Prof. Dr. Matthias Lesch
Mathematisches Institut
Universität Bonn

Wintersemester 09/10
Abgabe: 29.01. (vor der Vorlesung)

12. Serie Globale Analysis II

Aufgabe 1. Sei T der lineare Operator in $L^2[0,1]$ mit

$$\mathcal{D}(T) = C[0,1]$$

$$(Tf)(x) = f(0).$$

(i) Zeige: T ist nicht abschließbar.

(ii) Berechne T^*.

Aufgabe 2. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Für $f \in L^1_{loc}(I)$ sei mit $f^{(i)}$ die i-te Distributionsableitung von f bezeichnet. Dann sei

$$H^k(I) := \{f \in L^1_{loc}(I) \colon f^{(i)} \in L^2(I) \quad \forall i \leq k\}.$$

Weiter sei

$$H^k_{loc}(I) := \{f \in L^1_{loc}(I) \colon f^{(i)} \in L^2_{loc}(I) \quad \forall i \leq k\}.$$

Sei $D = -\frac{d^2}{dx^2}$, $\mathcal{D}(D) = C_c^\infty(0,\infty) \subset L^2(0,\infty)$.

(i) Man zeige $\mathcal{D}(D^*) = \{f \in H^2_{loc}(0,\infty) \colon f \in L^2(0,\infty), f'' \in L^2(0,\infty)\}$.

(ii) Man folgere $f' \in L^2(0,\infty)$ für $f \in \mathcal{D}(D^*)$. Es ist also $\mathcal{D}(D^*) = H^2(0,\infty)$. Hinweis: Mittelwertsatz der Differentialrechnung..

(iii) Man zeige: Ist $f \in H^2(0,\infty)$, so sind f und f' stetig nach 0 fortsetzbar. Weiter existieren $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

(iv) Man zeige $\mathcal{D}(D^{**}) = \{f \in H^2(0,\infty) \colon f(0) = f'(0) = 0\}$.

Aufgabe 3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $D = i\frac{d}{dx}$ mit $\mathcal{D}(D) = C_c^\infty(a,b) \subset L^2(a,b)$. Man zeige: Ist $\widetilde{D} \supset D$ eine selbstadjungierte Erweiterung, so gibt es ein $\lambda \in S^1$ mit

$$\mathcal{D}(\widetilde{D}) = \{f \in H^1(a,b) \colon f(b) = \lambda f(a)\}.$$