Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Stefan Schwede
Dr. Jack Davies

Sommersemester 2024

Blatt 3
40 Punkte

Abgabetermin: 07.05.2024, vor der Vorlesung um 8:15
Nur die vier Aufgaben, die mit einem (∗) bezeichnet sind, werden korrigiert und gewertet; für alle anderen Aufgaben brauchen keine Lösungen eingereicht zu werden.

Aufgabe 3.1 (∗ 10 Punkte) Trigonalisiere die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.2 (∗ 10 Punkte) Sei K ein Körper und seien $A_1 \in M(m \times m; K), A_2 \in M(n \times n; K)$ zwei quadratische Matrizen mit Minimalpolynomem M_1 bzw. $M_2 \in K[t]$.

(i) Zeige, dass das Minimalpolynom der Blockmatrix

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

das kleinste gemeinsame Vielfache von M_1 und M_2 ist. (Das *kleinste gemeinsame Vielfache* von $f, g \in K[t]$ ist das eindeutige normierte Polynom h, das von f und g geteilt wird; und wenn f und g ein anderes Polynom h' teilen, dann gilt $h|h'$.)

(ii) Zeige, dass B genau dann diagonalisierbar ist, wenn A_1 und A_2 diagonalisierbar sind.

Aufgabe 3.3 Zeige, dass das Polynom $t^n - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ für $n \geq 2$ keinen Teiler $P \in \mathbb{Q}[t]$ mit $1 \leq \deg(P) \leq n-1$ besitzt.

Aufgabe 3.4 Beweise den Satz von Cayley–Hamilton durch direkte Rechnung für Matrizen A aus $M(2\times 2; K)$.

Aufgabe 3.5 (∗ 10 Punkte) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix diagonalisierbar?

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 2-\alpha & \alpha - 1 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.6 (∗ 10 Punkte) Sei $A \in M(n \times n; K)$ eine symmetrische Matrix, also ${}^tA = A$. Seien u und v zwei Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \mu$. Zeige, dass u und v *orthogonal* sind, d.h. ${}^tu \cdot v = 0$.