab)^p$, also $(a^r b^r) = (ab)^{p/q}$.

Die anderen beiden Identitäten folgen analog.

3. und 4. überlassen wir zur Übung. □

2.1. Intervallschachtelungen.

DEFINITION 2.14. Eine Folge $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von abgeschlossenen und beschränkten Intervallen heißt eine Intervallschachtelung, falls gilt

(1) $\forall_n I_{n+1} \subset I_n$.(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $L(I_n) < \varepsilon$.Dabei bezeichnet $L(I)$ die Länge eines Intervalls: $L([a, b]) := b - a$.Für eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besteht $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ aus höchstens einem Element:Sind nämlich $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ und wäre $x \neq y$ so gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $L(I_n) < |y - x|$.Dann können jedoch x, y nicht beide in I_n liegen.SATZ 2.15. Für einen archimedisch angeordneten Körper K sind äquivalent:(1) K ist vollständig, d.h. jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $X \subset K$ besitzt ein Supremum.(2) Für jede Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.Ist (2) erfüllt, so gibt es nach der vorangegangenen Überlegung zu jeder Intervallschachtelung (I_n) genau ein $x \in K$ mit $\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.BEWEIS. (1) \Rightarrow (2): Sei (I_n) eine Intervallschachtelung mit $I_n = [a_n, b_n]$. Die Menge $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht leer und durch b_0 nach oben beschränkt. Sei $\xi = \sup A$. Dann ist einerseits $\forall_n \xi \geq a_n$. Andererseits ist $\forall_N \forall_n b_N \geq a_n$, also $\forall_N b_N \geq \xi$. Damit ist

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

(2) \Rightarrow (1): Es gelte (2) und es sei $\emptyset \neq X \subset K$ nach oben beschränkt.

Wir konstruieren induktiv eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ und eine Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oberer Schranken so, dass $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist. Dazu wählen wir $a_0 \in X$ und eine obere Schranke b_0 . Seien $a_0 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq a_0$ schon gewählt.

1. Fall: $(a_n + b_n)/2$ ist eine obere Schranke von X .

$$\text{Setze } a_{n+1} := a_n, \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}.$$

2. Fall: $(a_n + b_n)/2 \notin \mathcal{S}_+(X)$.

$$\text{Dann gibt es ein } a_{n+1} \in X, \quad a_{n+1} > \frac{a_n + b_n}{2}. \text{ Setze } b_{n+1} := b_n.$$

Nach Konstruktion ist $(b_n - a_n) \leq 2^{-n}(b_0 - a_0)$, also ist $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Nach (2) existiert ein $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

$\xi \in \mathcal{S}_+(X)$: Wäre $\xi \notin \mathcal{S}_+(X)$, so gäbe es ein $x \in X$ mit $x > \xi$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|b_n - a_n| < (x - \xi)$. Dann ist

$$x < b_n = a_n + (b_n - a_n) < \xi + x - \xi = x. \text{ Widerspruch!}$$

$\xi = \sup X$: Sei $\xi' \in \mathcal{S}_+(X)$ eine obere Schranke.

Wäre $\xi' < \xi$ so gäbe es ein n mit $(b_n - a_n) < \xi - \xi'$. Dann ist $\xi' = \xi - (\xi - \xi') < b_n - (b_n - a_n) = a_n$. Widerspruch! \square

3. Mächtigkeit von Mengen, abzählbare und überabzählbare Mengen

Als Anwendung des Intervallschachtelungsprinzips werden wir zeigen, dass es in gewissem Sinne viel mehr reelle als rationale Zahlen gibt. Dazu müssen wir jedoch einige Überlegungen zur *Mächtigkeit* von Mengen anstellen.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{N}_n := \{1, \dots, n\} = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$. Man beachte, dass $\mathbb{N}_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 0\} = \emptyset$. \mathbb{N}_n ist der Prototyp einer Menge mit n Elementen.

SATZ 3.1 (DIRICHLETSches Schubfachprinzip).

(1) Falls $f : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_m$ injektiv ist, so ist $n \leq m$.

(2) Falls $f : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_m$ surjektiv ist, so ist $n \geq m$.

Den einfachen Induktionsbeweis überlassen wir zur Übung. Insbesondere gibt es genau dann eine Bijektion $f : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_m$ wenn $n = m$. Wir nennen eine Menge X daher *endlich*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $f : X \rightarrow \mathbb{N}_n$ gibt. Das so eindeutig bestimmte n nennen wir die *Kardinalität* von X , Schreibweise $|X|$. Ist X nicht endlich, so nennen wir X *unendlich*. Endliche Mengen lassen sich auch wie folgt charakterisieren.

SATZ 3.2. Eine Menge ist genau dann endlich, wenn für jede injektive Abbildung $f : X \rightarrow X$ gilt $f(X) = X$.

Die „Größen“ unendlicher Mengen lassen sich noch weiter differenzieren.

DEFINITION 3.3. Zwei Mengen X, Y heißen gleichmächtig (bzw. von gleicher Kardinalität), Schreibweise: $|X| = |Y|$, falls es eine Bijektion $f : X \rightarrow Y$ gibt. Wir schreiben $|X| \leq |Y|$, falls es eine injektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gibt.

Die Notationen sind mit der für die Kardinalität endlicher Mengen verträglich. Es gilt sogar der

SATZ 3.4 (SCHRÖDER-BERNSTEIN). Für Mengen X, Y gilt:

- (1) $(|X| \leq |Y| \wedge |Y| \leq |X|) \Rightarrow |X| = |Y|$.
- (2) $|X| \leq |Y| \vee |Y| \leq |X|$.
- (3) $|X| \leq |Y| \iff$ es gibt eine surjektive Abbildung $f : Y \rightarrow X$.

Einen Beweis für diesen Satz werden Sie in meinem Proseminar im SS 2002 kennenlernen.

DEFINITION 3.5. Eine Menge X heißt *abzählbar*, falls $|X| = |\mathbb{N}|$; sie heißt *höchstens abzählbar*, falls $|X| \leq |\mathbb{N}|$.

SATZ 3.6. \mathbb{Z} ist abzählbar.

BEWEIS. Wir setzen

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad k \mapsto \begin{cases} 2k, & k \geq 0, \\ 2|k| - 1, & k < 0, \end{cases}$$

d.h. f ist wie folgt gegeben:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \dots & 5 & 3 & 1 & 0 & 2 & 4 & 6 & \dots \end{array}$$

f ist offenbar bijektiv. □

SATZ 3.7. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und \mathbb{Q} sind abzählbar.

BEWEIS. Eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$f(k, l) := \frac{(k+l)(k+l+1)}{2} + k.$$

Die Umkehrabbildung ist für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch die Formeln

$$\begin{aligned} k+l &= \left\lfloor \sqrt{2n + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rfloor, \\ k &= n - \frac{(k+l)(k+l+1)}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gezeigt. Im Hinblick auf Satz 3.6 ist dann auch $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ abzählbar. Die Abbildung

$$f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad (q, p) \mapsto \frac{p}{q}$$

ist surjektiv, folglich ist \mathbb{Q} höchstens abzählbar. Da jedoch $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, n \mapsto n$ injektiv ist, ist \mathbb{Q} abzählbar. □

FOLGERUNG 3.8. Seien X_1, X_2, X_3, \dots (höchstens) abzählbare Mengen. Dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ (höchstens) abzählbar.

BEWEIS. Seien $f_j : \mathbb{N} \rightarrow X_j$ surjektiv. Setze

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad f(i, j) := f_j(i).$$

Dann ist f surjektiv. □

Es gibt jedoch Mengen, die nicht abzählbar sind:

THEOREM 3.9 (CANTORS Diagonalschluss). *Für jede Menge X ist $|\mathfrak{P}(X)| > |X|$.*

BEWEIS. Es sei $f : X \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ eine Abbildung. Wir betrachten

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Wir nehmen an, es gäbe ein $\xi \in X$ mit $A = f(\xi)$. Nun fragen wir ξ , ob es in A liegt. ξ ist etwas peinlich berührt; denn die Definition von A sagt für ξ : $\xi \in A \Leftrightarrow \xi \notin A$. Dieser Widerspruch kann nur aufgelöst werden, wenn $A \notin f(X)$. Also ist f nicht surjektiv. Da es keine surjektive Abbildung $X \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ wohl aber eine injektive, nämlich $x \mapsto \{x\}$ gibt, folgt $|X| < |\mathfrak{P}(X)|$. \square

Insbesondere ist die Menge $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar.

SATZ 3.10. $|\mathfrak{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

BEWEIS. Ich zeige hier etwas weniger, nämlich nur $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, d.h. \mathbb{R} ist nicht abzählbar. Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen an, wir hätten eine Abzählung $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von \mathbb{R} . Nun konstruieren wir induktiv eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie folgt: Sei $I_0 := [a_0, b_0]$ ein Intervall der Länge 1 mit $x_0 \notin I_0$. Induktiv seien $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_n$ schon so konstruiert, dass

- (i) $x_k \notin I_k, k = 0, \dots, n$;
- (ii) $(b_k - a_k) = 3^{-k}, k = 0, \dots, n$.

Man betrachte das Intervall $[a_n, b_n]$. Wir wählen ein Teilintervall $I_{n+1} \subset [a_n, b_n]$ der Länge $\frac{1}{3}(b_n - a_n)$ so, dass $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Man überlege sich geometrisch, dass dies möglich ist.

Aufgrund der Eigenschaften (i), (ii) ist $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Tat eine Intervallschachtelung. Nach Satz 2.15 und der nachfolgenden Bemerkung gibt es genau eine reelle Zahl $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach Annahme eine Abzählung von \mathbb{R} ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ so, dass $x = x_k$. Wegen (i) ist jedoch

$$x = x_k \notin I_k \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

also auch nicht $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Dies ist ein Widerspruch, also ist die Annahme falsch und \mathbb{R} ist nicht abzählbar. \square

LEMMA 3.11. *Sei $|X| \leq |\mathbb{N}|$. Dann ist X endlich oder $|X| = |\mathbb{N}|$.*

BEWEIS. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ surjektiv.

1. Fall: $\exists_{n \in \mathbb{N}} f(\mathbb{N}_n) = X$.

Dann ist $|X| \leq |\mathbb{N}_n|$, also ist X endlich.

2. Fall: $\neg(\exists_n f(\mathbb{N}_n) = X) \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m > n} f(m) \notin f(\mathbb{N}_n)$.

Wir konstruieren induktiv eine injektive Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow X$. Wir setzen $g(0) = f(0)$. Sind $g(0), \dots, g(n)$ schon konstruiert, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\{g(0), \dots, g(n)\} \subset f(\mathbb{N}_m).$$

Wähle nun ein $k > m$ mit $f(k) \notin \{g(0), \dots, g(n)\}$ und setze $g(n+1) := f(k)$. \square

Die Kardinalität von \mathbb{N} ist also die auf die endlichen Kardinalitäten unmittelbar folgende; d.h. es gibt keine unendliche Menge X mit $|X| < |\mathbb{N}|$. Welche Kardinalität folgt auf $|\mathbb{N}|$? Gibt es eine Menge X mit

$$|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|?$$

G. CANTOR vermutete die *Kontinuumshypothese* wonach

$$\neg(\exists X |\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|). \quad (\text{CH})$$

Man kann relativ leicht zeigen, dass $|\mathbb{R}| = |\mathfrak{P}(\mathbb{N})|$. Dann kann man (CH) zur *verallgemeinerten Kontinuumshypothese* (GCH) erweitern:

$$\text{Zu einer unendlichen Menge } X \text{ gibt es keine Menge } Y \text{ mit} \quad (\text{GCH}) \\ |X| < |Y| < |\mathfrak{P}(X)|.$$

Die Antwort auf die Frage, ob (CH) bzw. (GCH) wahr sind, ließ lange auf sich warten. Dafür fiel die Antwort umso überraschender aus:

SATZ (K. GÖDEL 1938). ZFC + GCH sind konsistent, d.h. in ZFC kann GCH nicht widerlegt werden.

SATZ (P. COHEN 1963). ZFC + \neg CH sind konsistent, d.h. in ZFC kann CH nicht bewiesen werden.

Beachten Sie, dass diese Aussage *stärker* als die Konsistenz von ZFC + \neg GCH ist!

Die Sätze von GÖDEL und COHEN wirken auf den ersten Blick verwirrend. Ein Satz muss doch entweder wahr oder falsch sein, oder? Beachten Sie, dass obige Aussagen auf das mengentheoretische Universum Bezug nehmen und lediglich sagen, dass die Kontinuumshypothese in diesem Universum nicht entscheidbar ist.

Als Beispiel nehmen wir an, unser mathematisches Universum bestünde nur aus den Axiomen eines Körpers K . Betrachten wir die Aussage

$$\exists_{x \in K} x^2 = 2. \quad (\text{W2})$$

Dann ist (W2) nicht entscheidbar; denn

1. $K + (\text{W2})$ ist konsistent:
Betrachte als Modell $K = \mathbb{R}$. Dann ist (W2) wahr.
2. $K + \neg (\text{W2})$ ist konsistent:
Betrachte das Modell $K = \mathbb{Q}$. Dann ist (W2) falsch.

Analog zu diesem (trivialen) Beispiel hat K. GÖDEL ein *Modell* der Mengentheorie konstruiert, in welchem GCH gilt. COHEN hat ein Modell konstruiert, in welchem \neg CH gilt. Es versteht sich von selbst, dass diese Konstruktionen etwas komplizierter sind und mit allen Details füllen sie ganze Bücher.

KAPITEL IV

Metrische Räume und Konvergenz

Die zentrale Begriffsbildung der Analysis ist die Konvergenz. Diese formalisiert unsere Vorstellung von „beliebig nahe kommen“.

1. Die komplexen Zahlen

Die Einführung der komplexen Zahlen wird motiviert durch die Tatsache, dass die einfache quadratische Gleichung

$$x^2 = -1$$

keine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt. Bei der Diskussion der Ordnung hatten wir nämlich gesehen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^*$ stets $x^2 > 0$ gilt. Die Einführung der komplexen Zahlen wird detailliert in der Linearen Algebra behandelt. An dieser Stelle werden nur die wichtigsten Tatsachen summarisch zusammengefasst.

Auf \mathbb{R} erhält man durch

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &:= (x + x', y + y'), \\ (x, y) \cdot (x', y') &:= (xx' - yy', xy' + x'y),\end{aligned}$$

eine Körperstruktur. Man nennt diesen Körper den Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} . Es ist

$$0_{\mathbb{C}} = (0, 0), \quad 1_{\mathbb{C}} = (1, 0). \quad (1.1)$$

statt $(0, 1)$ schreibt man i und erhält

$$i^2 = (0, 1)^2 = (-1, 0) = -1. \quad (1.2)$$

Für Zahlen der Form $(x, 0)$ gilt

$$\begin{aligned}(x, 0) + (x', 0) &= (x + x', 0) \\ (x, 0) \cdot (x', 0) &= (xx', 0).\end{aligned}$$

Wir können daher \mathbb{R} als Unterkörper von \mathbb{C} auffassen, indem wir statt $(x, 0)$ wieder einfach x schreiben.

Jede komplexe Zahl z schreibt sich in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Mit komplexen Zahlen rechnet man wie mit reellen Zahlen, man hat nur die Relation $i^2 = -1$ zu beachten.

Für $z = x + iy$ heißt $\bar{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe* Zahl, $x = \operatorname{Re} z$ heißt *Realteil*, $y = \operatorname{Im} z$ heißt *Imaginärteil* von z . Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten die Regeln

1. $\overline{\bar{z}} = z$,
2. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
4. $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$,
5. $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ heißt

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

der Betrag von z . $|\cdot|$ stimmt offenbar für reelle Zahlen mit dem ursprünglich definierten Betrag überein. Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, insbesondere ist für $z \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$: $|\lambda z| = \lambda |z|$.
3. $|\bar{z}| = |z|$.
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung).

Die Dreiecksungleichung folgt aus der unten bewiesenen MINKOWSKISCHEN Ungleichung.

2. Einige Ungleichungen

2.1. Die AGM-Ungleichung. Wir betrachten reelle Zahlen $x, y \geq 0$. Dann ist

$$0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy},$$

also

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y) \tag{2.1}$$

und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $x = y$.

Allgemeiner definiert man für $x_1, \dots, x_n \geq 0$ das *arithmetische Mittel* durch

$$A(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \tag{2.2}$$

bzw. das *geometrische Mittel* durch

$$G(x_1, \dots, x_n) := \left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n}.$$

Die Bezeichnung *Mittel* weist darauf hin, dass

$$\min(x_1, \dots, x_n) \leq \left\{ \begin{array}{l} A(x_1, \dots, x_n) \\ G(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right\} \leq \max(x_1, \dots, x_n) \tag{2.3}$$

SATZ 2.1 (AGM-Ungleichung). Für nichtnegative reelle Zahlen x_1, \dots, x_n gilt

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n).$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $x_1 = \dots = x_n$.

BEWEIS. Der Fall $n = 1$ ist trivial, der Fall $n = 2$ wurde oben gezeigt.

Offenbar sind G und A *homogen*, d.h. es gilt für $\lambda \geq 0, x_1, \dots, x_n \geq 0$:

$$\begin{aligned} G(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) &= \lambda G(x_1, \dots, x_n), \\ A(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) &= \lambda A(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ist die Behauptung für den Fall $A(x_1, \dots, x_n) = 1$ bewiesen, so folgt für beliebige $x_1, \dots, x_n \geq 0$

$$G\left(\frac{x_1}{A}, \dots, \frac{x_n}{A}\right) \leq 1$$

(o.B.d.A. $A \neq 0$, warum?), also wegen (2.4) die Behauptung.

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$: Es seien $x_1, \dots, x_{n+1} \geq 0$ mit

$$x_1 + \dots + x_{n+1} = n + 1. \tag{2.5}$$

Ist $x_1 = \dots = x_{n+1} = 1$ so ist nichts zu beweisen. Andernfalls gibt es wegen (2.5) Indices k, ℓ mit $x_k < 1$ und $x_\ell > 1$. Wir nummerieren die (x_j) gegebenenfalls so um, dass $x_n < 1$ und $x_{n+1} > 1$.

Man betrachte nun $\tilde{x}_n := (x_n + x_{n+1} - 1) > 0$. Dann ist sicherlich $x_1 + \dots + x_{n-1} + \tilde{x}_n = n$ und die Induktionsannahme liefert

$$1 \geq x_1 \cdot \dots \cdot x_{n-1} (x_n + x_{n+1} - 1).$$

Nun ist jedoch

$$\begin{aligned} x_n \cdot x_{n+1} &= (1 - (1 - x_n))(1 + (x_{n+1} - 1)) \\ &< 1 - (1 - x_n) + (x_{n+1} - 1) \\ &= x_n + x_{n+1} - 1, \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. \square

2.2. CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung. Diese lautet:

SATZ 2.2. Seien $z, w \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$\left| \sum_{k=1}^n \bar{z}_k w_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Dabei tritt Gleichheit genau dann ein, wenn $z = \lambda w$ bzw. $w = \lambda z$ mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$.

BEWEIS. Offenbar ist nichts zu zeigen, wenn $w = 0$. Also nehmen wir $w \neq 0$ an und betrachten für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^n |z_k - \lambda w_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + |\lambda|^2 \sum_{k=1}^n |w_k|^2 - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \lambda \bar{z}_k w_k. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Setzt man speziell

$$\lambda = \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right)^{-1} \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k,$$

so folgt

$$0 \leq \sum_{k=1}^n |z_k|^2 - \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right)^{-1} \left| \sum_{k=1}^n \bar{z}_k w_k \right|^2,$$

also

$$\left| \sum_{k=1}^n \bar{z}_k w_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right).$$

Im Hinblick auf (2.6) tritt Gleichheit genau dann ein, wenn $z = \lambda w$. \square

2.3. Skalarprodukt und Norm. Der vorangegangene Abschnitt motiviert uns zur Einführung einiger abkürzender Notationen. Für $z, w \in \mathbb{C}^n$ setzen wir

$$\langle z, w \rangle := \sum_{k=1}^n \bar{z}_k w_k. \quad (2.7)$$

$\langle z, w \rangle$ heißt das (*Standard-*)Skalarprodukt der Vektoren z und w . Offenbar gelten für $z, z_1, z_2, w \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$:

NOTIZ 2.3 (Rechenregeln für $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

- (1) $\langle z, w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle}$,
- (2) $\langle z_1 + z_2, w \rangle = \langle z_1, w \rangle + \langle z_2, w \rangle$,
- (3) $\langle \lambda z, w \rangle = \lambda \langle z, w \rangle$,
- (4) $\langle z, z \rangle \geq 0$ und $\langle z, z \rangle = 0 \iff z = 0$.

Für $z \in \mathbb{C}^n$ setzt man

$$\|z\|_2 := \sqrt{\langle z, z \rangle} = \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)^{1/2}$$

und nennt dies die (*Standard-*)Norm von z . Oft schreiben wir auch einfach $\|\cdot\|$ statt $\|\cdot\|_2$. Die Bedeutung des Indexes „2“ wird erst später klar werden. $\|z\|$ ist der Abstand von z zum Nullpunkt.

SATZ 2.4 (Eigenschaften von $\|\cdot\|$). *Es gilt für $z, w \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$:*

- (1) $\|z\| \geq 0$ mit Gleichheit genau für $z = 0$,
- (2) $\|\lambda z\| = |\lambda| \|z\|$,
- (3) $|\langle z, w \rangle| \leq \|z\| \|w\|$ (CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung),
- (4) $\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung),
- (5) $\|z + w\| \geq \left| \|z\| - \|w\| \right|$ (Dreiecksungleichung nach unten).

BEWEIS. (1), (2) folgen unmittelbar aus Notiz 2.3.

(3) ist nur eine Umformulierung der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung Satz 2.2.

(5) folgt aus (4) wie im Beweis von Satz III.1.6.

(4) verdient eine eigene Überschrift (s.u.)! □

2.4. MINKOWSKISCHE UNGLEICHUNG.

SATZ 2.5. *Seien $z, w \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt*

$$\left(\sum_{k=1}^n |z_k + w_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Dabei tritt Gleichheit genau dann ein, wenn $z = \lambda w$ oder $w = \lambda z$ mit $\lambda \geq 0$.

BEWEIS. Offenbar läßt sich die Satzbehauptung unter Verwendung der im vorangegangenen Unterabschnitt eingeführten Notation wesentlich kompakter schreiben: Die Satzbehauptung ist gleichbedeutend mit

$$\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\|.$$

Es ist nun

$$\begin{aligned}
 \|z + w\|^2 &= \langle z + w, z + w \rangle \\
 &= \langle z, z \rangle + \langle w, w \rangle + \langle z, w \rangle + \langle w, z \rangle \\
 &= \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle z, w \rangle \\
 &\leq \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle z, w \rangle| \\
 &\leq \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2\|z\| \|w\| \quad (\text{CAUCHY-SCHWARZ}) \\
 &= (\|z\| + \|w\|)^2.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Hieraus folgt die Ungleichung. Gleichheit tritt nur ein, wenn in beiden Ungleichungen in (2.8) Gleichheit eintritt.

In der zweiten Ungleichung tritt Gleichheit genau dann ein, wenn $z = \lambda w$ (o.B.d.A.) mit $\lambda \in \mathbb{C}$. In der ersten Ungleichung tritt Gleichheit genau dann ein, wenn $\sum \bar{z}_k w_k$ reell und ≥ 0 ist. Dies bedeutet aber

$$\sum_{k=1}^n \bar{\lambda} |w_k|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $\lambda \geq 0$. □

3. Metrische Räume

In der Mathematik und auch im Alltag begegnet uns der Abstandsbegriff sehr häufig. Der mathematische Rahmen zur Analyse des Abstandsbegriffes ist der des *metrischen Raumes*.

DEFINITION 3.1. Ein *metrischer Raum* ist ein Paar (X, d) , wobei X eine Menge und $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung ist mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
- (2) für $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$,
- (3) für $x, y, z \in X$ gilt die Dreiecksungleichung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Es ist nicht wesentlich, dass Bild $(d) \subset \mathbb{R}$. Es ist auch $d : X \times X \rightarrow K$ mit einem archimedisch angeordneten Körper K zugelassen.

BEISPIELE 3.2.

1. Der Betrag auf \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} induziert eine Metrik durch

$$d(x, y) = |x - y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{C} \quad (\text{bzw. } \mathbb{R}).$$

2. Allgemeiner setzen wir für $z, w \in \mathbb{C}^n$

$$d(z, w) := \|z - w\| = \left(\sum_{k=1}^n |z_k - w_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Die Axiome einer Metrik folgen unmittelbar aus den Eigenschaften von $\|\cdot\|$. Die Dreiecksungleichung für d folgt aus der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|$.

3. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$, so induziert d in trivialer Weise eine Metrik auf A durch $d_A(x, y) = d(x, y)$ für $x, y \in A$.

4. Auf jeder Menge X können wir die *diskrete Metrik* einführen durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

5. In der Ebene \mathbb{R}^2 führen wir die zentralistische Metrik ¹ ein:

$$d_p(x, y) := \begin{cases} \|x\| + \|y\|, & \text{falls } x, y \text{ linear unabhängig,} \\ \|x - y\|, & \text{falls } x, y \text{ linear abhängig.} \end{cases} \quad (3.1)$$

d_p ist tatsächlich Metrik!

Wir notieren noch, dass für eine Metrik d stets $d(x, y) \geq 0$ gilt:

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y). \quad (3.2)$$

DEFINITION 3.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $p \in X$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ heißt

$$U_\varepsilon(p) := \{q \in X \mid d(p, q) < \varepsilon\}$$

die ε -Umgebung von p . $U \subset X$ heißt Umgebung von p , falls es ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass $U \supset U_\varepsilon(p)$. Als Beispiel notieren wir

$$a \in \mathbb{R}, \quad U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

4. Konvergenz

DEFINITION 4.1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent mit Grenzwert x* , falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass

$$d(x_n, x) \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Schreibweise: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent, so sagt man auch (x_n) sei *divergent*.

Man kann die Konvergenz einer Folge gegen x auch wie folgt ausdrücken: In jeder Umgebung U von x liegen fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Glieder der Folge.

BEISPIELE 4.2.

1. Die konstante Folge $x_n = x$ konvergiert gegen x . Denn für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $d(x_n, x) = 0 < \varepsilon$.
2. In \mathbb{R} gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn ist $\varepsilon > 0$ so gibt es nach der archimedischen Eigenschaft ein n_0 so, dass $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Dann ist für $n \geq n_0$:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

3. In \mathbb{C} gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+ni}{1+2n} = \frac{i}{2}$: sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{1+ni}{1+2n} - \frac{i}{2} \right| &= \left| \frac{2+2ni-i-2ni}{2(1+2n)} \right| = \left| \frac{2-i}{2(1+2n)} \right| \\ &\leq \frac{1}{2n} \left(1 + \left| \frac{i}{2} \right| \right) < \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

¹ P steht für Paris. Die zentralistische Metrik modelliert die Bahnkilometer zwischen Orten in Frankreich, da dort (fast) alle Bahnverbindungen über Paris gehen.

für $n > \varepsilon^{-1}$.

4. Sei $x_n = (-1)^n$ in \mathbb{R} . Dann ist (x_n) divergent.

BEWEIS. Wir nehmen an, es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Dann gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein n_0 so, dass $|x_n - x| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere ist dann

$$2 = |x_{n_0+1} - x_{n_0}| \leq |x_{n_0+1} - x| + |x - x_{n_0}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

was offensichtlich absurd ist. \square

SATZ 4.3 (Eindeutigkeit des Limes). Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x'$. Dann ist $x = x'$.

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ und n_0 so gewählt, dass $d(x_n, x) < \varepsilon$ und $d(x_n, x') < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$d(x, x') \leq d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x') < 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $d(x, x') = 0$ und somit $x = x'$. \square

SATZ 4.4. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in (X, d) . Dann ist (x_n) beschränkt, d.h. zu $a \in X$ gibt es ein $C > 0$ so, dass

$$d(a, x_n) \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Der Beschränktheitsbegriff für metrische Räume hängt offenbar nicht von dem „Basispunkt“ a ab; denn ist $Y \subset X$ und gilt

$$d(a, y) \leq C$$

für $y \in Y$, so folgt für einen anderen festen Punkt $b \in X$

$$d(b, y) \leq d(a, b) + d(a, y) \leq C + d(a, b).$$

BEWEIS. Es sei $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein n_0 so, dass $d(x_n, x) < 1$ für $n \geq n_0$. Dann folgt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$d(a, x_n) \leq \max\{d(a, x_n) \mid 1 \leq n \leq n_0\} + d(a, x) + 1.$$

\square

SATZ 4.5. Seien $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

1. $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

2. $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab.$$

3. Ist $b \neq 0$ so gibt es ein n_0 so, dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Des weiteren konvergiert die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_0}$ gegen $\frac{a}{b}$.

BEWEIS. Den Beweis von 1. überlassen wir als Übung.

2. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Satz 4.4 sind die Folgen (a_n) und (b_n) beschränkt. Also gibt es ein $C > 0$ so, dass

$$\max\{|a_n|, |b_n|\} < C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$|a_n b_n - ab| \leq |(a_n - a)b_n| + |(b_n - b)a| \leq C|a_n - a| + |a||b_n - b|.$$

Wählen wir also n_0 so, dass für $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

und

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|},$$

so folgt für $n \geq n_0$ auch $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$.

3. Zunächst wählen wir zu $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ ein n_0 so, dass $|b_n - b| < |b|/2$ für $n \geq n_0$. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung nach unten Satz 2.4

$$|b_n| \geq ||b| - |b - b_n|| > \frac{|b|}{2} > 0.$$

Weiterhin folgt für $n > n_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| &\leq \left| \frac{a_n - a}{b_n} \right| + \left| a \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right) \right| \\ &\leq \frac{2}{|b|} |a_n - a| + |a| \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} \\ &\leq \frac{2}{|b|} |a_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2} |b_n - b|. \end{aligned}$$

Wählt man also $n \geq n_0$ so, dass für $n \geq n_1$

$$|a_n - a| < \frac{|b|}{4} \varepsilon,$$

und

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{4|a|} \varepsilon,$$

so folgt $\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$. □

SATZ 4.6 (Konvergenz im \mathbb{R}^p). *Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}^p$ mit $a_n = (a_n^1, \dots, a_n^p)$ konvergiert genau dann gegen $a = (a^1, \dots, a^p) \in \mathbb{R}^p$, wenn gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^j = a^j, j = 1, \dots, p$.*

Insbesondere konvergiert eine Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ genau dann, wenn die Folgen $(\operatorname{Re} z_n), (\operatorname{Im} z_n)$ in \mathbb{R} konvergieren. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n.$$

BEWEIS. 1. Es sei (a_n) konvergent gegen a und $\varepsilon > 0$. Dann folgt für $j = 1, \dots, p$ und $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$|a_n^j - a^j| \leq \left(\sum_{k=1}^p |a_n^k - a^k|^2 \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^j = a^j$.

2. Nun sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^j = a^j$ für $j = 1, \dots, p$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann $n_j(\varepsilon)$ so, dass für $n \geq n_j(\varepsilon)$

$$|a_n^j - a^j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}.$$

Dann folgt für $n \geq \max\{n_j(\varepsilon) \mid j = 1, \dots, p\}$

$$\|a_n - a\| = \left(\sum_{j=1}^p |a_n^j - a^j|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{p} \max\{|a_n^j - a^j| \mid j = 1, \dots, p\} < \varepsilon.$$

□

SATZ 4.7. *Es seien $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Es gelte*

$$a_n \leq b_n$$

für alle $n \geq n_0$. Dann ist $a \leq b$.

WARNUNG 4.8. Im allgemeinen kann aus $a_n < b_n$ nicht auf $a < b$ geschlossen werden. Als Beispiel betrachte man $a_n = 0 < \frac{1}{n} =: b_n$. Es ist jedoch $a = b = 0$.

BEWEIS. Es sei $\varepsilon > 0$ und n_0 so groß, dass $|a - a_n| \leq \varepsilon/2$ und $|b - b_n| \leq \varepsilon/2$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} a &= a - a_{n_0} + a_{n_0} \leq a_{n_0} + \varepsilon/2 \\ &\leq b_{n_0} + \varepsilon/2 \\ &\leq b + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich $a \leq b$. □

Es folgt daraus das überaus nützliche

SATZ 4.9 (Sandwich-Lemma). *Es seien $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen in \mathbb{R} mit*

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

für $n \geq n_0$. Falls (a_n) und (b_n) beide gegen denselben Grenzwert a konvergieren, so konvergiert auch (c_n) gegen a .

BEWEIS. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $n(\varepsilon) \geq n_0$ so, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_n - a| < \varepsilon$$

für $n \geq n(\varepsilon)$. Dann folgt für $n \geq n(\varepsilon)$

$$-\varepsilon < a_n - a \leq c_n - a \leq b_n - a < \varepsilon,$$

also $|c_n - a| < \varepsilon$. □

4.1. Weitere Beispiele konvergenter Folgen. Wir diskutieren einige besonders wichtige Folgen und ihr Konvergenzverhalten:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^s} = 0$ für jedes $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$.

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ setze $N = \varepsilon^{-1/s}$. Für $n \geq N$ gilt dann $n^{-s} \leq N^{-s} = \varepsilon$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ für jedes $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$.

Nach Satz III.1.11 gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein N mit $|q|^N < \varepsilon$. für $n \geq N$ ist dann $|q^n| = |q|^n \leq |q|^N < \varepsilon$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Sicherlich ist $\sqrt[n]{n} \geq 1$, also liefert die Binomialentwicklung

$$\begin{aligned} n &= (\sqrt[n]{n})^n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n \\ &\geq 1 + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \end{aligned}$$

also

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$$

und folglich

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}.$$

Wegen 1. ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ und das Sandwich-Lemma 4.9 liefert die Behauptung.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für jedes reelle $a > 0$.

Für $a \geq 1$ und $n \geq a$ haben wir

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n},$$

also folgt die Behauptung in diesem Fall aus 3. und dem Sandwich-Lemma 4.9.

Ist $a < 1$, so wenden wir Satz 4.5 an und erhalten

$$\sqrt[n]{a} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{a}} \right)^{-1} \longrightarrow 1^{-1} = 1.$$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$.

Wir schreiben $|z| = 1 + x$ mit $x > 0$. Dann ist für $n > 2k$

$$\begin{aligned} |z|^n &= (1+x)^n \geq \binom{n}{k+1} x^{k+1} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} n(n-1) \cdots (n-k) x^{k+1} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} n^{k+1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k}{n}\right) x^{k+1} \\ &\geq n^{k+1} \frac{x^{k+1}}{2^k (k+1)!}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{n^k}{|z|^n} \leq \frac{2^k (k+1)!}{x^{k+1}} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n!} = 0$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.
Für $n \geq 2|z|$ ist

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2} \frac{|z|^n}{n!}$$

und folglich induktiv mit $k := [2|z|] + 1$

$$\frac{|z|^n}{n} \leq \frac{1}{2^{n-k}} \frac{|z|^k}{k!}$$

Daher folgt die Behauptung aus 2. und dem Sandwich-Lemma III.1.11.

7. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1}{1-z}$.

Man zeigt durch vollständige Induktion unmittelbar die geometrische Summenformel:

$$\sum_{k=0}^N z^k = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C}^k,$$

Hieraus folgt nun die Behauptung unter Verwendung von 2.

5. Konvergenzprinzipien

DEFINITION 5.1. Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend* (*fallend*), falls $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) für alle $n \in \mathbb{N}$.

SATZ 5.2. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine *monoton wachsende nach oben beschränkte Folge*. Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergent gegen* $a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

BEWEIS. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es nach Satz III.2.8 ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $a - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a$. Dann ist aber wegen der Monotonie für $n \geq n_0$

$$a - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \leq a,$$

also $|a - a_n| \leq \varepsilon$. □

BEISPIELE 5.3. 1. $a_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ ist sicherlich *monoton wachsend*. Weiterhin ist

$$\frac{1}{k!} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}, \quad \text{für } k \geq 3.$$

Folglich

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{11}{4} < 3.$$

Also konvergiert (a_n) gegen eine reelle Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \frac{11}{4} < 3.$$

2. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Es ist

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{\ell=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Hieraus folgt einerseits sofort

$$a_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e. \quad (5.2)$$

Andererseits ist für ein festes $m \in \mathbb{N}$ und $n > m$

$$a_n \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \prod_{\ell=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right). \quad (5.3)$$

Weiterhin folgt aus (5.1)

$$a_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{\ell=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n+1}\right) < a_{n+1}.$$

Also ist (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt. Damit ist sie nach Satz 5.2 konvergent. Aus (5.2) und (5.3) ergibt sich für beliebiges $m \in \mathbb{N}$

$$e \geq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \prod_{\ell=1}^{k-1} \left(1 - \frac{\ell}{n}\right) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

3. Numerische Berechnung von Wurzeln.

Sei $a > 0$ und $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Wir betrachten für beliebiges $x_0 > 0$ die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} := \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p x_n^{p-1}}. \quad (5.4)$$

Man überzeugt sich induktiv sofort, dass $x_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$. die BERNOULLISCHE Ungleichung liefert für $n \geq 0$

$$x_{n+1}^p = x_n^p \underbrace{\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{a}{p x_n^p}\right)^p}_{> -1} \geq x_n^p \left(1 - 1 + \frac{a}{x_n^p}\right) = a,$$

also gilt stets $x_n \geq \sqrt[p]{a}$ für $n \geq 1$. Weiterhin ist dann für $n \geq 1$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{1}{p} \left(x_n - \frac{a}{p x_n^{p-1}}\right) = \frac{1}{p x_n^{p-1}} (x_n^p - a) \geq 0.$$

Also ist $(x_n)_{n \geq 1}$ eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge. Nach Satz 5.2 ist sie konvergent gegen ein $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi \geq \sqrt[p]{a}$. Es folgt nun aber

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p-1}{p} x_n + \frac{a}{p x_n^{p-1}} = \frac{p-1}{p} \xi + \frac{a}{p \xi^{p-1}},$$

also

$$0 = -\frac{1}{p} \xi + \frac{a}{p\xi^{p-1}},$$

und somit $\xi = \sqrt[p]{a}$.

Die rekursive Folge (5.4) konvergiert also für beliebigen Startwert x_0 gegen $\sqrt[p]{a}$. Diese Folge konvergiert „besonders schnell“. Um dies zu erläutern, betrachten wir den Spezialfall $p = 2$. Dann ist für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n} (x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a) \\ &= \frac{1}{2x_n} (x_n - a)^2 \leq \frac{1}{2a} (x_n - a)^2, \end{aligned}$$

d.h. es liegt sog. *quadratische Konvergenz* vor. Das bedeutet im wesentlichen, dass sich die Anzahl der signifikanten Dezimalstellen in jedem Iterationsschritt verdoppelt. Natürlich gilt dies nur als Faustregel, da auch die Größenordnung von a in die Fehlerabschätzung eingeht. Man kann mit etwas mehr Aufwand zeigen, dass für beliebige $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ebenfalls quadratische Konvergenz vorliegt.

5.1. CAUCHY-Folgen. Wir kommen nun zum äußerst wichtigen Begriff der CAUCHY-Folge. Die Konvergenzdefinition nimmt auf den Grenzwert Bezug. D.h. dass man den Grenzwert kennen muß um entscheiden zu können, ob eine Folge konvergiert oder nicht. Wir werden nun eine Charakterisierung der Konvergenz kennenlernen, welche auf den Grenzwert keinen Bezug nimmt.

DEFINITION 5.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt CAUCHY-Folge, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) d(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

SATZ 5.5. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X .

- (1) Ist (x_n) konvergent, so ist (x_n) eine CAUCHY-Folge.
- (2) Ist (x_n) eine CAUCHY-Folge, so ist (x_n) auch beschränkt.

BEWEIS. (1) Sei $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $n_0(\varepsilon)$ so, dass für $n \geq n_0(\varepsilon)$ die Ungleichung $d(x, x_n) \leq \varepsilon/2$ gilt. Dann ist für $n, m \geq n_0(\varepsilon)$

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \leq \varepsilon.$$

(2) Zu $\varepsilon = 1$ gibt es ein n_0 so, dass für $n, m \geq n_0$ die Ungleichung $d(x_n, x_m) \leq 1$ gilt. Dann ist für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ sicherlich

$$d(x_k, x_{n_0}) \leq 1 + \max\{d(x_j, x_{n_0}) \mid j = 0, \dots, n_0\},$$

folglich ist (x_n) beschränkt. □

THEOREM 5.6. Für einen archimedisch angeordneten Körper K sind äquivalent:

- (1) K ist vollständig, d.h. jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subset K$ besitzt ein Supremum.
- (2) In K konvergiert jede CAUCHY-Folge.

BEWEIS. (1) \Rightarrow (2): Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ eine CAUCHY-Folge. Nach Satz 5.5 ist $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Insbesondere existiert daher

$$a_n := \inf\{x_k \mid k \geq n\}.$$

Offenbar ist $a_n \leq \sup\{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, also existiert

$$x := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Wir zeigen: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da (x_n) eine CAUCHY-Folge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \geq n_0$

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon/3.$$

Da die Folge (a_n) monoton wachsend ist, gibt es ein $n_1 \geq n_0$ so, dass

$$|x - a_{n_1}| \leq \varepsilon/3.$$

Schließlich gibt es im Hinblick auf die Definition von a_n ein $n_2 \geq n_1$ so, dass

$$|a_{n_1} - x_{n_2}| \leq \varepsilon/3.$$

Dann ist für $n \geq n_2$

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_2}| + |x_{n_2} - a_{n_1}| + |a_{n_1} - x| \leq \varepsilon.$$

Damit ist die Konvergenz von (x_n) bewiesen.

(2) \Rightarrow (1): Wir zeigen das Intervallschachtelungsprinzip, welches nach Satz III.2.15 zu (1) äquivalent ist. Sei also $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Dann ist (a_n) eine CAUCHY-Folge. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nämlich ein n_0 mit $b_{n_0} - a_{n_0} \leq \varepsilon$. Dann ist für $n, m \geq n_0$ erst recht $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ denn $a_n, a_m \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$. Sei also $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Da (a_n) monoton wachsend ist, ist $\xi \geq a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Andererseits ist $a_n \leq b_N$ für alle $n, N \in \mathbb{N}$. Daraus ergibt sich $\xi \leq b_N$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Insgesamt ist $\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. \square

DEFINITION 5.7. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede CAUCHY-Folge in X konvergiert.

Im Hinblick auf Theorem 5.6 und Satz 4.6 sind $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ vollständige metrische Räume.

5.2. Konvergenzprinzip von BOLZANO-WEIERSTRASS.

DEFINITION 5.8. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in der Menge X . Sei weiterhin $n_0 < n_1 < \dots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von (x_n) .

DEFINITION 5.9. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge. Der Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von (x_n) , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

BEISPIELE 5.10.

1. $a_n = (-1)^n$. Häufungspunkte sind 1 und -1.
2. $(-1)^n(7 + \frac{8}{n})$. Häufungspunkte sind 7 und -7.

Beiden Beispielen ist gemeinsam, dass es zu jedem Häufungspunkt eine Teilfolge gibt, die gegen diesen konvergiert. Das ist kein Zufall.

SATZ 5.11. Ein Punkt x in einem metrischen Raum (X, d) ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von (x_n) gibt mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.

BEWEIS. 1. Es sei $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein k_0 so, dass $d(x_{n_k}, x) \leq \varepsilon$ für $k \geq k_0$. Insbesondere gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq \max(n, k_0)$. Dann ist $n_k \geq n$ und $d(x_{n_k}, x) \leq \varepsilon$. Also ist x ein Häufungspunkt der Folge (x_n) .

2. Umgekehrt sei ein Häufungspunkt x gegeben. Wähle n_1 so, dass $d(x_{n_1}, x) < 1$. Induktiv seien $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ schon so gewählt, dass $d(x_{n_j}, x) < \frac{1}{j}$ für $j = 1, \dots, k$. Nach Definition des Häufungspunktes gibt es nun ein $n_{k+1} > n_k$ so, dass $d(x_{n_{k+1}}, x) < \frac{1}{k+1}$. Die Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert offenbar gegen x . \square

Im Hinblick auf die bereits im Beweis von Theorem 5.6 durchgeführte Konstruktion definieren wir für eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ den *Limes superior* durch

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad (5.5)$$

bzw. den *Limes inferior* durch

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}. \quad (5.6)$$

BEISPIELE 5.12.

1. $a_n = (-1)^n$. Es ist $\sup_{k \geq n} a_k = 1$ und $\inf_{k \geq n} a_k = -1$, also $\liminf a_n = -1$ bzw.

$\limsup a_n = 1$.

2. $a_n := n + (-1)^n(n - \frac{1}{n})$, $n \geq 1$. Es ist

$$\sup_{k \geq n} a_k = +\infty \text{ und } \inf_{k \geq n} a_k = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n+1}, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Also $\limsup a_n = +\infty$ und $\liminf a_n = 0$.

3. $a_n = (-1)^n n$. Dann ist $\limsup a_n = +\infty$ und $\liminf a_n = -\infty$.

Es wird im folgenden nützlich sein, den Konvergenzbegriff in \mathbb{R} etwas weiter zu fassen. Wir sagen, dass eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ uneigentlich gegen $+\infty$ konvergiert, falls

$$\forall R > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 x_n \geq R. \quad (5.7)$$

Uneigentliche Konvergenz gegen $-\infty$ ist analog definiert.

SATZ 5.13. Sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann sind $\underline{\lim} x_n$ und $\overline{\lim} x_n$ Häufungspunkte von (x_n) . Insbesondere ist die Menge $H := \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ Häufungspunkt von } (x_n)\}$ nicht leer. Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \sup H &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \\ \inf H &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned}$$

Inbesondere besitzt jede beschränkte Folge in \mathbb{R} eine konvergente Teilfolge.

BEWEIS. 1. Wir zeigen, dass $\overline{\lim} x_n \in H$. Der Beweis für $\underline{\lim}$ verläuft analog. Zu $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ wähle zunächst ein $n \geq n_0$ so, dass $|\sup_{k \geq n} x_k - \overline{\lim} x_n| < \varepsilon/2$. Dann wähle ein $n_1 \geq n$ so, dass $|x_{n_1} - \sup_{k \geq n} x_k| < \varepsilon/2$. Dann ist offenbar $|x_{n_1} - \overline{\lim} x_n| < \varepsilon$.

2. Sei $x \in H$ und $\varepsilon > 0$. Nach Definition gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $k \geq n$ so, dass $|x_k - x| < \varepsilon$. Also ist

$$\forall n \in \mathbb{N} \sup_{k \geq n} x_k \geq x - \varepsilon$$

und folglich

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq x - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq x$. Analog folgt $x \geq \liminf x_n$. \square

SATZ 5.14. *Eine beschränkte Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn $\liminf a_n = \limsup a_n$.*

BEWEIS. Ist (a_n) konvergent gegen a , so konvergiert jede Teilfolge gegen a , also enthält die Menge H der Häufungspunkte nur den Punkt a . Folglich

$$\liminf a_n = \inf H = a = \sup H = \limsup a_n.$$

Umgekehrt gelte $\liminf a_n = \limsup a_n = a$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein n_0 so, dass $a_n \leq a + \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Ebenso gibt es ein n_1 so, dass $a_n \geq a - \varepsilon$ für $n \geq n_1$. Also ist $|a - a_n| \leq \varepsilon$ für $n \geq \max(n_0, n_1)$. \square

6. Reihen

Von einem theoretischen Standpunkt aus betrachtet, gibt es keinen Unterschied zwischen einer Reihe und einer Folge. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so können wir eine neue Folge, die *Folge der Partialsummen*,

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k \tag{6.1}$$

betrachten. Wenn wir $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ schreiben, so ist zunächst diese Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen gemeint. Ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so sagen wir, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert und schreiben

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n. \tag{6.2}$$

Wir kennen bereits die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

Wir wollen nun eine Reihe von Kriterien für die Konvergenz von Reihen entwickeln.

Aus dem CAUCHY-Kriterium für die Folgenkonvergenz folgt unmittelbar:

SATZ 6.1 (CAUCHY-Kriterium). *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ so gibt, dass für alle $m \geq n \geq n_0$ gilt*

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

LEMMA 6.2. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergent, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

BEWEIS. Aus dem CAUCHY-Kriterium folgt offenbar für $n \geq n_0(\varepsilon)$, dass $|a_n| < \varepsilon$. \square

WARNUNG 6.3. Die Umkehrung dieses Lemmas ist falsch. Z.B. ist die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent. Zum Beweis betrachten wir

$$\sum_{j=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{j} \geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

also $\sum_{j=1}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{j} \geq \frac{n+1}{2}$. Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt, folglich $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

6.1. Teleskopreihen. Der offenkundigste Vertreter dieser Gattung ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$: Wegen $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Offenbar erhält man aus jeder Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teleskopreihe durch $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$. Letztere konvergiert genau dann, wenn (a_n) konvergiert.

6.2. Reihen mit nicht-negativen Gliedern. Ist $a_n \geq 0$ so bilden die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine monoton wachsende Folge. Nach Satz 5.2 ist diese genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Wir schreiben kurz

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} < \infty, & \text{falls Konvergenz vorliegt,} \\ = \infty, & \text{falls Divergenz vorliegt.} \end{cases}$$

Es sei betont, dass diese Notation nur für Reihen mit nicht-negativen Gliedern sinnvoll ist.

SATZ 6.4 (Majoranten- und Minorantenkriterium). Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen nicht-negativer reeller Zahlen mit $a_n \leq b_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- (1) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(2) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent, so auch $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

BEWEIS. (1) Es ist für beliebiges $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^N a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty,$$

also ist $(\sum_{n=0}^N a_n)_{N \in \mathbb{N}}$ beschränkt und somit konvergent.

(2) Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, gibt es nach der vorangegangenen Diskussion zu jedem $R > 0$ ein N so, dass $\sum_{n=0}^N a_n \geq R$. Folglich ist auch

$$\sum_{n=0}^N b_n \geq \sum_{n=0}^N a_n \geq R.$$

Damit ist $(\sum_{n=0}^N b_n)_{N \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt und folglich divergent. \square

SATZ 6.5 (Verdichtungssatz von CAUCHY). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty.$$

BEWEIS. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} < \infty$ und $N \in \mathbb{N}$. Wähle r so, dass $2^{r-1} \leq N < 2^r$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n &\leq \sum_{n=1}^{2^r-1} a_n = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} a_k \\ &\leq \sum_{j=1}^{r-1} 2^j a_{2^j} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} < \infty. \end{aligned}$$

Umgekehrt ist

$$\sum_{j=1}^r 2^j a_{2^j} \leq \sum_{j=1}^r \sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} a_k \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

\square

BEISPIEL 6.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Für $p > 0$ ist die Folge $(\frac{1}{n^p})$ sicherlich eine monoton fallende Nullfolge. Weiterhin ist

$$2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n(p-1)}.$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n(p-1)}$ konvergiert genau dann, wenn $p > 1$. Also gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1. \quad (6.3)$$

6.3. Absolute Konvergenz.

DEFINITION 6.7. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$.

SATZ 6.8. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiere absolut. Dann konvergiert sie (im üblichen Sinne).

BEWEIS. Wir verwenden das CAUCHY-Kriterium. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es, wegen $\sum |a_n| < \infty$, ein $n_0(\varepsilon)$ so, dass für alle $m \geq n \geq n_0$

$$\sum_{j=n}^m |a_j| \leq \varepsilon.$$

Dann ist aber erst recht

$$\left| \sum_{j=n}^m a_j \right| \leq \sum_{j=n}^m |a_j| \leq \varepsilon.$$

Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent. □

Weiter unten werden wir sehen, dass die Umkehrung von Satz 6.8 nicht gilt.

SATZ 6.9 (Majoranten- und Minorantenkriterium für absolute Konvergenz). *Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ Folgen. Dann gilt:*

- (1) *Ist $|a_n| \leq b_n$ und $\sum b_n$ konvergent, so konvergiert $\sum a_n$ absolut.*
- (2) *Ist $b_n \leq |a_n|$ und $\sum b_n$ divergent, so konvergiert $\sum a_n$ nicht absolut.*

BEWEIS. Folgt unmittelbar aus Satz 6.4 □

BEISPIEL 6.10. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ ist absolut konvergent; denn $\left| \frac{i^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

SATZ 6.11 (Quotientenkriterium). *Es seien $a_n \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$. Es gelte*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q.$$

Dann gilt:

- (1) *Falls $q < 1$ so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.*
- (2) *Falls $q > 1$ so divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Zusatz. Für die absolute Konvergenz ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ bereits hinreichend. Allerdings kann aus $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ *nicht* auf Divergenz geschlossen werden.

BEWEIS. 1. Es sei $q := \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$. Dann gibt es ein n_0 so, dass für $n \geq n_0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \frac{1+q}{2} =: \tilde{q} < 1.$$

Folglich ist für $n \geq n_0$

$$|a_n| = \prod_{j=n_0}^{n-1} \left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| \cdot |a_{n_0}| \leq \tilde{q}^{n-n_0} |a_{n_0}|. \quad (6.4)$$

Also ist die geometrische Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} \tilde{q}^{n-n_0}$ eine Majorante für $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum a_n$ absolut.

2. Es sei $q > 1$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq q > 1$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für $n \geq n_0$ gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq \frac{1+q}{2} = \tilde{q} > 1. \quad (6.5)$$

Dann ist für $n \geq n_0$ stets $|a_n| \geq \tilde{q}^{n-n_0} |a_{n_0}|$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$.

Im Hinblick auf Lemma 6.1 ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent. \square

SATZ 6.12 (Wurzelkriterium). *Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Folge und*

$$q := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Dann gilt:

- (1) Ist $q < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.
- (2) Ist $q > 1$, so divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

BEWEIS. 1. Sei $q < 1$. Dann ist für geeignetes n_0 und $n \geq n_0$ stets $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1+q}{2} = \tilde{q} < 1$. Also gilt für $n \geq n_0$

$$|a_n| \leq \tilde{q}^n.$$

Nach dem Majorantenkriterium Satz 6.11 folgt die Behauptung.

2. Völlig analog folgt $|a_n| \geq \tilde{q}^n$ für unendlich viele $n \geq 0$, wobei $\tilde{q} = \frac{1+q}{2} > 1$. Also ist (a_n) keine Nullfolge und folglich divergiert die Reihe $\sum a_n$. \square

Wir diskutieren die Grenzen des Quotienten- und des Wurzelkriteriums:

BEMERKUNGEN UND BEISPIELE 6.13.

1. Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ so liefert das Quotientenkriterium **keine** Aussage. Als Beispiele betrachten wir die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Erstere ist konvergent und letztere divergent. Es gilt jedoch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1.$$

Diese beiden Beispiele zeigen ebenfalls, dass das Wurzelkriterium im Falle $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$ keine Aussage macht. Es gilt nämlich nach Abschnitt 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

und ebenso

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1.$$

2. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n := \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \text{ gerade,} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es ist

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{3}, & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe konvergent. Andererseits ist

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n, & n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Folglich ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

Dies zeigt, dass in (2) des Quotientenkriteriums $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ nicht durch $\limsup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ ersetzt werden kann.

3. Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium in dem Sinne, dass wenn Konvergenz bzw. Divergenz mittels des Quotientenkriteriums nachgewiesen werden kann, dann auch mittels des Wurzelkriteriums.

Ist nämlich $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1$, so liefert (6.4)

$$|a_n| \leq \tilde{q}^{n-n_0} |a_{n_0}|,$$

also

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \tilde{q} \sqrt[n]{\tilde{q}^{-n_0} |a_{n_0}|},$$

und folglich

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \tilde{q} < 1.$$

Ist hingegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q > 1$, so liefert (6.5)

$$|a_n| \geq \tilde{q}^{n-n_0} |a_{n_0}|,$$

also

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq \tilde{q} \sqrt[n]{\tilde{q}^{-n_0} |a_{n_0}|},$$

und folglich

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \geq \tilde{q}.$$

6.4. Alternierende Reihen.

SATZ 6.14 (LEIBNIZKRITERIUM FÜR ALTERNIERENDE REIHEN). *Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann konvergiert die alternierende Reihe*

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Desweiteren gilt die Fehlerabschätzung:

$$\left| \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n - A \right| \leq |a_{N+1}|.$$

BEWEIS. Sei

$$S_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

die Folge der Partialsummen und

$$A_n := \begin{cases} S_n, & n \text{ ungerade,} \\ S_{n-1}, & n \text{ gerade,} \end{cases}$$

bzw.

$$B_n := \begin{cases} S_n, & n \text{ gerade,} \\ S_{n-1}, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann sind (A_n) monoton wachsend, (B_n) monoton fallend und es gilt stets $A_{n+1} \leq S_n \leq B_{n+1}$. Weiterhin gilt

$$|B_n - A_n| = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Das Sandwich-Lemma liefert die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$. Weiterhin ist wegen $s, s_n \in [A_{n+1}, B_{n+1}]$ auch $|s - s_n| \leq a_{n+1}$. \square

BEISPIEL 6.15. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konvergiert. Man kann zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

6.5. Umordnung. Bei bedingt konvergenten (d.h. konvergenten, aber nicht absolut konvergenten) Reihen kommt es auf die Summationsreihenfolge an. Als Beispiel diskutieren wir nochmals die alternierende harmonische Reihe

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Es ist nach dem LEIBNIZ-Kriterium

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \leq s \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \approx 0.833\dots$$

Betrachte nun die Umordnung

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{2k+2} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \right) + \dots \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{13}{140} > s. \end{aligned}$$

D.h. falls diese Umordnung konvergiert, so ist ihre Summe sicher verschieden von s . Die Summe konvergiert in der Tat. Dazu schätzen wir die Summanden wie folgt ab:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{2k+2} \right| \\ &= \left| \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+4} + \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+4} \right| \\ &\leq 2 \frac{3}{(4k+1)(4k+4)} \\ &\leq \frac{3}{8} \frac{1}{k^2}, \text{ für } k \geq 1. \end{aligned}$$

Also ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante.

Das gerade beschriebene Phänomen ist auf bedingt konvergente Reihen beschränkt, denn es gilt der

SATZ 6.16 (Umordnungssatz). Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit komplexen Summanden $a_n \in \mathbb{C}$ konvergiere absolut. Desweiteren sei $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann konvergiert auch die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}.$$

BEWEIS. Da $\sum |a_n| < \infty$, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein N_0 so, dass $\sum_{n=N_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. Da $\varphi(n)$ eine Bijektion ist, gibt es einen Index N_1 so, dass $\{0, \dots, N_0\} \subset \{\varphi(0), \dots, \varphi(N_1)\}$. Es

folgt dann für $N \geq N_1$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{j=0}^N a_{\varphi(j)} \right| \leq \sum_{n=N_0}^{\infty} |a_n| < \varepsilon,$$

also $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N a_{\varphi(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Da aber auch

$$\sum_{j=0}^N |a_{\varphi(j)}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\varphi(j)}$ in der Tat absolut. □

Ohne Beweis erwähnen wir

SATZ 6.17. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente aber nicht absolut konvergente Reihe mit reellen Summanden. Dann gibt es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ so, dass*

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}.$$

6.6. CAUCHY-Produkt.

SATZ 6.18. *Seien $\sum a_n, \sum b_n$ absolut konvergente Reihen mit komplexen Summanden. Dann konvergiert ihr CAUCHY-Produkt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$$

absolut und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

BEWEIS. Die absolute Konvergenz ergibt sich sofort aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \left| \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right| &\leq \sum_{k,\ell \leq N} |a_k b_\ell| = \left(\sum_{k=0}^N |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^N |b_k| \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right). \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=0}^N \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} - \left(\sum_{k=0}^N a_k \right) \left(\sum_{k=0}^N b_k \right) \right| \\
& \leq \sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq N \\ k+\ell > N}} |a_k| |b_\ell| \\
& \leq \left(\sum_{k=0}^N |a_k| \right) \left(\sum_{N/2 < \ell \leq N} |b_\ell| \right) + \left(\sum_{N/2 < k \leq N} |a_k| \right) \left(\sum_{\ell=0}^N |b_\ell| \right) \\
& \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left(\sum_{\ell > N/2} |b_\ell| \right) + \left(\sum_{k > N/2} |a_k| \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} |b_\ell| \right).
\end{aligned}$$

Da $\sum |a_k| < \infty$ und $\sum |b_\ell| < \infty$ strebt dies für $N \rightarrow \infty$ gegen 0. \square

Man kann zeigen, dass das CAUCHY-Produkt auch noch dann gegen das Produkt der Reihen konvergiert, wenn nur eine der beiden Reihen absolut und die andere bedingt konvergiert. Allerdings ist das CAUCHY-Produkt im allgemeinen dann ebenfalls nur bedingt konvergent. Sind beide Reihen nur bedingt konvergent, so ist das CAUCHY-Produkt im allgemeinen nicht konvergent.

KAPITEL V

Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen

KAPITEL VI

Polynome und Potenzreihen

1. Potenzreihen

Potenzreihen sind Reihen der Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

mit einem komplexen Parameter z . Sie stellen Verallgemeinerungen von Polynomen dar. Wir kennen mit der geometrischen Reihe bereits ein Beispiel einer Potenzreihe.

SATZ 1.1. Die Reihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere für $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert sie für jedes z mit $|z| < |z_0|$ absolut.

SATZ 1.2. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe. Dann gibt es ein wohlbestimmtes $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ so, dass gilt:

(1) Die Reihe $\sum a_n z^n$ konvergiert absolut für $|z| < R$.

(2) Die Reihe divergiert für $|z| > R$.

Für $|z| = R$ kann sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen. R heißt Konvergenzradius der Reihe.

Formeln für R :

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (\text{CAUCHY-HADAMARD Formel}),$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad \text{falls dieser Limes existiert.}$$

Setzt man $\frac{1}{0} = \infty$ bzw. $\frac{1}{\infty} = 0$ so bleiben die Formeln auch für $R = 0$ bzw. $R = \infty$ richtig.

BEISPIELE 1.3.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$.

Alle diese Reihen haben Konvergenzradius 1. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ divergiert für $|z| = 1$, da

$|z|^n = 1$ und folglich (z^n) keine Nullfolge ist.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ divergiert für $z = 1$ und konvergiert für $z = -1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium für alle z mit $|z| = 1$ absolut.

2. Die *Exponentialreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat Konvergenzradius ∞ : Es ist nämlich $a_n = \frac{1}{n!}$ also

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

SATZ 1.4. Seien $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien r_f, r_g . Dann gilt

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$$

für alle z mit $|z| < \min(r_f, r_g)$.

BEISPIEL 1.5. Sei $|z| < 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n. \end{aligned}$$

2. Polynome

In diesem Abschnitt bezeichne \mathbb{K} einen der Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

DEFINITION 2.1. Eine Abbildung $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt Polynomfunktion, falls

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

mit $a_k \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

Der Grad von P ist definiert durch

$$\deg(P) := \sup \{ k \in \mathbb{Z} \mid a_k \neq 0 \} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{-\infty\}.$$

Man beachte, dass der Grad des Nullpolynoms $-\infty$ ist.

Etwas ungenau sagen wir im Folgenden „Polynom“ statt „Polynomfunktion“. Man beachte, dass man über endlichen Körpern präzise zwischen den Begriffen „Polynom“ und „Polynomfunktion“ unterscheiden muss. Über unendlichen Körpern ist dies wegen Satz 2.4 unten nicht nötig.

Die Menge aller Polynome über \mathbb{K} bezeichnen wir mit $\mathbb{K}[x]$. Mit der punktweise definierten Addition und Multiplikation wird $\mathbb{K}[x]$ zu einem kommutativen Ring mit 1.

Man überzeugt sich unmittelbar davon, dass

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q),$$

wobei Gleichheit eintritt, falls $\deg P \neq \deg Q$. Weiterhin ist

$$\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q.$$

SATZ 2.2 (Euklidischer Algorithmus). Zu $P, Q \in \mathbb{K}[x]$, $Q \neq 0$, gibt es eindeutig bestimmte $S, R \in \mathbb{K}[x]$ so, dass

$$P = SQ + R \text{ und } \deg R < \deg Q.$$

Wir notieren einige wichtige Folgerungen aus Satz 2.2.

SATZ 2.3.

1. Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von P , d.h. $P(\alpha) = 0$. Dann gibt es ein $Q \in \mathbb{K}[x]$ so, dass

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x).$$

2. P hat höchstens $\deg P$ Nullstellen.

SATZ 2.4 (Identitätssatz für Polynome). Seien

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$$

Polynomfunktionen über \mathbb{K} . Gibt es $n + 1$ verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ mit $f(x_j) = g(x_j)$ so gilt $a_k = b_k$ für $k = 0, \dots, n$.

3. Der Identitätssatz für Potenzreihen

Wir beginnen mit einer Vorüberlegung und betrachten eine Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k z^k, \quad m \geq 0,$$

mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann folgt für festes $r < R$ und $|z| \leq r$

$$|f(z)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} z^k z^m \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+m}| r^k \right) |z|^m =: c |z|^m; \quad (3.1)$$

man beachte, dass $\sum |a_{k+m}| r^k < \infty$ wegen $r < R$.

SATZ 3.1 (Identitätssatz für Potenzreihen). Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

Potenzreihen mit Konvergenzradien $\neq 0$. Es gebe eine Nullfolge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n \neq 0$ und $f(z_n) = g(z_n)$ für alle n . Dann gilt $a_k = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

KAPITEL VII

Topologische Grundbegriffe, Stetigkeit

1. Offene und abgeschlossene Mengen

In diesem Abschnitt sei stets (X, d) ein metrischer Raum.

DEFINITION 1.1. $U \subset X$ heißt *offen*, falls es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass $B(x, \varepsilon) \subset U$.

Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \setminus A$ offen ist.

BEISPIELE 1.2.

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann ist (a, b) offen, $[a, b]$ ist abgeschlossen, $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ sind weder offen noch abgeschlossen.
2. Für $a \in X$ und $r > 0$ ist $B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ offen und $\{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ abgeschlossen.

WARNUNGEN 1.3.

1. $[a, b), (a, b] \subset \mathbb{R}$ sind weder offen noch abgeschlossen. Desweiteren sind \emptyset und X sowohl offen als auch abgeschlossen. „abgeschlossen“ ist daher nicht das Gegenteil von „offen“.
2. „offen“ bzw. „abgeschlossen“ sind relative Begriffe. Als Beispiel betrachten wir $X = \mathbb{R}$ und $Y = [a, b)$. Y ist in X nicht offen, wohl aber in sich selbst. Bei der Betrachtung von Y als eigenständigem metrischem Raum wissen wir nichts von dem Oberraum X . Als weiteres Beispiel betrachten wir das in \mathbb{R} offene Intervall (a, b) . Wir können dieses jedoch auch als Teilmenge von \mathbb{C} auffassen. Als solche ist (a, b) nicht offen. Denn zu $x \in (a, b)$ und $\varepsilon > 0$ ist $x + i\varepsilon/2 \in B(x, \varepsilon) \setminus (a, b)$.

SATZ 1.4.

1. \emptyset und X sind offen.
2. U, V offen $\Rightarrow U \cap V$ offen.
3. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Mengen, so ist

$$\bigcup_{i \in I} U_i$$

offen.

Entsprechend gelten

- 1' \emptyset und X sind abgeschlossen.

2' A, B abgeschlossen $\Rightarrow A \cup B$ abgeschlossen.

3' Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X , so ist auch

$$\bigcap_{i \in I} A_i$$

abgeschlossen.

DEFINITION 1.5. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine beliebige Menge. Dann heißt

$$\bar{A} := \bigcap_{\substack{A \subset Y \subset X \\ Y \text{ abgeschlossen}}} Y$$

die *abgeschlossene Hülle* von A und

$$\overset{\circ}{A} := \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ offen in } X}} U$$

der *offene Kern* von A .

SATZ 1.6. $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn folgendes gilt: Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ die gegen ein $x \in X$ konvergiert gilt schon $x \in A$.

SATZ 1.7. Sei $A \subset X$. Ein Punkt $\xi \in X$ liegt genau dann in \bar{A} , wenn es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ so gibt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

2. Grenzwerte von Abbildungen, Stetigkeit

DEFINITION 2.1. Seien X, Y metrische Räume, $A \subset X$ und $f : A \rightarrow Y$ eine Abbildung.

Sei $\xi \in \bar{A}$. Man schreibt $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = y$, falls für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y.$$

Zur Verdeutlichung schreibt man mitunter auch $\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ x \in A}} f(x)$.

BEISPIEL 2.2. Sei $X = Y = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und

$$f : A \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\exp(z) - 1}{z}; \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Dann ist $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$.

Es ist nämlich

$$\exp(z) = 1 + z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Nach (VI.3.1) ist

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \leq c|z|^2$$

für $|z| \leq 1$. Folglich

$$\frac{\exp(z) - 1}{z} = 1 + \frac{1}{z} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

also

$$\left| \frac{\exp(z) - 1}{z} - 1 \right| \leq c|z|.$$

SATZ 2.3. Mit den Bezeichnungen von Definition 2.1 gilt $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = y$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass

$$d(f(x), y) < \varepsilon$$

für alle $x \in A$ mit $d(x, \xi) < \delta$.

DEFINITION 2.4. Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *stetig* im Punkt $\xi \in X$, falls $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$. f heißt *stetig*, falls f in jedem Punkt $\xi \in X$ stetig ist.

BEMERKUNG 2.5. Aufgrund von Definition 2.1 ist f genau dann stetig in $\xi \in X$, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (1) Für jede Folge $(x_n) \subset X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi)$.
- (2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $d(f(\xi), f(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $d(\xi, x) < \delta$.

Bevor wir Beispiele diskutieren, möchte ich eine Variante des Stetigkeitsbegriffs diskutieren, die sich oftmals leicht verifizieren läßt:

DEFINITION 2.6. $f : X \rightarrow Y$ heißt *LIPSCHITZ-stetig*, mit *LIPSCHITZ-Konstante* L , falls

$$d(f(x), f(x')) \leq L d(x, x')$$

für $x, x' \in X$.

f heißt *lokal LIPSCHITZ-stetig*, falls es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt, auf der f LIPSCHITZ-stetig ist.

LEMMA 2.7. (Lokal) LIPSCHITZ-stetige Abbildungen sind stetig.

BEISPIELE 2.8.

1. Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Wir untersuchen, ob f stetig ist; seien dazu $|z|, |z_0| < R$ gegeben:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n) \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^j z_0^{n-1-j} \right) (z - z_0) \right| \\ &\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} |z|^j |z_0|^{n-1-j} \right) |z - z_0| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| (\max(|z|, |z_0|))^{n-1} |z - z_0| \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Ungleichungskette ist dann gerechtfertigt, wenn wir zeigen können, dass $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|(\max(|z|, |z_0|))^{n-1}$ konvergiert. Wir wählen $r < R$ so, dass $|z|, |z_0| \leq r$ und betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}. \quad (2.2)$$

Es ist

$$\limsup \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim \sqrt[n]{n} \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|},$$

folglich hat die Reihe (2.2) ebenfalls den Konvergenzradius R .

Wir erhalten also mit (2.1) für $|z|, |z_0| \leq r < R$

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \right) |z - z_0|. \quad (2.3)$$

FAZIT: *Potenzreihen sind in ihrem Konvergenzkreis lokal LIPSCHITZ-stetig.*

2. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[p]{x}$. Dann ist f stetig. Für $x, y \geq 0$ gilt zunächst

$$x - y = (\sqrt[p]{x})^p - (\sqrt[p]{y})^p = \left(\sum_{j=0}^{p-1} (\sqrt[p]{x})^j (\sqrt[p]{y})^{p-1-j} \right) (\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y}),$$

also insbesondere

$$|x - y| \geq (\sqrt[p]{x} + \sqrt[p]{y}) |\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y}|.$$

Hieraus folgt sofort, dass f auf $(0, \infty)$ lokal LIPSCHITZ-stetig ist.

Zum Beweis der Stetigkeit in 0 sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Man wähle $\delta := \varepsilon^p$. Dann gilt für $0 < x < \delta$

$$|f(x) - f(0)| = \sqrt[p]{x} < \varepsilon.$$

Allerdings ist f in keiner Umgebung der 0 LIPSCHITZ-stetig: angenommen, es wäre $|\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y}| \leq L|x - y|$ für $0 \leq x, y < \varepsilon$. Dann hätten wir für $0 < x < y \leq \left(\frac{1}{pL}\right)^{p/(p-1)}$

$$|\sqrt[p]{x} - \sqrt[p]{y}| = \frac{|x - y|}{\sum_{j=0}^{p-1} \sqrt[p]{x}^j \sqrt[p]{y}^{p-1-j}} \geq \frac{|x - y|}{p(\sqrt[p]{y})^{p-1}} \geq L|x - y|,$$

Widerspruch!

Man kann sogar zeigen, dass es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, die in keiner einzigen offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ LIPSCHITZ-stetig ist.

Es folgen noch weitere äquivalente Formulierungen der Stetigkeit:

SATZ 2.9. *Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen den metrischen Räumen X, Y sind äquivalent:*

- (1) f ist stetig.
- (2) Für jede offene Menge $U \subset Y$ ist auch $f^{-1}(U)$ offen in X .
- (3) Für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ ist auch $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X .

(4) Für jede Teilmenge $A \subset X$ gilt

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

(5) Für jede Teilmenge $B \subset Y$ gilt

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

2.1. Stetigkeitskriterien.

SATZ 2.10. Seien X, Y, Z metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. f sei stetig in a und g sei stetig in $f(a)$. Dann ist $g \circ f$ stetig in a .

SATZ 2.11. Die folgenden Abbildungen sind stetig:

$$\text{add} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto z + w,$$

$$\text{mul} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto zw,$$

$$\text{quot} : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto \frac{z}{w}.$$

FOLGERUNG 2.12. Seien X ein metrischer Raum und $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann sind auch $f + g, f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{C}$ und $f/g : \{x \in X \mid g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

BEISPIEL 2.13. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ stetig. Dann ist auch \sqrt{f} stetig.

3. Der Zwischenwertsatz

Dieser lautet:

SATZ 3.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem Wert c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $\gamma \in [a, b]$ mit $f(\gamma) = c$.

Wir diskutieren zwei Anwendungen.

BEISPIELE 3.2.

1. Sei $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$ ein normiertes reelles Polynom ungeraden Grades; d.h. n ist ungerade und $a_n = 1$. Dann ist

$$p(x) = x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Sei nun $x_0 > 0$ so groß, dass $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{|a_j|}{x_0^{n-j}} < \frac{1}{2}$. Dann folgt

$$p(x) \begin{cases} \geq \frac{1}{2}x^n, & x \geq x_0, \\ \leq -\frac{1}{2}|x|^n, & x \leq -x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Insbesondere ist $p(x_0) > 0$ und $p(-x_0) < 0$. Nach dem ZWS gibt es ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $p(\xi) = 0$.

2. Wir beweisen nochmals die Existenz der p -ten Wurzel; sei $a > 0, p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ und betrachte die stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := x^p - a.$$

Es ist $f(0) = -a < 0$ und für $x > \max(1, a)$ ist $f(x) > 0$, also gibt es ein $\xi > 0$ mit $f(\xi) = 0$.

4. Kompaktheit

Zur Motivation betrachten wir die Funktionen

$$f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

und

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2.$$

Es gilt in beiden Fällen

$$\sup\{f(x) \mid x \in (0, 1)\} = \sup\{g(x) \mid x \in [0, 1]\} = 1.$$

Allerdings nimmt f ihr Maximum nicht an, während $g(1) = 1 = \max\{g(x) \mid x \in [0, 1]\}$.

Wann können wir schließen, dass eine stetige reellwertige Funktion ihr Maximum annimmt?

DEFINITION 4.1. Ein metrischer Raum X heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

SATZ 4.2. Sei X folgenkompakt und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in X$ so, dass

$$f(x_{\max}) = \max\{f(x) \mid x \in X\},$$

und

$$f(x_{\min}) = \min\{f(x) \mid x \in X\}.$$

Es bleibt natürlich zu analysieren, welche Mengen folgenkompakt sind!

SATZ 4.3. Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ folgenkompakt. Dann ist A beschränkt und abgeschlossen.

WARNUNG 4.4. Die Umkehrung von Satz 4.3 ist im allgemeinen falsch.

SATZ 4.5. Sei X folgenkompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist auch A folgenkompakt.

SATZ 4.6 (HEINE-BOREL). Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann folgenkompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

DEFINITION 4.7. Ein metrischer Raum X heißt (überdeckungs-)kompakt, falls folgendes gilt: Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X , so gibt es eine *endliche* Teilmenge $J \subset I$ so, dass $X \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.

Dabei heißt $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von X , falls

- $\forall_i U_i \subset X$ offen,
- $\bigcup_{i \in I} U_i \supset X$.

SATZ 4.8. Ein metrischer Raum X ist genau dann folgenkompakt, wenn er überdeckungskompakt ist.

Wir reden daher im Folgenden nur noch von kompakten Räumen.

LEMMA 4.9 (LEBESGUESCHES LEMMA). Sei X folgenkompakt und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Dann gibt es ein $r > 0$ so, dass es zu jedem $x \in X$ einen Index $i_x \in I$ gibt mit $B(x, r) \subset U_{i_x}$.

SATZ 4.10. *Seien X, Y metrische Räume, X sei kompakt und $f : X \rightarrow Y$ sei stetig. Dann ist auch $f(X)$ kompakt.*

SATZ 4.11. *Seien X, Y wie zuvor. $f : X \rightarrow Y$ sei stetig und bijektiv. Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig.*

5. Der Fundamentalsatz der Algebra

SATZ 5.1. *Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ ein komplexes Polynom von Grad n . Dann besitzt p mindestens eine komplexe Nullstelle.*

BEWEIS. Wir verwenden im Beweis, dass es zu jeder Zahl $w \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}^*$ ein $\xi \in \mathbb{C}$ gibt mit $\xi^p = w$. Dies wird erst später bewiesen werden.

Hilfsaussage 1: $|p|$ nimmt auf \mathbb{C} ein Minimum an.

BEWEIS. Da \mathbb{C} nicht kompakt ist, kann der Satz vom Minimum a priori nicht verwendet werden. Wir schreiben

$$p(z) = a_n z^n \left(1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{a_n} z^{j-n} \right)$$

und wählen R so groß, dass $\sum_{j=0}^{n-1} \left| \frac{a_j}{a_n} \right| R^{j-n} < \frac{1}{2}$. Dann ist für $|z| \geq R$

$$|p(z)| \geq \frac{|a_n|}{2} |z|^n.$$

Insbesondere gibt es ein $R_1 \geq R$ so, dass für $|z| \geq R_1$

$$|p(z)| > |p(0)|. \quad (5.1)$$

Da die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R_1\}$ kompakt ist, gibt es ein $|\xi| \leq R_1$ mit $|p(\xi)| = \min\{|p(z)| \mid |z| \leq R_1\}$. Wegen (5.1) ist ξ das gesuchte Minimum.

Hilfsaussage 2: Es ist $p(\xi) = 0$.

BEWEIS. Wäre $p(\xi) \neq 0$, so schreiben wir

$$\frac{1}{p(\xi)} p(z) = 1 + b(z - \xi)^k + (z - \xi)^{k+1} q(z)$$

mit $q(z) \in \mathbb{C}[z]$, $b \neq 0$ und $k \geq 1$. Insbesondere ist für $|z - \xi| \leq 1$

$$|(z - \xi)^{k+1} q(z)| \leq C |z - \xi|^{k+1}$$

mit geeignetem C . Wähle nun ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^k = -b^{-1}$. Dann ist für $\lambda \in (0, 1)$

$$\frac{1}{p(\xi)} p(\xi + \lambda\alpha) = 1 - \lambda^k + \varphi(\lambda)$$

mit $|\varphi(\lambda)| \leq C \lambda^{k+1}$. Dann folgt für $0 < \lambda < \min\{1, \frac{1}{2C}\}$

$$\left| \frac{1}{p(\xi)} p(\xi + \lambda\alpha) \right| \leq 1 - \lambda^k + C \lambda^k \frac{1}{2C} = 1 - \frac{\lambda^k}{2} < 1,$$

im Widerspruch zur Minimalität von ξ . □

FOLGERUNG 5.2. Sei $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $n = \deg p$. Dann gibt es $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (nicht notwendig verschieden!) so, dass

$$p(z) = \lambda \prod_{j=1}^n (z - z_j).$$

6. Gleichmäßige Stetigkeit

Wir betrachten nochmals die auf \mathbb{R}_+ bekanntermaßen stetige Wurzelfunktion

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad f(x) := \sqrt{x}.$$

In den Übungen hatten wir gesehen, dass f nicht lokal LIPSCHITZ-stetig ist. Wir analysieren nun, wie das δ in der $\varepsilon - \delta$ -Charakterisierung der Stetigkeit zu wählen ist. Sei zunächst $x_0 > 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wählt man $\delta = \varepsilon^2/4$ so folgt einerseits für $x_0 \geq \varepsilon^2/16$ und $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} < \frac{\varepsilon^2/4}{\varepsilon/4} = \varepsilon;$$

andererseits ist für $x_0 < \varepsilon^2/16$ und $|x - x_0| < \delta$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \sqrt{x} + \sqrt{x_0} < \left(\frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}\right)\varepsilon < \varepsilon.$$

Die Funktion f ist *gleichmäßig* stetig in dem Sinne, dass $\delta = \varepsilon^2/4$ *unabhängig* von x_0 gewählt werden kann.

DEFINITION 6.1. Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in X : d(x, x') \leq \delta \Rightarrow d(f(x), f(x')) \leq \varepsilon.$$

BEISPIEL 6.2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^2$, ist nicht gleichmäßig stetig. Wäre sie es, so gäbe es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ so, dass $|x^2 - y^2| \leq 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq \delta$. Wähle nun $x = \frac{2}{\delta}$ und $y = \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Dann ist sicherlich $|y - x| = \frac{\delta}{2} < \delta$; andererseits ist $y^2 - x^2 = 2 + \frac{\delta^2}{4} > \varepsilon$. Widerspruch!

SATZ 6.3. Sei X kompakt und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

7. Normen

Wiederum bezeichne im Folgenden $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} .

DEFINITION 7.1. Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt eine *Norm* auf V , falls gilt:

- (1) $\|x\| \geq 0$ mit Gleichheit genau für $x = 0$,
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}, x \in V$,
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$.

BEISPIELE 7.2. Auf den \mathbb{K}^n sind Normen definiert durch

$$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|, \quad (\text{Summen- oder 1-Norm})$$

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{Quadratsummen- oder 2-Norm})$$

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_j| \mid j = 1, \dots, n\}, \quad (\text{Max- oder } \infty\text{-Norm}).$$

Eine Norm auf V induziert eine Metrik:

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Man überzeugt sich unmittelbar, dass d in der Tat die Axiome einer Metrik erfüllt.

DEFINITION 7.3. Zwei Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ auf V heißen äquivalent, falls es ein $c > 0$ so gibt, dass für alle $x \in V$ gilt

$$\frac{1}{c} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c \|x\|_1.$$

NOTIZ 7.4. Äquivalenz von Normen ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation.

SATZ 7.5. Auf \mathbb{R}^n bzw. \mathbb{C}^n sind alle Normen äquivalent.

BEISPIEL 7.6. Wir fixieren einen metrischen Raum X und einen normierten Vektorraum V (z.B: $V = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$). Dann setzen wir

$$C(X, V) := \{f : X \rightarrow V \mid f \text{ stetig}\},$$

$$C_b(X, V) := \{f \in C(X, V) \mid \sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty\}.$$

$C(X, V)$ ist der Raum der stetigen V -wertigen Funktionen auf X , $C_b(X, V)$ ist der Raum der stetigen und beschränkten V -wertigen Funktionen auf X . $C(X, V)$ bzw. $C_b(X, V)$ wird mittels der punktweise erklärten Addition und skalaren Multiplikation zu einem Vektorraum.

Für $f \in C_b(X, V)$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_V \mid x \in X\}.$$

$\|\cdot\|_\infty$ ist tatsächlich eine Norm auf $C_b(X, V)$.

Wir hatten diverse Stetigkeitsbegriffe und deren Abhängigkeiten (stetig, gleichmäßig stetig, LIPSCHITZ-stetig, etc.) untereinander diskutiert. Für eine sehr wichtige Klasse von Abbildungen, die linearen Abbildungen, liegt die beste aller Welten vor:

SATZ 7.7. Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und V, W normierte Vektorräume über \mathbb{K} . Für eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ sind äquivalent:

- (1) f ist stetig in 0,
- (2) f ist stetig,
- (3) Es gibt ein $L > 0$ so, dass $\|f(x)\|_W \leq L \|x\|_V$ für alle $x \in V$,
- (4) f ist LIPSCHITZ-stetig.

Wir betrachten nun eine stetige lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$. Dann heißt

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\|_W \mid \|x\|_V = 1\} \quad (7.1)$$

die Norm der linearen Abbildung f . Wegen Satz 7.7 (3) ist $\|f\|$ in der Tat wohldefiniert. Es gilt dann für alle $x \in V \setminus \{0\}$

$$\|f(x)\| = \|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\| \|x\| \leq \|f\| \|x\|. \quad (7.2)$$

Die Ungleichung $\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\|$ gilt nun aber für alle $x \in V$ (für die 0 ist sie offensichtlich richtig).

DEFINITION 7.8. Wir setzen $\mathcal{L}(V, W) := \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ ist stetig und linear}\}$. Man überzeugt sich unmittelbar, dass $\mathcal{L}(V, W)$ ein Unterraum des Vektorraums aller linearen Abbildungen von V und W ist. Damit ist $\mathcal{L}(V, W)$ selbst ein Vektorraum.

SATZ 7.9. Die in (7.1) definierte Abbildungsnorm ist tatsächlich eine Norm auf $\mathcal{L}(V, W)$. Weiterhin gilt für $g \in \mathcal{L}(W, U)$, $f \in \mathcal{L}(V, W)$:

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$$

7.1. Matrixnormen. Es seien nun $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$; desweiteren seien Normen $\|\cdot\|$ auf V, W fest gewählt. Eine $m \times n$ -Matrix $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ induziert in natürlicher Weise eine lineare Abbildung, der Einfachheit halber ebenfalls mit A bezeichnet, von V nach W durch

$$x \mapsto A \cdot x, \quad (\text{Matrixmultiplikation}).$$

Eine mit den fest gewählten Normen auf $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ verträgliche *Matrixnorm* ist eine Norm $\|\cdot\|$ auf $M(m \times n, \mathbb{K})$, so dass

- $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$, $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$,
- $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ für alle $A, B \in M(m \times n, \mathbb{K})$.

Eine Matrixnorm ist also stets größer gleich der Abbildungsnorm. Der Hintergrund dieser Begriffsbildung ist, dass Abbildungsnormen i.A. schwer zu berechnen sind. Daher hätte man gerne gut berechenbare Matrixnormen.

BEISPIELE 7.10. Sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$

1. *Euklidische Norm:* Anwendung der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung zeigt, dass durch

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

eine mit der euklidischen Norm verträgliche Matrixnorm gegeben ist.

2. *Max-Norm:* Die Zeilensummennorm

$$\|A\|_{zS} := \max_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

ist verträglich mit den ∞ -Normen auf $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$.

3. *1-Norm*: Die *Spaltensummennorm*

$$\|A\|_{SS} := \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

ist verträglich mit den 1-Normen auf $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$.

Die Exponentialfunktion

1. Die Funktion exp

Wir hatten bereits gesehen, dass

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ ist. Folglich ist

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion.

SATZ 1.1 (Funktionalgleichung). *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w).$$

Wir hatten auch bereits gesehen, dass $e = \exp(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$. Allgemeiner untersuchen wir nun für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \left| \exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &= \left| \exp\left(\frac{z}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \\ &= \left| \exp\left(\frac{z}{n}\right) - \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right| \underbrace{\left| \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(\frac{z}{n}\right)^j \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{n-1-j} \right|}_{\Sigma}. \end{aligned}$$

Aus

$$\left| \exp\left(\frac{z}{n}\right) \right| \leq \exp\left(\frac{|z|}{n}\right)$$

und

$$\left| 1 + \frac{z}{n} \right| \leq 1 + \frac{|z|}{n} \leq \exp\left(\frac{|z|}{n}\right)$$

folgt

$$\left| \Sigma \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(\frac{|z|}{n}\right)^{n-1} \leq n \cdot \exp(|z|);$$

also

$$\begin{aligned} \left| \exp(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &\leq n \exp(|z|) \left| \frac{\exp\left(\frac{z}{n}\right) - 1}{z/n} - 1 \right| \cdot \left| \frac{z}{n} \right| \\ &= |z| \exp(|z|) \left| \frac{\exp\left(\frac{z}{n}\right) - 1}{z/n} - 1 \right|. \end{aligned}$$

SATZ 1.2.

1. Es gilt für $|z| \leq 1 + \frac{N}{2}$

$$\left| \exp(z) - \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{n!} \right| \leq 2 \frac{|z|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

2. $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1.$

3. Für jede Folge $(z_n) \subset \mathbb{C}$ mit $\lim z_n = z$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(z).$$

Insbesondere gilt $\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$

SATZ 1.3 (Charakterisierung von \exp). Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit

$$(1) \quad \forall_{z,w \in \mathbb{C}} f(z+w) = f(z)f(w)$$

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)-1}{z} = c.$$

Dann gilt $f(z) = \exp(cz).$

SATZ 1.4. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x+y) = f(x)f(y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $p/q \in \mathbb{Q} : f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{p/q}.$

Insbesondere ist also für $r \in \mathbb{Q}$

$$\exp(r) = e^r.$$

DEFINITION 1.5. Für $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir $e^z := \exp(z).$

1.1. Die \exp -Funktion für reelle Argumente.

SATZ 1.6. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $e^x \in \mathbb{R}$ und > 0 . Weiterhin ist $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ streng monoton wachsend und bijektiv.

SATZ 1.7. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} &= \infty. \end{aligned}$$

M.a.W.: Die Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenz von x .

SATZ 1.8. e ist irrational.

2. Der Logarithmus

SATZ 2.1 (Hauptsatz über monotone Funktionen). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Dann ist $f(I) =: J$ ein Intervall. Weiterhin ist $f : I \rightarrow J$ bijektiv und die Umkehrabbildung $g := f^{-1} : J \rightarrow I$ ist ebenfalls streng monoton und stetig.

SATZ UND DEFINITION 2.2. Die nach Satz 2.1 eindeutig bestimmte Umkehrabbildung von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ heißt (natürlicher) Logarithmus \log . $\log : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig.

WARNUNG 2.3. Beachte, dass $\log(x)$ nur für $x > 0$ definiert ist. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist keineswegs bijektiv (s. auch Satz 3.5 unten).

SATZ 2.4. Für $x, y > 0$ gilt $\log(xy) = \log x + \log y$.

SATZ 2.5. Sei $a > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$. Dann ist $a^r = \exp(r \log a)$.

SATZ UND DEFINITION 2.6. Für $a > 0$ besitzt die Abbildung

$$\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$$

genau eine stetige Fortsetzung zu einer Funktion auf \mathbb{R} . Diese stetige Fortsetzung ist gegeben durch $x \mapsto \exp(x \log a)$. Wir schreiben daher für $a \in \mathbb{R}_+^*$ und $z \in \mathbb{C}$

$$a^z := \exp(z \log a).$$

Die Abbildung

$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, (a, z) \longmapsto a^z$$

ist stetig.

SATZ 2.7. Es gilt für $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ und $z, w \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a^z b^z &= (ab)^z, \\ (a^x)^z &= a^{xz}, \\ a^z a^w &= a^{z+w}, \\ \log a^x &= x \log a. \end{aligned}$$

SATZ 2.8.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \log x = -\infty$.
2. Für $\alpha > 0$ gilt: $\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$,
3. Für $\alpha > 0$ gilt: $\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \log x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} \log x = 0$.

3. Die trigonometrischen Funktionen

Wir untersuchen in diesem Abschnitt die Funktion e^{ix} für reelles x . Zunächst sieht man sofort, dass für $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{\exp(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z}) \quad (3.1)$$

und folglich ist für $x \in \mathbb{R}$

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} e^{\overline{ix}} = e^{ix} e^{-ix} = e^0 = 1, \quad (3.2)$$

d.h. e^{ix} ist für reelles x eine komplexe Zahl vom Betrag 1.

DEFINITION 3.1. Wir setzen für $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \cos(z) &:= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin(z) &:= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}). \end{aligned}$$

Man beachte, dass für $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}), \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix});$$

für allgemeines $z \in \mathbb{C}$ gelten diese Formeln jedoch nicht!

SATZ 3.2. $\sin, \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetig. Weiterhin gilt für $z, w \in \mathbb{C}$

(1) $\cos(z) = \cos(-z), \sin(z) = -\sin(-z)$, d.h. \cos ist eine **gerade** Funktion und \sin ist eine **ungerade** Funktion.

(2) $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1.$

(3)

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w), \\ \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w), \end{aligned} \quad (\text{Additionstheoreme})$$

(4)

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}; \end{aligned}$$

diese Reihen haben Konvergenzradius ∞ .

3.1. Die Zahl π . Wegen Satz 3.2 (4) sind die \sin, \cos -Reihen für $0 < x < 1$ alternierend. Also liefert das Leibnizkriterium für alternierende Reihen für $0 < x < 1$

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x, \quad (3.3)$$

und

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1. \quad (3.4)$$

Insbesondere ist

$$\sin \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und

$$\sin \frac{4}{5} > \frac{4}{5} - \frac{(4/5)^3}{6} > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt die Gleichung

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

daher eine Lösung im Intervall $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4}{5})$. Wir setzen

DEFINITION 3.3. $\frac{\pi}{4} := \inf \{x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \mid \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\}.$

Da \sin stetig ist, gilt auch $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ebenso ist wegen (3.4)

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{1 - \sin^2 \pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es ist

$$2.82 < \pi < 3.2.$$

$\frac{\pi}{4}$ ist in der Tat die einzige Lösung der Gleichung $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, denn es gilt

SATZ 3.4. \sin ist streng monoton wachsend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

SATZ 3.5.

1. Man hat die folgenden speziellen Funktionswerte

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	1
e^{ix}	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$	i	-1	$-i$	1

2. \exp ist periodisch mit Periode $2\pi i$; \sin, \cos sind periodisch mit Periode 2π . Es gilt weiter

$$\sin(z + \pi/2) = \cos(z), \quad \cos(z + \pi/2) = -\sin(z).$$

SATZ 3.6.

1. Zu $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gibt es genau ein $x \in [0, 2\pi)$ mit $e^{ix} = z$.

2. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt genau dann $e^z = e^w$, wenn $\frac{z-w}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$.

BEMERKUNG 3.7. 1. bedeutet, dass es zu zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$ genau ein $x \in [0, 2\pi)$ gibt, so dass $\cos x = a$ und $\sin x = b$.

FOLGERUNG 3.8.

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid \sin(z) = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. $\{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) = 0\} = \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3.2. Die Polarzerlegung.

SATZ 3.9. Jede komplexe Zahl z besitzt eine Darstellung

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Ist $z \neq 0$, so ist φ bis auf Addition von $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$, eindeutig bestimmt.

Man nennt $\varphi \pmod{2\pi i}$ das Argument von z .

Satz 3.9 erlaubt eine geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen. Sind nämlich $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|e^{i\psi}$ gegeben, so folgt

$$zw = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)},$$

d.h. man multipliziert komplexe Zahlen indem man die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Wir können nun den Beweis der Existenz der n -ten Wurzeln – dies wurde beim Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra vorausgesetzt – nachholen:

SATZ 3.10. Für $w = |w|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}^*$ besitzt die Gleichung

$$z^n = w$$

genau die Lösungen

$$z_j := \sqrt[n]{|w|} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{j2\pi}{n})}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dabei bezeichnet $\sqrt[n]{}$ die eindeutige positive n -te Wurzel einer positiven reellen Zahl.

Insbesondere sind die Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1$$

gegeben durch

$$\zeta_j = e^{i\frac{2\pi j}{n}}; \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned} (z_j)^n &= |w| e^{in(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi j}{n})} \\ &= |w| e^{i\varphi} e^{i2\pi j} = z. \end{aligned}$$

Ist

$$z_j = z_k$$

so folgt

$$1 = \frac{z_j}{z_k} = e^{i\frac{j-k}{n}2\pi},$$

also nach Satz 3.6 $\frac{j-k}{n} \in \mathbb{Z}$ und da $j, k \in \{0, \dots, n-1\}$, muss $j - k = 0$ sein. \square

4. Tangens und Arcusfunktionen

DEFINITION 4.1. $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

SATZ 4.2. \tan hat die Fundamentalperiode π , d.h. $\tan(z) = \tan(w)$ genau dann, wenn $\frac{z-w}{\pi} \in \mathbb{Z}$.

SATZ 4.3.

1. \sin bildet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion heißt (Hauptzweig des) Arcussinus (\arcsin).
2. \cos bildet $[0, \pi]$ streng monoton fallend auf $[-1, 1]$ ab. Die Umkehrfunktion heißt (Hauptzweig des) Arcuscosinus.

SATZ 4.4. \tan bildet das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R} ab. Die Umkehrfunktion heißt \arctan (Arcustangens).

KAPITEL IX

Differentialrechnung

1. Die Ableitung

Approximation ist eines der zentralen Motive der Analysis und auch die Differentiation läßt sich mittels des Approximationsgedankens (aber nicht nur mit diesem) motivieren. Besonders einfache Abbildungen sind ohne Zweifel die *affin-linearen* Abbildungen. Eine Abbildung

$$T: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$$

heißt dabei *affin-linear*, falls es eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^q$ so gibt, dass

$$T(x) = Ax + b.$$

Wir dürfen uns dabei A als $q \times p$ -Matrix vorstellen; dann ist Ax das Matrizenprodukt zwischen A und der $p \times 1$ -Matrix x .

Seien nun $X \subset \mathbb{R}^p, Y \subset \mathbb{R}^q$ offen und

$$f: X \longrightarrow Y$$

eine beliebige Abbildung. Wir fragen uns nun, ob wir zu f eine bestapproximierende *affin-lineare* Abbildung finden können. Dazu ist zunächst der Begriff „bestapproximierend“ zu klären. Global mag dies nicht sinnvoll zu klären sein (f kann sehr „wild“ aussehen); wohl ist dies aber lokal möglich: Wir betrachten ein festes $a \in X$. Die gesuchte bestapproximierende *affin-lineare* Abbildung T an f im Punkt a sollte sicherlich

$$T(a) = f(a)$$

erfüllen. Dann hat T die Gestalt

$$T(x) = A(x - a) + f(a)$$

mit $A \in M(p \times q, \mathbb{R})$. Wie ist der Parameter A zu wählen? Die Forderung ist, dass die Differenz

$$f(x) - T(x)$$

von höherer als 1. Ordnung in a verschwindet. Geometrisch bedeutet dies (für $p = q = 1$), dass T die Tangente an den Graph von f parametrisiert.

DEFINITION 1.1. Seien $X \subset \mathbb{R}^p, Y \subset \mathbb{R}^q$ offen und

$$f: X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung. f heißt *differenzierbar* in $a \in X$, falls es eine lineare Abbildung $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ so gibt, dass für $x \in X$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{1}{\|x - a\|} (f(x) - f(a) - Df(a)(x - a)) = 0.$$

f heißt *differenzierbar*, falls f in jedem Punkt $x \in X$ differenzierbar ist.

BEMERKUNGEN 1.2.

1. Alternativ schreibt man

$$f(x) =: f(a) + Df(a)(x - a) + R(x)\|x - a\|. \quad (1.1)$$

Dann ist die Differenzierbarkeit im Punkte a äquivalent zu $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = 0$.

2. Ist $p = q = 1$, so ist f genau dann differenzierbar in a , wenn

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =: f'(a)$$

existiert.

3. Sei f differenzierbar in a . Wir schreiben f in der Form (1.1). Wegen $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = 0$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass $\|R(x)\| \leq \varepsilon$ für alle $x \in B(a, \delta)$. Dann ist für $x \in B(a, \delta)$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\leq \|Df(a)(x - a)\| + \|R(x)\| \|x - a\| \\ &\leq (\varepsilon + \|Df(a)\|) \|x - a\|. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Ist $Df(a)$ sogar invertierbar, so gilt zunächst für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\|\xi\| = \|Df(a)^{-1} Df(a)\xi\| \leq \|Df(a)^{-1}\| \|Df(a)\xi\|,$$

also

$$\|Df(a)\xi\| \geq \|Df(a)^{-1}\|^{-1} \|\xi\|. \quad (1.3)$$

Die Dreiecksungleichung nach unten liefert nun für $x \in B(a, \delta)$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a)\| &\geq \|Df(a)(x - a)\| - \|R(x)\| \|x - a\| \\ &\geq (\|Df(a)^{-1}\|^{-1} - \varepsilon) \|x - a\|. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Als Fazit halten wir fest: ist f differenzierbar in a , so gilt in einer Umgebung von a

$$\|f(x) - f(a)\| \leq L \|x - a\|. \quad (1.5)$$

mit geeignetem $L > 0$.

Ist sogar $Df(a)$ invertierbar, so gilt in einer Umgebung von a

$$L_1 \|x - a\| \leq \|f(x) - f(a)\| \leq L_2 \|x - a\|. \quad (1.6)$$

mit geeigneten $L_1, L_2 > 0$.

Die Ungleichungen (1.2), (1.4) liefern Abschätzungen für L, L_1, L_2 .

4. Wir unterscheiden zwischen der linearen Abbildung $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ und ihrer Matrix. Die Matrix von $Df(a)$ bzgl. der kanonischen Basen von \mathbb{R}^p und \mathbb{R}^q bezeichnen wir mit $f'(a)$, d.h.

$$f'(a) = (f'(a)_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} \text{ mit } (f'(a)_{ij})_{1 \leq i \leq q} = Df(a)e_j,$$

d.h. die j -te Spalte von $f'(a)$ entsteht durch Anwendung von $Df(a)$ auf den j -ten kanonischen Basisvektor.

Ist $p = q = 1$, so unterscheiden wir nicht zwischen Zahlen und 1×1 -Matrizen.

Dann ist die Zahl $f'(a)$ gegeben durch

$$f'(a) = Df(a)\mathbf{1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h) - f(a)).$$

Im Folgenden seien stets $X \subset \mathbb{R}^p, Y \subset \mathbb{R}^q$ offen.

SATZ 1.3. Sei $f: X \rightarrow Y$ differenzierbar in a .

- (1) $Df(a)$ ist eindeutig bestimmt.
- (2) f ist stetig in a .

BEISPIELE 1.4. Die folgenden Abbildungen sind differenzierbar:

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f(y) - f(x) = y^n - x^n = \sum_{j=0}^{n-1} y^j x^{n-1-j} (y - x),$$

$$\text{also } \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = nx^{n-1}.$$

- (2) $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

$$\frac{e^y - e^x}{y - x} = e^x \frac{e^{y-x} - 1}{y - x} \xrightarrow{y \rightarrow x} e^x, \text{ da } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1,$$

$$\text{also gilt: } \exp' = \exp.$$

- (3) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}}{y - x} = \frac{\frac{x-y}{xy}}{y-x} = -\frac{1}{xy} \xrightarrow{y \rightarrow x} -\frac{1}{x^2},$$

$$\text{d.h. } \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = -\frac{1}{x^2}.$$

- (4) Als weiteres mehrdimensionales Beispiel betrachten wir $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{R})$ und setzen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) &= \langle x, Ax \rangle = x^t Ax \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

Für festes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist nun

$$\begin{aligned} f(x_0 + \xi) &= \langle x_0 + \xi, A(x_0 + \xi) \rangle \\ &= \langle x_0, Ax_0 \rangle + \langle \xi, Ax_0 \rangle + \langle x_0, A\xi \rangle + \langle \xi, A\xi \rangle \\ &= f(x_0) + \langle (A + A^t)x_0, \xi \rangle + \langle \xi, A\xi \rangle. \end{aligned}$$

Nun ist

$$|\langle \xi, A\xi \rangle| \leq \|\xi\| \|A\xi\| \leq \|A\| \|\xi\|^2$$

also

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} |\langle \xi, A\xi \rangle| / \|\xi\| = 0.$$

Folglich ist f differenzierbar mit

$$Df(x_0)(\xi) = \langle (A + A^t)x_0, \xi \rangle.$$

- (5) Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ eine lineare Abbildung. Dann ist

$$f(x) - f(x_0) = f(x - x_0),$$

d.h. f ist differenzierbar und $Df(x) = f$ für alle $x \in \mathbb{R}^p$.

(6) Differentiation komplexwertiger Abbildungen.

\mathbb{C} ist bekanntlich ein 2-dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Insofern bedarf die **reelle** Differentiation von Abbildungen $f: \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^q$ keiner besonderen Diskussion. Man beachte aber, dass die Ableitung $Df(x)$ stets eine **\mathbb{R} -lineare** Abbildung von \mathbb{C}^p nach \mathbb{C}^q ist. Abbildungen, deren Ableitungen sogar **\mathbb{C} -linear** sind, haben ganz besondere Eigenschaften. Sie werden näher in der Vorlesung Funktionentheorie studiert.

Dennoch werden wir solchen Abbildungen hin und wieder begegnen. Wir nennen eine Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{C}^q$, $X \subset \mathbb{C}^p$ offen, *komplex differenzierbar*, falls f differenzierbar ist und $Df(x) \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^q)$.

Interessant ist der Spezialfall $p = q = 1$. Eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl. Analog zu Bemerkung 1.2 4. setzen wir daher für eine komplex differenzierbare Abbildung $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f'(a) := Df(a)\mathbf{1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)).$$

Man beachte, dass hier $h \in \mathbb{C}$.

MERKE: Die Ableitung einer Abbildung $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ist eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, i.e. eine $q \times p$ -Matrix. Falls $p = q = 1$ ist die Ableitung eine Zahl (1×1 -Matrix).

SATZ 1.5 (Rechenregeln).

Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in a und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann sind auch $f \pm g$, λf , $f \cdot g$ differenzierbar in a und es gilt

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(a) &= f'(a) \pm g'(a), \\ (\lambda f)'(a) &= \lambda f'(a), \\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ differenzierbar in a und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Man beachte, dass wegen der Stetigkeit von g in a (Satz 1.3) $g(x) \neq 0$ in einer ganzen Umgebung von a .

BEISPIEL 1.6. Für $n \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, liefert die Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

SATZ 1.7 (Kettenregel).

Es seien $X \subset \mathbb{R}^p$, $Y \subset \mathbb{R}^q$, $Z \subset \mathbb{R}^r$ offen und $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ Abbildungen. f sei in $a \in X$ und g in $f(a) \in Y$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f: X \rightarrow Z$ differenzierbar in a und es gilt

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Wir diskutieren Anwendungen der Kettenregel: Zunächst sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ und $f: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^r$ differenzierbar im Punkt Ax_0 . Dann ist $f \circ A$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$D(f \circ A)(x_0) = Df(Ax_0) \circ A.$$

Für eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachte nun

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(x) = e^{\lambda x}.$$

Mit der \mathbb{R} -linearen Abbildung $\varphi_\lambda: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \varphi(z) = \lambda z$ ist $f = \exp \circ \varphi_\lambda$.

Zuerst untersuchen wir die Differenzierbarkeit von \exp :

LEMMA 1.8. $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar und es gilt

$$D \exp(z)\xi = e^z \xi.$$

M.a.W. $D \exp(z)$ ist komplexe Multiplikation mit e^z .

KOROLLAR 1.9. $\sin, \cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind komplex differenzierbar und es gilt $D \sin(z) = \cos(z), D \cos(z) = -\sin(z)$.

DEFINITION 1.10. Seien X, Y metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt ein Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind.

SATZ 1.11. Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus. Weiterhin sei F im Punkt $a \in X$ differenzierbar und $DF(a)$ invertierbar.

Dann ist die Umkehrabbildung F^{-1} differenzierbar in $F(a)$ und es gilt

$$DF^{-1}(F(a)) = (DF(a))^{-1}. \quad (1.7)$$

BEMERKUNGEN 1.12.

1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Nach dem Hauptsatz über monotone Funktionen VIII.2.1 ist $f(I) = J$ ein Intervall und $f: I \rightarrow J$ ein Homöomorphismus. Falls f differenzierbar ist in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$, so liefert Satz 1.11

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

2. Die Formel (1.7) folgt sehr leicht, wenn man schon weiß, dass F^{-1} differenzierbar ist. Die Kettenregel angewandt auf

$$F^{-1} \circ F = id$$

liefert nämlich

$$I = D(F^{-1} \circ F)(a) = DF^{-1}(F(a)) \circ DF(a),$$

also

$$DF^{-1}(F(a)) = (DF(a))^{-1}.$$

Hieraus folgt sofort, dass die Invertierbarkeit von $DF(a)$ eine notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit von F^{-1} in $F(a)$ ist.

Als Anwendung berechnen wir die Ableitungen einiger Umkehrfunktionen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \arcsin(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -\pi/2 < x < \pi/2. \\ \frac{d}{dx} \arctan x &= \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \\ \frac{d}{dx} \log x &= \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{x}, \quad x > 0.\end{aligned}$$

2. Pathologien

2.1. $x \sin \frac{1}{x}$. Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist sicherlich stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wegen $|f(x)| \leq |x|$ ist sie auch stetig in 0. Weiterhin ist für $x \neq 0$

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x},$$

folglich ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar. Allerdings ist f in 0 nicht differenzierbar; setzt man nämlich $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0;$$

andererseits folgt für $x_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2n + \frac{1}{2})\pi = 1.$$

Also existiert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nicht.

2.2. $x^2 \sin \frac{1}{x}$. Wie vorher sieht man, dass

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

auf \mathbb{R}^* stetig differenzierbar ist.

Weiterhin ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

also ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Allerdings ist f' nicht stetig, da $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ nicht existiert.

2.3. Eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion. Es sei

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} - \left| x - [x] - \frac{1}{2} \right|.$$

SATZ 2.1. *Die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} \varphi(4^n x)$$

ist stetig; jedoch ist sie in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

Für einen Beweis siehe [6].

3. Lokale Extrema, Mittelwertsätze, Monotonie

DEFINITION 3.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ein Punkt $a \in U$ heißt *lokales Maximum (Minimum)* von f , falls es ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass

$$f(a) \geq f(x) \quad (\leq f(x))$$

für alle $x \in B(a, \varepsilon)$.

Es stellt sich die Frage, wie lokale Extrema gefunden werden können.

SATZ 3.2. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. f sei differenzierbar im Punkt $a \in U$ und a sei ein lokales Extremum. Dann ist $Df(a) = 0$.*

WARNUNG 3.3. Die Umkehrung von Satz 3.2 ist i.a. falsch. Betrachte etwa $f(x) = x^3$. Dann ist $f'(0) = 0$, aber 0 ist kein lokales Extremum.

Allgemein bezeichnet man für eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, diejenigen Punkte $a \in U$ mit $Df(a) = 0$ als *kritische Punkte*. Die kritischen Punkte sind die potentiellen Extrema. Allerdings bedarf es zur Entscheidung ob und ggf. welche Art von Extremum vorliegt, weiterer Untersuchungen. Dies wird weiter unten näher erörtern werden!

SATZ 3.4 (Mittelwertsatz). *Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b) . Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ so, dass*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Der Spezialfall $f(a) = f(b), g(x) = x$ ist als *Satz von ROLLE* bekannt. Satz 3.4 wird meist als *verallgemeinerter Mittelwertsatz* der Differentialrechnung bezeichnet. Als Mittelwertsatz der Differentialrechnung bezeichnet man oft den Spezialfall $g(x) = x$. Satz 3.4 besitzt auch eine höherdimensionale Verallgemeinerung:

SATZ 3.5 (Mittelwertsatz II). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Seien $a, b \in U$ so, dass die Verbindungsstrecke $[a, b] = \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ganz in U liegt. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = Df(\xi)(b - a).$$

BEMERKUNGEN 3.6.

1. Oft wird nur folgende Konsequenz aus Satz 3.5 benötigt:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{\xi \in U} \|Df(\xi)\| \|b - a\|. \quad (3.1)$$

2. Die Sätze 3.4, 3.5 gelten nicht für vektorwertige Abbildungen. Betrachte etwa

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (\cos x, \sin x)^t$$

Es ist $f(0) = f(2\pi) = (1, 0)^t$, allerdings ist

$$DF(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

stets $\neq 0$. Also kann es kein $\xi \in [0, 2\pi]$ geben mit $f(2\pi) - f(0) = DF(\xi)2\pi$.

Der Mittelwertsatz kann natürlich auf die Komponentenfunktionen angewendet werden: es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(2\pi) - \sin(0) = \sin'(\frac{\pi}{2})(2\pi - 0), \\ 0 &= \cos(2\pi) - \cos(0) = \cos'(\pi)(2\pi - 0). \end{aligned}$$

Hier sehen wir auch den Grund für das Scheitern. Für die erste Komponente kann $\xi_1 = \frac{\pi}{2}$ oder $\frac{3}{2}\pi$, für die zweite Komponente hingegen $\xi_2 = \pi$ gewählt werden. Es kann aber für die beiden Komponenten kein gemeinsames ξ geben.

Allerdings kann (3.1) auf vektorwertige Abbildungen verallgemeinert werden.

SATZ 3.7 (Schrankensatz). *Sei $X \subset \mathbb{R}^p$ offen und $f: X \rightarrow \mathbb{R}^q$ differenzierbar. Seien $a, b \in X$ so, dass $[a, b] \subset X$. Dann gilt*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{\xi \in [a, b]} \|Df(\xi)\| \|b - a\|$$

Wir bringen nun eine wichtige Anwendung des Schrankensatzes.

SATZ 3.8. *Sei $X \subset \mathbb{R}^p$ offen, $f: X \rightarrow \mathbb{R}^q$ sei differenzierbar mit $Df = 0$.*

Dann ist f lokal konstant, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung U von x so, dass $f|_U$ konstant ist.

Ist $x = I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so ist f sogar konstant.

BEMERKUNG 3.9. „lokal konstant“ kann nicht ohne weiteres durch „konstant“ ersetzt werden. Man betrachte etwa $X = (-1, 0) \cup (1, 2) \subset \mathbb{R}$ und

$$f(x) := \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Es ist $f' = 0$, aber f ist nicht konstant. Das Problem hier ist, dass die Menge $X = (-1, 0) \cup (1, 2)$ nicht zusammenhängend ist. Der Begriff des Zusammenhangs wird weiter unten vertieft werden.

3.1. Die Regel von de l'Hospital. Oft steht man vor dem Problem, den Grenzwert eines Bruches zu bestimmen, wobei jedoch Zähler und Nenner gegen 0 oder ∞ streben. Ich erinnere daran, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Die formale Rechnung $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)}{\lim_{x \rightarrow 0} x} = \frac{0}{0} = 1$ ist jedoch nicht stichhaltig, da $\frac{0}{0}$ nicht sinnvoll erklärt werden kann. Ist nämlich $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig, so ist zwar $\lim_{x \rightarrow 0} \lambda x + 3x^2 =$

0 und $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Es ist jedoch

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x + 3x^2}{x} = \lambda.$$

Der folgende Satz gibt uns ein Hilfsmittel zur Hand, um Grenzwerte von Brüchen zu bestimmen.

SATZ 3.10 (Regel von de l'Hospital). *Die Funktionen $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, seien differenzierbar und $g'(x)$ sei stets $\neq 0$. Es sei weiterhin*

$$(A) \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = 0$$

oder

$$(B) \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \pm\infty.$$

Falls $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne existiert, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ein entsprechender Satz gilt für $x \rightarrow a^-$.

BEISPIELE 3.11.

1. Nach Satz VIII.2.8 wissen wir bereits, dass für $\alpha > 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log x = 0$. Dies folgt jedoch auch aus der Regel von de l'Hospital, denn

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx} \log x}{\frac{d}{dx} x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\alpha x^{-\alpha}} = 0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = 0$. Zunächst ist

$$\frac{\frac{d}{dx}(x - \sin x)}{\frac{d}{dx} x \sin x} = \frac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x}$$

und nochmaliges Differenzieren von Zähler und Nenner liefert

$$\frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Die Regel ist hier also zweimal anzuwenden.

3. Die Regel funktioniert nicht bei

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

für $x \rightarrow \infty$; denn es ist stets $f^{(n)}(x) \rightarrow \infty$ und $g^{(n)}(x) \rightarrow \infty$.

Allerdings läßt sich $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ leicht bestimmen:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \longrightarrow 1, x \rightarrow \infty.$$

4. Ein weiteres Nicht-Beispiel ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$, $g(x) = \sin x$, denn

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})}{\cos x}$$

hat keinen Grenzwert für $x \rightarrow 0$.

3.2. Monotonie. Aus dem Mittelwertsatz schließt man leicht, dass eine differenzierbare Funktion mit nichtnegativer Ableitung monoton wachsend ist. Allerdings funktioniert dieses Kriterium schon für die einfache Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2x - 1, & 1 \leq x, \end{cases}$$

nicht unmittelbar. Anstatt sich nun mit stückweise differenzierbaren Funktionen abzugeben, ist es sinnvoller, den Differenzierbarkeitsbegriff leicht zu verallgemeinern:

DEFINITION 3.12. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Die stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *nahezu überall differenzierbar*, falls es eine *abzählbare* Ausnahmemenge $A \subset I$ gibt, so dass f in jedem $x \in I \setminus A$ differenzierbar ist.

Da die Vereinigung zweier abzählbarer Teilmengen wiederum abzählbar ist, ist mit f, g auch $f \pm g, \lambda f$, und falls $g(x)$ stets $\neq 0$ auch $\frac{f}{g}$ nahezu überall differenzierbar.

SATZ 3.13. Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und nahezu überall differenzierbar in (a, b) . Falls $f' \geq 0$ ($> 0, \leq 0, < 0$) nahezu überall, so ist f monoton wachsend (streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend).

FOLGERUNG 3.14. Es sei f wie in Satz 3.13. Es sei $x_0 \in (a, b)$. Es sei

$$\begin{aligned} f' &\leq 0 \quad (f' < 0) \text{ für nahezu alle } x < x_0, \\ f' &\geq 0 \quad (f' > 0) \text{ für nahezu alle } x > x_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dann ist x_0 ein (isoliertes) Minimum von f .

Dieser Satz hat eine offensichtliche Modifikation für den Fall eines Maximums. Ebenso hat der Satz eine offensichtlich lokale Version: gelten die Ungleichungen (3.2) nur in einer Umgebung von x_0 , so erhält man ein lokales Extremum.

FOLGERUNG 3.15 (Verallgemeinerter Schrankensatz). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und nahezu überall differenzierbar. Es sei $m \leq f' \leq M$ n. ü. Dann gilt für $x, y \in I$ mit $x < y$

$$m(y - x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y - x).$$

FOLGERUNG 3.16 (Eindeutigkeitssatz der Differentialrechnung). Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und nahezu überall differenzierbar. Ist $f' = 0$ nahezu überall, so ist f konstant.

4. Konvexität

DEFINITION 4.1. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für $a \leq x < y \leq b$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Gilt die Ungleichung mit “<” statt “≤”, so heißt f streng konvex.

f heißt (streng) konkav, falls $-f$ (streng) konvex ist.

BEISPIELE 4.2.

1. $f(x) = x^2$ ist streng konvex, denn für $x < y$ ist

$$\begin{aligned} (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 &= \lambda^2 x^2 + (1 - \lambda)^2 y^2 + 2\lambda(1 - \lambda)xy \\ &< (\lambda^2 + \lambda(1 - \lambda))x^2 + ((1 - \lambda)^2 + \lambda(1 - \lambda))y^2 \\ &= \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2. \end{aligned}$$

Hier wurde die Ungleichung $2ab < a^2 + b^2$ für $a \neq b$ mit $a = \sqrt{\lambda(1 - \lambda)}x$, $b = \sqrt{\lambda(1 - \lambda)}y$ benutzt.

2. $f(x) = |x|$ ist offenbar ebenfalls streng konvex, allerdings nicht differenzierbar.

SATZ 4.3. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann (streng) konvex, wenn für $x, y, z \in [a, b]$ mit $x < y < z$ gilt:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \quad (\text{resp. } <).$$

Ist f (streng) konvex, so gilt für $x < y < z$ sogar

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \quad (\text{resp. } <).$$

SATZ 4.4. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig. Weiterhin ist f in (a, b) rechts- und linksseitig differenzierbar, d.h. für $x \in (a, b)$ existieren

$$f'_{\pm}(x) = \lim_{y \rightarrow x_{\pm}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Es ist stets $f'_{-}(x) \leq f'_{+}(x)$. f'_{\pm} sind monoton wachsend.

Ist f sogar streng konvex, so sind f'_{\pm} streng monoton wachsend.

Von Satz 4.4 gilt auch die Umkehrung. Wir beweisen jedoch nur eine leicht schwächere Version.

SATZ 4.5. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und differenzierbar in (a, b) . f' sei (streng) monoton wachsend auf (a, b) . Dann ist f (streng) konvex.

f ist insbesondere dann (streng) konvex, wenn f zweimal differenzierbar in (a, b) ist und $f'' \geq 0$ (> 0) ist.

4.1. Einige fundamentale Ungleichungen.

SATZ 4.6 (JENSEN-Ungleichung). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für x_1, \dots, x_n und $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$

$$f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j).$$

Ist f streng konvex, so tritt Gleichheit genau für $x_1 = \dots = x_n$ ein.

SATZ 4.7 (Gewichtete AGM-Ungleichung). Seien x_1, \dots, x_n ; $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$. Dann gilt

$$\prod_{j=1}^n x_j^{\lambda_j} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j.$$

Gleichheit tritt genau für $x_1 = \dots = x_n$ ein.

Für $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ erhalten wir die AGM-Ungleichung.

DEFINITION 4.8. Für $p \geq 1$ erklären wir auf \mathbb{K}^n die p -Norm durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (x_j) \in \mathbb{K}^n.$$

Dass $\|\cdot\|$ tatsächlich eine Norm ist, haben wir bisher nur für $p = 1, 2$ gezeigt. Mittels der gewichteten AGM-Ungleichung gelingt nun der Nachweis für beliebige p .

SATZ 4.9 (HÖLDER-Ungleichung). Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Für $p = q = 2$ erhalten wir die bereits bekannte CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung.

SATZ 4.10 (MINKOWSKISCHE Ungleichung). Für $p \geq 1, x, y \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

d.h. $\|\cdot\|_p$ ist tatsächlich eine Norm.

5. Partielle Ableitungen

Während es für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ganze Reihe von Differenzierbarkeitskriterien gibt, haben wir noch immer kein praktikables Kriterium zur Hand, welches die Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ liefert.

DEFINITION 5.1. Sei $X \subset \mathbb{R}^p$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^q$ gegeben. f heißt im Punkt $a \in X$ *partiell differenzierbar*, falls für jedes $j \in \{1, \dots, p\}$ die Abbildung

$$\varphi(t) := f(a + te_j)$$

in $t = 0$ differenzierbar ist.

Man setzt

$$D_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a + te_j) - f(a)) \in \mathbb{R}^q.$$

M.a.W.: f ist in a genau dann partiell differenzierbar, wenn folgendes gilt: Hält man $p - 1$ Variablen fest, so ist f bzgl. der verbliebenen Variablen differenzierbar.

LEMMA 5.2. $f : X \rightarrow \mathbb{R}^q$ ist genau dann in a partiell differenzierbar, wenn jede Komponente $f_j : X \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, q$, in a partiell differenzierbar ist. Es gilt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i=1, \dots, q}$$

Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}^q$ (total) differenzierbar, so bezeichnet $f'(a)$ die Matrix von $Df(a)$ bzgl. der kanonischen Basen, d.h.

$$Df(a)h = \left(\sum_{j=1}^p f'(a)_{ij} h_j \right)_{i=1, \dots, q}$$

SATZ 5.3. Sei $X \subset \mathbb{R}^p$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^q$ sei differenzierbar in a . Dann ist f partiell differenzierbar und es gilt

$$f'(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}.$$

Die Umkehrung von Satz 5.3 ist leider i.a. falsch (vgl. Übungen). Allerdings haben wir den äußerst wichtigen

SATZ 5.4. Sei $X \subset \mathbb{R}^p$ offen und $f : X \rightarrow \mathbb{R}^q$ partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $D_j f, j = 1, \dots, p$, seien stetig im Punkt a . Dann ist f differenzierbar in a .

Das Baby Integral

Abweichend von den üblichen Lehrbüchern werden wir hier die Integration als Umkehrprozess zur Differentiation einführen. Einen wirklich befriedigenden Integralbegriff liefert jedoch erst die Lebesguesche Theorie.

1. Das bestimmte Integral

SATZ UND DEFINITION 1.1. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *S-integrierbar*, falls es eine nahezu überall differenzierbare Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $F' = f$ n.ü. . Mit $\text{SR}[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller S-integrierbaren Funktionen auf $[a, b]$.

Ist $f \in \text{SR}[a, b]$ und $F' = f$ n.ü., so setzt man

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a).$$

\int_a^b ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl von F .

F bezeichnet man auch als Stammfunktion von f .

BEISPIELE 1.2.

1. Jedes Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ist in $\text{SR}[a, b]$. Es ist

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

2. Sei $a \leq c < d \leq b$. Dann ist

$$1_{[c,d]}(x) = \begin{cases} 1, & c \leq x \leq d, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

S-integrierbar. Eine Stammfunktion ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq c, \\ x - c, & c \leq x \leq d, \\ d - c, & d \leq x \leq b. \end{cases}$$

Folglich ist

$$\int_a^b 1_{[c,d]}(x)dx = F(b) - F(a) = d - c.$$

3. Allgemein ist jede Funktion, zu der wir eine Stammfunktion angeben können, S-integrierbar. Das Auffinden von Stammfunktionen ist jedoch ein sehr schwieriges Problem.

SATZ 1.3 (Rechenregeln).

- (i) $\text{SR}[a, b]$ ist in natürlicher Weise ein \mathbb{C} -Vektorraum und $\int_a^b : \text{SR}[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein lineares Funktional, d.h. für $f, g \in \text{SR}[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\lambda f + g \in \text{SR}[a, b]$ und

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

- (ii) Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ S-integrierbar mit $f \leq g$, so gilt

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g. \quad (\text{Monotonie})$$

SATZ 1.4 (Schrankensatz). Sei $f \in \text{SR}[a, b]$.

- (i) Ist $0 \leq g \in \text{SR}[a, b]$ und $|f| \leq g$, so ist

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b g.$$

- (ii) Für reellwertiges f gilt

$$(\inf f)(b - a) \leq \int_a^b f \leq (\sup f)(b - a).$$

2. Integrationstechnik

SATZ 2.1 (Partielle Integration). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ S-integrierbar mit Stammfunktionen F, G . Ist fG S-integrierbar, so auch Fg und es gilt

$$\int_a^b fG = FG \Big|_a^b - \int_a^b Fg.$$

Da G stetig ist, ist nach Theorem 3.5 unten fG sicher dann S-integrierbar, wenn f absolut S-integrierbar ist.

BEISPIELE 2.2.

1.

$$\int_a^b \log x \, dx = x \log x \Big|_a^b - \int_a^b x \frac{1}{x} dx = (x \log x - x) \Big|_a^b,$$

allgemeiner sei $\alpha \neq -1$

$$\begin{aligned} \int x^\alpha \log x \, dx &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \log x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \log x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}. \end{aligned}$$

2. Wir setzen

$$I_k(x) := \int \sin^k x \, dx, k \in \mathbb{Z}_+$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} I_k(x) &= \int \sin x \sin^{k-1} x \, dx \\ &= -\cos x \sin^{k-1} x + (k-1) \int \cos^2 x \sin^{k-2} x \, dx \\ &= -\cos x \sin^{k-1} x + (k-1) I_{k-2}(x) - (k-1) I_k(x). \end{aligned}$$

Also

$$I_k(x) = -\frac{\cos x \sin^{k-1} x}{k} + \frac{k-1}{k} I_{k-2}(x). \quad (2.1)$$

Setze

$$A_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x \, dx.$$

Dann ist $A_0 = \frac{\pi}{2}$, $A_1 = 1$ und wegen (2.1)

$$A_k = \frac{k-1}{k} A_{k-2}, \quad k \geq 2.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} A_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} A_{2(n-1)} = \dots = \prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j} \frac{\pi}{2}, \\ A_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} A_{2n-1} = \dots = \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1}. \end{aligned}$$

Wegen $\sin^{2n} x \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ist

$$A_{2n+2} \leq A_{2n+1} \leq A_{2n},$$

also

$$\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} \leq \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} \leq 1.$$

Nun ist

$$\frac{A_{2n+2}}{A_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

folglich nach Sandwich-Lemma auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = 1$.

Andererseits haben wir

$$\frac{A_{2n+1}}{A_{2n}} = \frac{2}{\pi} \prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1} \frac{2j}{2j-1} = \frac{2}{\pi} \prod_{j=1}^n \frac{4j^2}{4j^2-1}.$$

Insgesamt haben wir gezeigt:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{4j^2 - 1}{4j^2} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4j^2}\right) \quad (\text{WALLISSches Produkt}).$$

SATZ 2.3 (Substitutionsregel). *Sei $f \in \text{SR}[a, b]$ und $\Phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ streng monoton und n.ü. differenzierbar mit $\Phi(c) = a, \Phi(d) = b$. Dann ist $(f \circ \Phi)\Phi' \in \text{SR}[c, d]$ und es gilt*

$$\int_a^b f = \int_c^d (f \circ \Phi)\Phi'.$$

BEISPIEL 2.4.

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx &= r \int_0^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \, dx, x = ry \\ &= r \int_0^1 \sqrt{1 - y^2} \, r \, dy, y = \sin t \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt. \end{aligned}$$

$\int \cos^2 t \, dt$ kann analog zum Beispiel 1.2 mittels der Produktregel bestimmt werden. Eine andere Möglichkeit ist die folgende:

$$\cos^2 t = \left(\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2it} + e^{-2it} + 2) = \frac{1}{2}(\cos 2t + 1).$$

Damit folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Insgesamt haben wir gezeigt:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} r^2.$$

Will man tatsächlich eine Stammfunktion von $\sqrt{r^2 - x^2}$ bestimmen, so muss man die Substitutionen zurückverfolgen:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{r^2 - x^2} \, dx &= r^2 \int \sqrt{1 - y^2} \, dy, \quad x = ry \\
 &= r^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt, \quad y = \sin t \\
 &= r^2 \int \cos^2 t \, dt \\
 &= r^2 \int \frac{1}{2}(\cos 2t + 1) \, dt \\
 &= \frac{r^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \\
 &= \frac{r^2}{2} (\arcsin y + \sin(\arcsin y) \cos(\arcsin y)) \\
 &= \frac{r^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \right) \\
 &= \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} + \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2}.
 \end{aligned}$$

3. Regelfunktionen

Bisher wissen wir noch nicht einmal, ob stetige Funktionen integrierbar sind. Wir benötigen ein praktikables Kriterium, um festzustellen, ob eine gegebene Funktion integrierbar ist oder nicht.

DEFINITION 3.1. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Treppenfunktion*, falls es Punkte x_0, \dots, x_n mit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gibt, so dass $f \upharpoonright (x_{j-1}, x_j)$ konstant ist, $j = 1, \dots, n$.

Mit $\mathcal{T}[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

SATZ 3.2. $\mathcal{T}[a, b]$ ist ein \mathbb{C} -Vektorraum. Jedes $f \in \mathcal{T}[a, b]$ ist S -integrierbar. Hat $f \in \mathcal{T}[a, b]$ auf (x_{j-1}, x_j) den konstanten Wert c_j , so gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{j=1}^n c_j (x_j - x_{j-1}).$$

DEFINITION 3.3. Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

Auf den beschränkten Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ erklärt $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm, d.h. es gilt für beschränkte Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$

- (i) $\|f\|_\infty \geq 0$ und $= 0$ nur für $f = 0$,
- (ii) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$,
- (iii) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

DEFINITION 3.4. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine *Regelfunktion*, falls es eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - t_n\|_\infty = 0$. Mit $R[a, b]$ bezeichnen wir die Regelfunktionen auf $[a, b]$.

Sind $f_n, f \in \text{SR}[a, b]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, so folgt unmittelbar

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \right| \leq \|f - f_n\|_\infty (b - a) \rightarrow 0,$$

also

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

Man beachte aber, dass $f \in \text{SR}[a, b]$ vorausgesetzt wurde! Es gilt jedoch viel allgemeiner:

THEOREM 3.5. *Es seien $h, |h|, hf_n \in \text{SR}[a, b], n \in \mathbb{N}$. Es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Dann ist $fh \in \text{SR}[a, b]$ und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b hf_n = \int_a^b hf.$$

FOLGERUNG 3.6. *Jede Regelfunktion ist absolut S -integrierbar. Ist $f \in R[a, b]$ und $(t_n) \subset \mathcal{T}[a, b]$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - t_n\|_\infty = 0$, so gilt*

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b t_n.$$

Jede Regelfunktion besitzt also eine Stammfunktion.

Was noch fehlt, ist ein einfaches Kriterium, welches erlaubt, Regelfunktionen als solche zu erkennen.

THEOREM 3.7. *$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn*

- (i) $\forall x \in (a, b)$ $\lim_{y \rightarrow x^+} f(y), \lim_{y \rightarrow y^-} f(y)$ existieren und
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ existieren.

FOLGERUNG 3.8. *Jede stetige und jede monotone Funktion ist eine Regelfunktion.*

4. Ergänzungen

Es folgen die Mittelwertsätze der Integralrechnung. Diese sind im wesentlichen Umformulierungen des Zwischenwertsatzes bzw. Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

SATZ 4.1 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen; f sei stetig, $g \geq 0$ sowie $fg, g \in \text{SR}[a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ so, dass*

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g.$$

SATZ 4.2 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g, f \in \text{SR}[a, b]$, g sei sogar monoton wachsend. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ so, dass*

$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^c f + g(b) \int_c^b f.$$

4.1. Integration rationaler Funktionen. Wir diskutieren zunächst einige spezielle rationale Funktionen. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$

$$\int \frac{dx}{x-c} = \log|x-c|$$

sowie

$$\int (x-c)^p dx = \frac{1}{p+1} (x-c)^{p+1}, p \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Sei nun

$$f(x) = x^2 + ax + b, a, b \in \mathbb{R}$$

ein reelles quadratisches Polynom. Wir diskutieren zwei Fälle:

1. Fall: $4b - a^2 \leq 0$: Dann zerfällt f über \mathbb{R} , d.h.

$$f(x) = (x-\lambda)(x-\mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Falls $\lambda = \mu$, so ist $\int \frac{dx}{f(x)} = -\frac{1}{x-\lambda}$. Ist hingegen $\lambda \neq \mu$, so erhalten wir

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\mu-\lambda} \left(\frac{1}{x-\mu} - \frac{1}{x-\lambda} \right). \quad (4.1)$$

(4.1) ist die sogenannte *Partialbruchzerlegung* von $\frac{1}{f(x)}$. Es folgt nun

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \frac{1}{\mu-\lambda} \log \left| \frac{x-\mu}{x-\lambda} \right|.$$

2. Fall: $4b - a^2 > 0$: Dann besitzt f keine reellen Nullstellen, d.h. $f(x) = (x + \frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4} \geq b - \frac{a^2}{4} > 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Wir setzen $\rho := \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ und finden

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + ax + b} &= \int \frac{dx}{(x + \frac{a}{2})^2 + \rho^2}, y = x + \frac{a}{2} \\ &= \frac{1}{\rho^2} \int \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2}, z = \frac{y}{\rho} \\ &= \frac{1}{\rho} \int \frac{dz}{1 + z^2} \\ &= \frac{1}{\rho} \arctan z \\ &= \frac{1}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \arctan \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \right). \end{aligned}$$

Wie integrieren wir eine beliebige rationale Funktion?

SATZ 4.3 (Partialbruchzerlegung im Komplexen). *Es seien $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$ teilerfremd, $q(z) = \prod_{j=1}^r (z - \lambda_j)^{k_j}$, $\sum_{j=1}^r k_j = \deg q$. Dann gibt es eindeutig bestimmte $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq k_i$, und ein eindeutig bestimmtes $r(z) \in \mathbb{C}[z]$, so dass*

$$\frac{p(z)}{q(z)} = r(z) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{k_i} \frac{a_{ij}}{(z - \lambda_i)^j}.$$

Aufgrund der Partialbruchzerlegung können wir eine rationale Funktion dann integrieren, wenn wir

$$\int \frac{dx}{(x - \lambda)^p}, \quad p \in \mathbb{Z}_+^*, \lambda \in \mathbb{C}$$

berechnen können. Wir hatten zu Beginn bereits gesehen, dass

$$\int \frac{dx}{(x - \lambda)^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} \frac{1}{(x-\lambda)^{p-1}}, & p > 1, \\ \log |x - \lambda|, & p = 1, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Da uns der komplexe Logarithmus nicht zur Verfügung steht, müssen wir den Fall $p = 1, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gesondert behandeln; es ist dann

$$\frac{1}{x - \lambda} = \frac{x - \bar{\lambda}}{|x - \lambda|^2} = \frac{x - \bar{\lambda}}{x^2 + |\lambda|^2 - 2(\operatorname{Re} \lambda)x}.$$

Man beachte, dass das Nennerpolynom wegen $\lambda \notin \mathbb{R}$ keine reelle Nullstelle hat. Allgemein betrachten wir daher für $4b - a^2 > 0$:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + ax + b} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2Ax + Aa + 2B - Aa}{x^2 + ax + b} dx \\ &= \frac{A}{2} \log |x^2 + ax + b| + \int \frac{B - \frac{Aa}{2}}{x^2 + ax + b} dx \\ &= \frac{A}{2} \log |x^2 + ax + b| + \frac{B - \frac{Aa}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \arctan \left(\frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}} \right). \end{aligned}$$

Insbesondere ist also

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x - \lambda} &= \frac{1}{2} \log |x - \lambda|^2 + \frac{-\bar{\lambda} + \operatorname{Re} \lambda}{|\operatorname{Im} \lambda|} \arctan \left(\frac{x - \operatorname{Re} \lambda}{|\operatorname{Im} \lambda|} \right) \\ &= \log |x - \lambda| + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} \lambda) \arctan \left(\frac{x - \operatorname{Re} \lambda}{|\operatorname{Im} \lambda|} \right) \\ &= \log |x - \lambda| + i \arctan \left(\frac{x - \operatorname{Re} \lambda}{\operatorname{Im} \lambda} \right). \end{aligned}$$

4.2. Anwendung: die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}$. Als Anwendung betrachten wir die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}, \quad z \neq -1.$$

Wir schreiben $z = xe^{i\varphi}$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und betrachten zunächst $0 \leq x < 1$:

$$\sum_{j=1}^N \frac{(xe^{i\varphi})^j}{j} = \sum_{j=1}^N e^{ij\varphi} \int_0^x t^{j-1} dt = \int_0^x \sum_{j=1}^N (e^{i\varphi}t)^{j-1} e^{i\varphi} dt = \int_0^x e^{i\varphi} \frac{(e^{i\varphi}t)^N - 1}{e^{i\varphi}t - 1} dt$$

Es ist für $0 \leq t \leq x < 1$

$$\left| e^{i\varphi} \frac{(e^{i\varphi}t)^N}{e^{i\varphi}t - 1} \right| \leq \frac{x^N}{\min\{|e^{i\varphi}t - 1| \mid 0 \leq t \leq x\}},$$

also

$$\left| \int_0^x e^{i\varphi} \frac{(e^{i\varphi}t)^N}{e^{i\varphi}t - 1} dt \right| \leq Cx^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(xe^{i\varphi})^j}{j} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^x e^{i\varphi} \frac{(e^{i\varphi}t)^N - 1}{e^{i\varphi}t - 1} dt = \int_0^x \frac{-e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}t - 1} dt = - \int_0^x \frac{1}{t - e^{-i\varphi}} dt \\ &= -\log |t - e^{-i\varphi}| - i \arctan \left(\frac{t - \cos \varphi}{-\sin \varphi} \right) \Big|_{t=0}^{t=x} \\ &= -\log |x - e^{-i\varphi}| - i \arctan \left(\frac{-x + \cos \varphi}{\sin \varphi} \right) + i \arctan \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) \\ &= -\log |x - e^{-i\varphi}| + i \arctan \frac{\frac{x}{\sin \varphi}}{1 - \frac{-\cos \varphi \cos \varphi - x}{\sin \varphi \sin \varphi}} \\ &= -\log |x - e^{-i\varphi}| + i \arctan \left(\frac{x \sin \varphi}{1 - x \cos \varphi} \right), \end{aligned}$$

wobei das Additionstheorem des Arcustangens $\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}$ benutzt wurde.

Schreibt man wieder $z = xe^{i\varphi}$, so ist also für $|z| < 1$ gezeigt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} = -\log |1 - z| + i \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} z}{1 - \operatorname{Re} z} \right).$$

Die rechte Seite macht Sinn für $\operatorname{Re} z \neq 1$. Wir betrachten daher $|z| = 1$, $z \neq 1$; d.h. $x = 1$, $0 < \varphi < 2\pi$. Dann ist

$$\sum_{j=1}^N \frac{(e^{i\varphi})^j}{j} = \sum_{j=1}^N \left(i \int_{\pi}^{\varphi} e^{ijt} dt + \frac{(-1)^j}{j} \right) = \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^j}{j} + i \underbrace{\int_{\pi}^{\varphi} \sum_{j=1}^N e^{ijt} dt}_{=: f(x)},$$

wobei

$$f(x) = \int_{\pi}^{\varphi} e^{it} \frac{e^{iNt} - 1}{e^{it} - 1} dt.$$

Die Funktion $\frac{e^{it}}{e^{it}-1}$ ist stetig differenzierbar auf $[\pi, \varphi]$ (bzw. $[\varphi, \pi]$). Dann liefert das sog. Riemann-Lebesgue-Lemma

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{\varphi} e^{iNt} \frac{e^{it}}{e^{it}-1} dt = 0.$$

Also folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(e^{i\varphi})^j}{j}$ gegen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(e^{i\varphi})^j}{j} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} + i \int_{\pi}^{\varphi} \frac{-e^{it}}{e^{it}-1} dt, \\ \int_{\pi}^{\varphi} \frac{-e^{it}}{e^{it}-1} dt &= i \int_{\pi}^{\varphi} \frac{dt}{e^{-it}-1} = \int_{\pi}^{\varphi} \frac{ie^{it/2}}{e^{-it/2}-e^{it/2}} dt = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\varphi} \frac{-e^{it/2}}{\sin \frac{t}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{\varphi} \frac{-\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} - i dt = -\log \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi - \varphi}{2} i, \end{aligned}$$

insgesamt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{ij\varphi}}{j} = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}}_{=:C} - \log \sin \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi - \varphi}{2} i.$$

Setzen wir $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ein, so erhalten wir $e^{ij\varphi} = i^j$, also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} - \log \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} i$$

Nun ist $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \frac{\pi}{4}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} &= -\log 2. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{ij\varphi}}{j} = -\log(2 \sin \frac{\varphi}{2}) + \frac{\pi - \varphi}{2} i.$$

Mit $z = e^{i\varphi}$ ist in der Tat

$$|1 - z|^2 = (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = 2 - 2 \cos \varphi = 2(1 - \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}) = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

also wegen $0 < \varphi < 2\pi$

$$\log |1 - z| = \log(2 \sin \frac{\varphi}{2})$$

sowie

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{1 - \operatorname{Re} z}\right) &= \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi}\right) = \arctan\left(\frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}\right) \\ &= \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)\right) = \frac{\pi - \varphi}{2}.\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

SATZ 4.4. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $|z| \leq 1$ gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j} = -\log|1-z| + i \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{1 - \operatorname{Re} z}\right).$$

FOLGERUNG 4.5. Für $-1 \leq x < 1$ gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = -\log(1-x).$$

FOLGERUNG 4.6. Für $|x| \leq 1$ gilt

$$\arctan x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{2j+1}.$$

Es bleibt zu zeigen:

SATZ 4.7 (RIEMANN-LEBESGUE-Lemma). Für jede Regelfunktion $f \in R[a, b]$ gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b e^{i\lambda x} f(x) dx = 0.$$

4.3. Riemann-Summen. Sei $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$, d.h. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Weiterhin sei $\xi = (\xi_j) \in \mathbb{R}^n$ mit $x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j$. Dann definieren wir für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$S(f, Z, \xi) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

die Riemann-Summe von f bzgl. Z und ξ . Weiterhin bezeichne

$$\|Z\| := \max_{j=1}^n |x_j - x_{j-1}|$$

die *Feinheit* der Zerlegung Z .

SATZ 4.8. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Regelfunktion. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass für jede Zerlegung Z mit $\|Z\| < \delta$ und jeden Zwischenvektor ξ gilt

$$\left| \int_a^b f - S(f, Z, \xi) \right| < \varepsilon.$$

M.a.W. ist (Z_j) eine Zerlegungsfolge mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \|Z_j\| = 0$ und (ξ_j) eine passende Folge von Zwischenvektoren, so ist

$$\int_a^b f = \lim_{j \rightarrow \infty} S(f, Z_j, \xi_j).$$

KAPITEL XI

Gleichmäßige Konvergenz

Im vorangegangenen Kapitel hatten wir bereits die Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf den Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eingeführt. Der durch diese Norm induzierte Konvergenzbegriff, die *gleichmäßige* Konvergenz, soll hier ausführlicher studiert werden.

Motiviert ist der Begriff durch folgende Fragestellung: gegeben seien Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Es gelte für jedes feste $x \in [a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Angenommen, wir wissen, dass alle f_n eine bestimmte Eigenschaft haben (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit etc.), überträgt sich diese Eigenschaft auf f ? (Man vgl. etwa Theorem X.3.5). Im allgemeinen wird dies nicht der Fall sein. In diesem Kapitel werden wir Kriterien bereitstellen, die es erlauben, auf gewisse Eigenschaften von f zu schließen.

Zunächst jedoch ein kleines Horrorkabinett von Gegenbeispielen:

BEISPIELE 0.1.

1. $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = |x - \frac{1}{2}|^{\frac{1}{n}}$. Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{2}, \\ 0, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Also existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für $x \in [0, 1]$. f_n ist stetig für alle n ; jedoch ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ nicht stetig.

- 2.

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x - \frac{1}{n}|, & 0 \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

f_n ist stetig, es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Es ist jedoch $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n =$

$$1 \neq \int_0^1 0.$$

3. $f_n(x) = x - \frac{x^n}{n}, x \in [0, 1]$. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x =: f(x)$$

für $x \in [0, 1]$. f_n ist differenzierbar und es gilt

$$f'_n(x) = 1 - x^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) \neq f'(1).$$

4. Wir betrachten nochmals $f_n(x)$ aus 2. Sei $x_n := \frac{1}{n}$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \neq f(0).$$

Das Fazit lautet: Man sollte keine noch so naheliegenden Grenzwertoperationen als selbstverständlich betrachten!

1. Metrische Räume von Abbildungen, Stetigkeit der Grenzfunktion

DEFINITION 1.1. Seien X, Y metrische Räume und $f_n : X \rightarrow Y$ Abbildungen. (f_n) heißt *punktweise konvergent* gegen $f : X \rightarrow Y$, falls für jedes feste $x \in X$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. M.a.W.

$$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon. \quad (1.1)$$

(f_n) heißt *gleichmäßig konvergent* gegen $f : X \rightarrow Y$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so existiert, dass für $n \geq n_0$ und alle $x \in X$ gilt $d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$. M.a.W.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall x \in X \forall n \geq n_0 d_Y(f(x), f_n(x)) < \varepsilon. \quad (1.2)$$

Wir illustrieren den Unterschied zwischen (1.1) und (1.2) an zwei Beispielen:

(f_n) aus Beispiel 0.1 konvergiert punktweise gegen $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq \frac{1}{2} \\ 0, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$. Allerdings

ist die Konvergenz nicht gleichmäßig. Wäre sie es, so gäbe es insbesondere zu $1 > \varepsilon > 0$ ein n_0 so, dass für $n \geq n_0$ und $x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$

$$1 - \left| x - \frac{1}{2} \right|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon.$$

Für $|x - \frac{1}{2}| < (1 - \varepsilon)^{n_0}$ und $n_0 = n$ ist dies offenbar falsch.

Die Folge $(\frac{1}{n} \sin x)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert auf ganz \mathbb{R} gleichmäßig gegen 0; zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist $|\frac{1}{n} \sin x| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

SATZ UND DEFINITION 1.2. Seien X, Y metrische Räume. Mit $B(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge der beschränkten Abbildungen von X nach Y . $C_b(X, Y) := \{f \in B(X, Y) \mid f \text{ stetig}\}$. Für $f, g \in B(X, Y)$ setzen wir

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)).$$

$(B(X, Y), d)$ ist ein metrischer Raum.

SATZ 1.3. Seien X, Y metrische Räume und $f_n : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen. Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen $f : X \rightarrow Y$, so ist auch f stetig.

SATZ 1.4. Seien X, Y metrische Räume.

1. $C_b(X, Y)$ ist abgeschlossen in $B(X, Y)$.
2. Ist Y vollständig, so auch $B(X, Y)$ und $C_b(X, Y)$.

2. Ableitung und Integral der Grenzfunktion

Hierfür wurde die wesentliche Arbeit bereits im Theorem X.3.5 geleistet.

SATZ 2.1. Seien $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbare Funktionen. Die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Ist für wenigstens ein $x_0 \in [a, b]$ die Folge $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, so konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion f und es gilt $f' = g$.

SATZ 2.2. Seien $(f_n) \in \text{SR}[a, b]$. (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist $f \in \text{SR}[a, b]$ und

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

3. Kriterien für gleichmäßige Konvergenz, Beispiele

3.1. Das Weierstraß-Kriterium, Potenzreihen.

SATZ 3.1. Seien X ein metrischer Raum und $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, Funktionen. Ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} < \infty, \quad (3.1)$$

so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig.

BEISPIEL 3.2. Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, p > 1$, konvergieren gleichmäßig, denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\sin(n \cdot)}{n^p} \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty.$$

BEMERKUNG 3.3. Ist (3.1) erfüllt, so spricht man auch von *normaler* Konvergenz.

SATZ 3.4. Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Für jedes $\rho < R$ sind die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad (3.2)$$

auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq \rho\}$ normal konvergent. f ist komplex differenzierbar und es gilt

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

BEMERKUNG 3.5. Durch sukzessive Anwendung von Satz 3.4 erkennen wir, dass f beliebig oft differenzierbar ist und

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}.$$

3.2. Abelsche partielle Summation. Wir werden sehen, dass die gleichmäßige Konvergenz manchmal mittels der ABELSchen *partiellen Summation* nachgewiesen werden kann.

LEMMA 3.6. Seien $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$ und $A_n := \sum_{\nu=M}^n a_\nu$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=M}^N a_n b_n &= \sum_{n=M}^N (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=M}^N A_n b_n - \sum_{\nu=M-1}^{N-1} A_\nu b_{\nu+1} \\ &= \sum_{\nu=M}^N A_\nu (b_\nu - b_{\nu+1}) + A_N b_{N+1} - A_{M-1} b_M. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass für $|z| \leq 1, z \neq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\log|1-z| + i \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{1 - \operatorname{Re} z}$$

konvergiert. Wir untersuchen nun die Reihe auf gleichmäßige Konvergenz. Wegen Satz 3.4 ist die Reihe für jedes $\rho < 1$ auf $\{z \mid |z| \leq \rho\}$ gleichmäßig konvergent. Wir zeigen etwas mehr:

LEMMA 3.7. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ auf $K_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, |z-1| \geq \varepsilon\}$ gleichmäßig konvergent.

Als Anwendung diskutieren wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} \right) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Die Reihe ist nach vorstehendem Lemma auf jedem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ gleichmäßig konvergent. Folglich erhalten wir für $0 < x < 2\pi$

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^x \frac{\pi - t}{2} dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\pi}^x \sin(nt) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-\cos(nt)) \Big|_{\pi}^x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\cos(nx)}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

bzw.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(\pi - t)^2}{4} \Big|_{\pi}^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{(\pi - x)^2}{4}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ normal konvergiert, folgt weiter

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \int_0^{2\pi} \frac{(\pi - x)^2}{4} dx \\ &= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{-(\pi - x)^3}{12} \Big|_0^{2\pi}, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{(\pi - x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere ist für $n = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Eine weitere wichtige Anwendung der partiellen Summation ist der

SATZ 3.8 (Abelscher Grenzwertsatz). Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen. Dann ist die Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für $x \in [0, 1]$ gleichmäßig konvergent. Insbesondere ist f auf $[0, 1]$ stetig.

BEISPIEL 3.9. Wir leiten nochmals die Logarithmusreihe her: Für $|x| < 1$ ist $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ sicherlich konvergent. Nach Satz 3.4 ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Also ist $f(x) = -\log(1-x) + C$ und wegen $f(0) = 0$ folgt $f(x) = -\log(1-x)$, $|x| < 1$. Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

konvergiert, liefert der Abelsche Grenzwertsatz $f(-1) = -\log 2$.

3.3. Die Binomialreihe. Für $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ ist bekanntlich

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Wir untersuchen daher nun für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

$$B_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Zunächst ist

$$\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} = \frac{n+1}{\alpha-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

also ist der Konvergenzradius 1. $B_\alpha(x)$ ist also nach Satz 3.4 für $|x| < 1$ differenzierbar und wir erhalten

$$\begin{aligned} B'_\alpha(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} (n+1) x^n \\ &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n = \alpha B_{\alpha-1}(x). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} (1+x)B_{\alpha-1}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right) x^n + 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = B_\alpha(x). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$(1+x)B'_\alpha(x) = \alpha B_\alpha(x).$$

Differentiation liefert

$$\frac{d}{dx}(1+x)^{-\alpha} B_\alpha(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} B_\alpha(x) + \alpha(1+x)^{-\alpha-1} B_\alpha(x) = 0,$$

also wegen $B_\alpha(0) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} 0^n$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Nun wenden wir uns dem Konvergenzverhalten für $|x| = 1$ zu:

SATZ 3.10 (Konvergenzkriterium von RAABE). Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen. Gilt für $n \geq n_0$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 - \frac{\beta}{n}$$

mit einer Konstanten $\beta > 1$, so ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Ist hingegen für $n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n},$$

so ist $\sum a_n$ divergent.

Wir betrachten nun $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x = \pm 1$:

$$\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} = \frac{\alpha - n}{n+1} = \frac{\alpha + 1}{n+1} - 1.$$

Für $\alpha > 0$ ist folglich

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} \right| \leq 1 - \frac{\alpha + 1}{n+1}$$

und das Raabe-Kriterium liefert $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \binom{\alpha}{n} \right| < \infty$.

Für $a \leq 0$ ist

$$-\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} \geq 1 - \frac{1}{n}, \quad (3.3)$$

also divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha}{n}$ nach Raabe.

Für $a \leq -1$ ist sogar $\left| \frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}} \right| \geq 1$, also divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in \{\pm 1\}$, nach Quotientenkriterium.

Bleibt noch $-1 < \alpha < 0$: Dann ist $\binom{\alpha}{n}$ alternierend (wegen (3.3)). Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} &= \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{-\alpha(1-\alpha) \cdot \dots \cdot (n-1-\alpha)}{n!} \\ &= (-1)^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right) \left(1 - \frac{\alpha+1}{n-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\alpha+1}{1}\right). \end{aligned}$$

Also ist $\binom{\alpha}{n} (-1)^{n-1}$ monoton fallend. Es bleibt zu zeigen, dass $\left(\binom{\alpha}{n} (-1)^{n-1}\right)_n$ eine Nullfolge ist. Dazu betrachten wir

$$-\log \left((-1)^{n-1} \binom{\alpha}{n} \right) = \sum_{j=1}^n -\log \left(1 - \frac{\alpha+1}{j} \right) = \sum_{j=1}^n \int_{1-\frac{\alpha+1}{j}}^1 \frac{dt}{t} \geq \sum_{j=1}^n \frac{\alpha+1}{j} \rightarrow \infty,$$

also

$$\frac{1}{(-1)^{n-1} \binom{\alpha}{n}} = e^{-\log(\dots)} \rightarrow \infty$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{\alpha}{n} = 0.$$

Verwenden wir noch den abelschen Grenzwertsatz, so haben wir bewiesen

SATZ 3.11. *Seien $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \text{ wenn } \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & \alpha \in \mathbb{N}, \\ |x| < 1, & \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ x = -1, & \alpha > 0, \alpha \notin \mathbb{N}, \\ x = 1, & \alpha > -1, \alpha \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

In allen anderen Fällen ist $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ divergent.

4. Parameter- und Doppelintegrale

SATZ 4.1. Seien $X \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : [a, b] \times X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist

$$F : X \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$$

ebenfalls stetig.

SATZ 4.2. Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und nach der 2. Variablen stetig partiell differenzierbar. Dann ist

$$F : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \int_a^b f(t, x) dt$$

stetig differenzierbar mit

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

SATZ 4.3. Sei $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\int_a^b \int_c^d f = \int_c^d \int_a^b f.$$

5. Der Satz von Arzela-Ascoli

Seien X, Y metrische Räume und $f_n : X \rightarrow Y$ eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Abbildungen, $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein n_0 so, dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in X$

$$d(f_n(x), f_{n_0}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ist zusätzlich X kompakt, so ist f_{n_0} gleichmäßig stetig. Also gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt

$$d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann folgt für diese x, y und $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f_n(y)) &\leq d(f_n(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f_n(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da auch f_1, \dots, f_{n_0-1} gleichmäßig stetig sind, erhalten wir nach evtl. Verkleinerung von δ

$$\forall_n \forall_{x, y \in X} d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon.$$

DEFINITION 5.1. Eine Teilmenge $A \subset C(X, Y)$ heißt *gleichgradig stetig*, falls

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{f \in A} \forall_{x, y \in X} d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Unsere Vorüberlegung zeigt:

SATZ 5.2. *Seien X, Y metrische Räume, X sei kompakt. Ist $(f_n) \subset C(X, Y)$ gleichmäßig konvergent, so ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig.*

Dieser Satz besitzt eine gewisse Umkehrung. Zur Vorbereitung benötigen wir eine weitere Charakterisierung der Kompaktheit.

DEFINITION 5.3. Sei X ein metrischer Raum. $A \subset X$ heißt *totalbeschränkt* oder *präkompakt*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $x_1, \dots, x_r \in X$ so gibt, dass $X \subset \bigcup_{j=1}^r B(x_j, \varepsilon)$.

SATZ 5.4. *Ein metrischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn er totalbeschränkt und vollständig ist.*

THEOREM 5.5 (ARZELA-ASCOLI). *Seien X ein kompakter und Y ein vollständiger metrischer Raum. Für $A \subset C(X, Y)$ sind äquivalent*

1. \overline{A} ist kompakt
2. A ist gleichgradig stetig und für jedes $x \in X$ ist $\overline{A(x)} = \overline{\{f(x) \mid f \in A\}}$ kompakt in Y .

FOLGERUNG 5.6. *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(X, \mathbb{C})$ eine Folge. (f_n) sei*

- gleichgradig stetig und
- punktweise beschränkt.

Dann besitzt (f_n) eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

6. Der Satz von Stone-Weierstraß

Wir hatten gesehen, dass die Vervollständigung der Treppenfunktionen $\mathcal{T}[a, b]$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ genau diejenigen Funktionen sind, welche in jedem Punkt rechts- und linksseitige Limes besitzen. Analog können wir fragen:

1. Welche Funktionen lassen sich gleichmäßig durch Polynome approximieren?
2. Welche Funktionen lassen sich gleichmäßig durch trigonometrische Polynome der Form

$$\sum_{j=M}^N a_j e^{ijx}$$

approximieren?

Für Approximationsfragen dieser Art gibt es einen sehr allgemeinen Satz, der in seiner modernen Form auf M. H. STONE zurückgeht.

Sei X ein metrischer Raum. Dann ist $C(X)$ nicht nur ein Banachraum. Zusätzlich besitzt $C(X)$ eine *Algebra*-Struktur, d.h. es gibt eine Multiplikation

$$\begin{aligned} \cdot : C(X) \times C(X) &\rightarrow C(X) \\ (f, g) &\mapsto f \cdot g \quad (x \mapsto f(x)g(x)) \end{aligned}$$

so, dass für $\lambda \in \mathbb{C}, f, g, h \in C(X)$ gilt

$$\begin{aligned} (\lambda f)g &= \lambda(fg), \\ f(g+h) &= fg + fh, \\ f(gh) &= (fg)h. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Man sagt, dass $C(X)$ eine \mathbb{C} -Algebra ist. Die Eigenschaften (6.1) sind offensichtlich.

Weiterhin gilt für die Norm

$$\|fg\|_\infty = \sup\{|f(x)g(x)| \mid x \in X\} \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty. \quad (6.2)$$

$C(X)$ ist daher eine sogenannte Banach-Algebra.

Die Polynome $\mathbb{C}[x]$ bilden sicherlich eine *Unteralgebra* von $C[a, b]$. Wir werden Kriterien finden, wann eine solche Unteralgebra dicht liegt.

LEMMA 6.1. *Sei X ein metrischer Raum und $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ eine abgeschlossene Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}$. Dann ist mit $f, g \in \mathcal{A}$ auch $|f|$, $\max(f, g)$ und $\min(f, g) \in \mathcal{A}$. Ist $f \geq 0$, so ist auch $\sqrt{f} \in \mathcal{A}$.*

DEFINITION 6.2. Eine Menge $F \subset C(X)$ heißt *punktetrennend*, wenn es zu $x, y \in X$, $x \neq y$, ein $f \in F$ gibt mit $f(x) \neq f(y)$.

LEMMA 6.3. *Sei $F \subset C(X)$ punktetrennend. Dann gibt es zu $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) ein $f \in F$ mit $f(x) = \alpha$, $f(y) = \beta$.*

THEOREM 6.4 (STONE-WEIERSTRASS, reelle Version). *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $P \subset C(X, \mathbb{R})$ eine punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in P$. Dann ist P dicht in $C(X, \mathbb{R})$.*

FOLGERUNG 6.5. *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit*

$$\|f - p\|_{\infty, [a, b]} < \varepsilon.$$

THEOREM 6.6 (STONE-WEIERSTRASS, komplexe Version). *Sei X ein kompakter metrischer Raum und $P \subset C(X, \mathbb{C})$ eine punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in P$. Weiterhin sei mit $f \in P$ auch $\bar{f} \in P$. Dann ist P dicht in $C(X, \mathbb{C})$.*

FOLGERUNG 6.7. *Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Dann liegen die LAURENT-Polynome*

$$\mathbb{C}[z, \bar{z}] = \left\{ \sum_{j=-n}^m c_j x^j \mid c_j \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

dicht in $C(S^1, \mathbb{C})$.

Literaturverzeichnis

- [1] K. CIESIELSKI: *Set Theory for the Working Mathematician*, vol. 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1997)
- [2] L. GÅRDING and L. HÖRMANDER: *Why is there no Nobel prize in mathematics?* *The Mathematical Intelligencer* **7** (3) (1985)
- [3] P. R. HALMOS: *Naive Mengenlehre*
- [4] E. LANDAU: *Grundlagen der Analysis*. Chelsea (1965). Nachdruck
- [5] W. RAUTENBERG: *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*. Vieweg Verlag, Braunschweig–Wiesbaden (1979)
- [6] K. KÖNIGSBERGER: *Analysis I*. Springer Verlag, Heidelberg, (2001)