Übungen zur Linearen Algebra II

Prof. Stefan Schwede
Dr. Jack Davies

Sommersemester 2024

Musterlösung 3 Tianyi Feng

Aufgabe 3.1 ($*$ 10 Punkte) Trigonalisiere die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Lösung: • $P_A(t) = -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = -(t-1)^3$. Wir bestimmen

$$\mathrm{Eig}(A, 1) = \ker(A - I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Setze $\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man rechnet leicht nach, dass

$$M_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Dies ist schon eine obere Dreiecksmatrix.

• $P_B(t) = -t^3 - 6t^2 - 12t - 8 = -(t+2)^3$. Genauso bestimmen wir

$$\mathrm{Eig}(B, -2) = \ker(B + 2I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Setze $\mathcal{B} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$M_{\mathcal{B}}(B) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ & -2 & -1 \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

schon eine obere Dreiecksmatrix.

Bemerkung. Um den Algorithmus besser zu illustrieren, sollten wir vielleicht stattdessen zuerst die Basis

$$\mathcal{C} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nehmen. Dann ist B bei

$$M_{\mathcal{C}}(B) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ & -3 & -1 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

noch nicht trigonalisiert. Die Untermatrix $B' = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat charakteristisches Polynom $P_{B'}(t) = (t+2)^2$ und

$$\mathrm{Eig}(B', -2) = \ker(B' + 2I) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Dieser ergibt einen weiteren guten Basisvektor $(-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Setze jetzt $\mathcal{C}' := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; dann ist

$$M_{\mathcal{C}'}(B) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ & -2 & 1 \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 3.2 ($*$ 10 Punkte) Sei K ein Körper und seien $A_1 \in M(m \times m; K), A_2 \in M(n \times n; K)$ zwei quadratische Matrizen mit Minimalpolynomem M_1 bzw. $M_2 \in K[t]$.

(i) Zeige, dass das Minimalpolynom der Blockmatrix

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

das kleinste gemeinsame Vielfache von M_1 und M_2 ist. (Das *kleinste gemeinsame Vielfache* von $f, g \in K[t]$ ist das eindeutige normierte Polynom h, das von f und g geteilt wird; und wenn f und g ein anderes Polynom h' teilen, dann gilt $h|h'$.)

(ii) Zeige, dass B genau dann diagonalisierbar ist, wenn A_1 und A_2 diagonalisierbar sind.

Lösung: (i) Per Definition ist $\mathrm{kgV}(M_1, M_2)$ schon normiert. Wir müssen also zeigen, dass $\mathrm{kgV}(M_1, M_2)$ ein Erzeuger des Ideals

$$I_B = \{P \in K[t] \colon P(B) = 0\}$$

ist:

1) $\mathrm{kgV}(M_1, M_2) \neq 0$. Klar.
2) $\mathrm{kgV}(M_1, M_2) \in I_B$:

$$\mathrm{kgV}(M_1, M_2)(B) = \begin{pmatrix} \mathrm{kgV}(M_1, M_2)(A_1) & \\ & \mathrm{kgV}(M_1, M_2)(A_2) \end{pmatrix} = 0.$$

3) Sei $P \in I_B$. Dann ist

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A_1) & \\ & P(A_2) \end{pmatrix} = 0.$$

Also insbesondere folgt aus $P(A_1) = 0$ und $P(A_2) = 0$, $M_1 \mid P$ bzw. $M_2 \mid P$. Man hat sofort $\mathrm{kgV}(M_1, M_2) \mid P$.

□

(ii) Wir beweisen vorab:

Lemma. Eine Matrix $A \in \mathrm{End}(K^n)$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn das Minimalpolynom von A ein Produkt paarweise verschiedener Linearfaktoren ist, d.h. M_A hat die Form $M_A(t) = (-1)^d \prod_{i=1}^d (t - \mu_i)$, wobei $\mu_i \neq \mu_j$ für $i \neq j$.[1]

Beweis des Lemmas.

[1] $\{\mu_1, \cdots, \mu_d\}$ ist dann automatisch die Menge der Eigenwerte von A.

$\Longrightarrow$: Das Minimalpolynom ist invariant unter Ähnlichkeitstransformation. Es ist klar, dass das Minimalpolynom M_D einer Diagonalmatrix D diese Form besitzt. Also hat M_A für $A = T^{-1}DT$ auch diese Form.

$\Longleftarrow$: Angenommen, dass

$$M_A(t) = (-1)^d \prod_{i=1}^{d} (t - \mu_i),$$

dann ist insbesondere

$$(-1)^d M_A(A) = (A - \mu_1 I) \cdots (A - \mu_d I) = 0.$$

Behauptung. $K^n = \mathrm{Eig}(A, \mu_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(A, \mu_d)$.

Wir beweisen stattdessen die Aussage

$$\ker\big((A - \mu_1 I) \cdots (A - \mu_l I)\big) = \ker(A - \mu_1 I) \oplus \cdots \oplus \ker(A - \mu_l I)$$

durch Induktion nach $l (\leq d)$:

$l = 1$ Klar.

$l \geq 2$ Wir wissen schon, dass sich verschiedene Eigenräume nur am Ursprung schneiden. Es bleibt also nur zu zeigen, dass

$$\ker\big((A - \mu_1 I) \cdots (A - \mu_l I)\big) = \ker(A - \mu_1 I) + \cdots + \ker(A - \mu_l I).$$

Wir zeigen die nicht triviale Inklusion $\subset$.
Sei $v \in \ker((A - \mu_1 I) \cdots (A - \mu_l I))$, dann liegt $(A - \mu_l I)v \in \ker((A - \mu_1 I) \cdots (A - \mu_{l-1} I))$.
Nach Induktionsvoraussetzung lässt sich $(A - \mu_l I)v$ eindeutig als

$$(A - \mu_l I)v = w_1 + \cdots + w_{l-1}$$

schreiben, wobei $w_i \in \ker(A - \mu_i I)$ für alle $1 \leq i \leq l-1$. Jetzt sind die Einschränkungen $\alpha_i := (A - \mu_l I)\mid_{\ker(A - \mu_i I)}$ für alle $i < l$ auf $\ker(A - \mu_i I)$ invertierbar. Wir erhalten also ein Element

$$v' = \alpha_1^{-1}(w_1) + \cdots + \alpha_{l-1}^{-1}(w_{l-1}) \in \ker\big((A - \mu_1 I) \cdots (A - \mu_l I)\big).$$

Es gelten $v_i := \alpha_i^{-1}(w_i) \in \ker(A - \mu_i I)$ für alle $i < l$ und $(A - \mu_l I)v = (A - \mu_l I)v'$. Also insbesondere ist $v - v' \in \ker(A - \mu_l I)$ und

$$v = v_1 + \cdots + v_{l-1} + (v - v') \in \ker(A - \mu_1 I) + \cdots + \ker(A - \mu_l I).$$

Aus der Zerlegung für $l = d$ folgt direkt die Behauptung. Somit ist A diagonalisierbar. $\square$ *Lemma*

Mit Hilfe des Lemmas und (i) erhalten wir sofort die folgenden äquivalenten Aussagen:

1) B ist diagonalisierbar;
2) $M_B = \mathrm{kgV}(M_1, M_2)$ ist ein Produkt paarweise verschiedener Linearfaktoren;
3) M_1 und M_2 sind Produkte paarweise verschiedener Linearfaktoren;
4) A_1 und A_2 sind diagonalisierbar.

$\square$

Aufgabe 3.3 Zeige, dass das Polynom $t^n - 2 \in \mathbb{Q}[t]$ für $n \geq 2$ keinen Teiler $P \in \mathbb{Q}[t]$ mit $1 \leq \deg(P) \leq n - 1$ besitzt.

Lösung: Eisenstein mod 2. $\square$

Alternativ betrachtet man den Zerfall von $t^n - 2$ über den komplexen Zahlen:

$$t^n - 2 = \prod_{i=0}^{n-1} (t - \sqrt[n]{2}\omega_n^i),$$

wobei $\omega_n = \exp(\frac{2\pi i}{n})$ die n-te Einheitswurzel ist.

Sollte ein Teiler P wie beschrieben existieren, müsste er sich als Produkt einiger der obigen Linearfaktoren schreiben lassen. Er hätte dann den konstanten Term

$$a_0 = (-1)^k \sqrt[n]{2}^k \omega_n^{i_1} \cdots \omega_n^{i_k},$$

wobei $k = \deg(P)$ und $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n-1$. Allerdings ist die Zahl $\sqrt[n]{2^k}$ irrational für $1 \leq k \leq n-1$ und $\omega_n^{i_1} \cdots \omega_n^{i_k} = \pm 1$ oder gar nicht reell. Man hätte also auf jeden Fall $a_0 \notin \mathbb{Q}$. Widerspruch. □

Aufgabe 3.4 Beweise den Satz von Cayley–Hamilton durch direkte Rechnung für Matrizen A aus $M(2 \times 2; K)$.

Lösung: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, K)$. Dann ist

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} a-t & b \\ c & d-t \end{pmatrix} = (a-t)(d-t) - bc.$$

Setzte man A ein, so erhielt man

$$\begin{aligned} P_A(A) &= \left(\begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} d & \\ & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} bc & \\ & bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} & -b \\ -c & a-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d-a & -b \\ -c & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} bc & \\ & bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bc & \\ & bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} bc & \\ & bc \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3.5 (∗ 10 Punkte) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die folgende Matrix diagonalisierbar?

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 2-\alpha & \alpha-1 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Man bestimmt

$$P_A(t) = -t^3 - t^2 + t + 1 = -(t-1)(t+1)^2.$$

Jetzt ist A diagonalisierbar genau dann, wenn $\dim \mathrm{Eig}(A, -1) = 2$ ist. Wir rechnen also

$$\mathrm{Eig}(A, -1) = \ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} 2-\alpha & \alpha & 0 \\ 2-\alpha & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist 2-dimensional genau dann, wenn $\alpha = 0$ ist.

Aufgabe 3.6 (∗ 10 Punkte) Sei $A \in M(n \times n; K)$ eine symmetrische Matrix, also ${}^tA = A$. Seien u und v zwei Eigenvektoren von A zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \mu$. Zeige, dass u und v *orthogonal* sind, d.h. ${}^tu \cdot v = 0$.

Lösung: Wir haben die Gleichheiten

$$\lambda {}^tuv = {}^tuAv = {}^tu{}^tAv = {}^t(Au)v = \mu {}^tuv;$$

also insbesondere

$$(\lambda - \mu){}^tuv = 0.$$

Nach Annahme ist $\lambda \neq \mu$, muss also ${}^tuv = 0$ gelten. □