Prof. Dr. Matthias Lesch
Dr. Mario Kassuba

Wintersemester 09/10
Abgabe: 23.10. (vor der Vorlesung)

1. Serie Globale Analysis II

Es seien $(M, g, \mathcal{O})$ eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigekit und $E, F \to M$ Vektorbündel.

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ Multiindizes. Wir setzen $\beta \leq \alpha$, falls $\beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Definiere $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$ und $\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ für $\beta \leq \alpha$. Zeige

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta f)(D^{\alpha-\beta} g).$$

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Seien $P, Q \in \mathrm{Diff}(E, E)$. Schreibe lokal

$$P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha \quad \text{und} \quad Q = \sum_{|\beta| \leq l} b_\beta D^\beta.$$

Zeige, dass

$$\sigma_{P \circ Q} = \sum_{|\gamma| \leq k} \frac{i^{|\gamma|}}{\gamma!} \left[D_\xi^\gamma \sigma_P(x, \xi) \right] \left[D_x^\gamma \sigma_Q(x, \xi) \right].$$

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei $D \colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ ein lineare und lokale Abbildung. Ferner gelte für alle $f \in C^\infty(M)$, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} f(D) : \Gamma(E) &\to \Gamma(F) \\ s &\mapsto f(Ds) - D(fs) \end{aligned}$$

ein Differentialoperator der Ordnung k ist. Zeige, dass D ein Differentialoperator der Ordnung $k+1$ ist.

Aufgabe 4. (2 Punkte) Berechne das Hauptsymbol der Operatoren $\mathrm{div}, \mathrm{grad}, \mathcal{L}$ (Lie-Ableitung auf Formen), $\mathrm{grad} \circ \mathrm{div}$.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Sei $D \in \mathrm{Diff}^k(E, F)$. Seien $p \in M$, $\xi \in T_p^* M$, $e \in E_p$. Wähle $f \in C_0^\infty(M)$, $s \in C_0^\infty(E)$ mit $f(p) = 0$, $df|_p = \xi$, $s(p) = e$. Dann ist das Hauptsymbol von D definiert durch

$$\sigma_D^k(p, \xi) e := \frac{i^k}{k!} D(f^k s)(p).$$

Wähle $g \in C_0^\infty(M)$ mit $dg|_p = \xi$ und $g(p)$ beliebig. Zeige:

(i) $\sigma_D^k(p, \xi) e = \lim_{t \to \infty} t^{-k} \left[e^{-itg} D(e^{itg} s) \right](p).$

(ii) $\sigma_D^k(p, \xi) e = \dfrac{(-i)^k}{k!} [(\mathrm{ad} g)^k D] s(p).$