Paris 11 Mai 26

Correspondances entières de Hecke

Görtz, He, inspiré par Fakhruddin–Pilloni

§ Motivation

Soit $(\mathbb{G}, X)$ donnée de Shimura $\rightsquigarrow$

$$Sh_{\mathbb{K}}(\mathbb{G}, X) = \mathbb{G}(\mathbb{Q}) \backslash [X \times \mathbb{G}(\mathbb{A}_f)/\mathbb{K}]$$

tour de var. alg. quasi-proj., définie sur $\mathbb{E}$.

Correspondance de Hecke : soit $g \in \mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$.

Pour $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K} \cap g\mathbb{K}g^{-1}$,

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & Sh_{\mathbb{K}'} \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Sh_{\mathbb{K}} & & Sh_{\mathbb{K}} \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow \quad \mathcal{H}(\mathbb{G}(\mathbb{A}_f), \mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Corr}(Sh_{\mathbb{K}})$.

Fixons p. Soit $v | p$.

$G = \mathbb{G} \otimes \mathbb{Q}_p$, $E = \mathbb{E}_v$.

Soit $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}^p . K_0$, où $K_0 =$ hs max.

On "a" modèle canonique entière $\mathcal{S}_{\mathbb{K}_0}$, lisse sur $\mathcal{O}_E$.

On voudrait étendre sur $\mathcal{O}_E$ le toit (*) en

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}_{\mathbb{K}'} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{S}_{\mathbb{K}_0} & & \mathcal{S}_{\mathbb{K}_0} \end{tikzcd}$$

<u>Obstacle</u> : $\mathbb{K}'$ n'est pas parahorique (pour $\mathbb{K}' = \mathbb{K}^p . K'$ avec K' parahorique c'est bon).

§ <u>Construction de corresp. de Hecke entières</u>

On fixe Iwahori $\subset K_0$ hs parah. <u>std</u>.

Soit (K_1, K_2) une paires de parah. std. maximales, avec K_2 hs. et $K_1 \neq K_0$.

<u>Deux cas</u>

(I) $K_1 = K_2$. Alors corresp. entière

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}_{\mathbb{K}_0 \cap \mathbb{K}_1} \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr] \arrow[drr, dashed, "p_2"] & & \\ \mathcal{S}_{\mathbb{K}_0} & & \mathcal{S}_{\mathbb{K}_1} \arrow[r, "\sim"', "\tau"] & \mathcal{S}_{\mathbb{K}_0} \end{tikzcd}$$

(II) $K_1 \neq K_2$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathcal{S}_{K_0 \cap K_1 \cap K_2} \arrow[d, "\neq"] & & & \\
 & & \mathcal{S} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dll, bend right, "p_1"'] \arrow[drrr, bend left, "p_2"] & & & \\
 & \mathcal{S}_{K_0 \cap K_1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathcal{S}_{K_1 \cap K_2} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\mathcal{S}_{K_0} & & \mathcal{S}_{K_1} & & \mathcal{S}_{K_2} \arrow[r, "\sim", "\tau"'] & \mathcal{S}_{K_0}
\end{tikzcd}$$

En fibre gén., ces corresp. de Hecke sont l'image des elts dans $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p), K_0)$ suivants

(I) $\mathbb{1}_{K_0 K_1} \cdot \mathbb{1}_\tau$ <u>minuscule</u>

(II) $\mathbb{1}_{K_0 K_1} \cdot \mathbb{1}_{K_1 K_2} \cdot T_\tau$.

Ces éléments sont appelés <u>fondamentaux</u>.

On va utiliser le théorème suivant.

<u>Th.</u>: Il existe une base $\{A_\lambda\}_{\lambda \in X_*(A)^+}$ <u>atomiques</u> de $\mathcal{H} \otimes \mathbb{Z}_p$ avec les propriétés suivantes

- matrice de ch^t de bases à des bases standardes $(T_\lambda, S_\lambda, R_\lambda)$ est triangulaire

- $A_{\lambda_1} \cdot A_{\lambda_2} = A_{\lambda_1+\lambda_2}$
- λ minuscule $\Rightarrow$ A_λ = ell. minusc. fondam. modulo $\mathbb{Z}_p[X_*(\text{centre})]$

  $\| \lambda$

  $T_\lambda = S_\lambda = R_\lambda$
- G type classique. Alors si λ indécomposable $\Rightarrow$ A_λ = ell. fondament. modulo ——.

Par itération, on obtient (pour G classique)

$A_{\lambda, geo}$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{S}_{\mathbb{K}_0} & & \mathcal{S}_{\mathbb{K}_0} \end{tikzcd}$$

$\mathcal{Z}$: Cette corresp. dépend à priori de la présent. de λ par des indécompos., on obtient

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow \mathrm{Corr}(\mathcal{S}_{\mathbb{K}_0})_{\mathbb{Z}_p}.$$

On peut relever les corresp. géométriques en corresp. cohomologique :

<u>Th.</u> : (i) La corresp. $A_{\lambda,geo}$ se relève en

$$A_\lambda : p_1^* \mathcal{O} \longrightarrow p_2^! \mathcal{O} ,$$

„intégralité"

et définit

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow \mathrm{Corr}(\mathcal{O}_{S_{K_0}})$$

avec fibre générique la <u>corresp. coh.</u> de Hecke classiques.

<u>Rem. 1</u> : On procède par récurrence — mais pour pouvoir définir la compos. de corresp. coh., il faut des hypothèses de ~~indép~~ Tor-indép. ou remplacer les produits fibrés de schémas par leur variante dérivée.

(ii) Mais $p^{-1} A_\lambda$ n'est pas une corresp. coho. entière

„optimalité".

<u>Rem. 2</u> : Le th. reste valable pour toute (G, X) si

(*) modèle intégral canonique existe et admet (LMD).

+ densité du lieu μ-ordinaire.

§ Extension aux fibrés vectorielles automorphes

Soit $T \subset B \subset G$ et $\mu \in X_*(T)$ représ de $\{\mu_X\}$.

Soit $M \subset P$ paire parab. corresp. à μ. (sur E).

Soit $\kappa \in X^*(T)^{M\text{-dom.}}$, avec $V = V_\kappa$ rep. irred. de M.

$\rightsquigarrow$ fibré vect. homogène sur $\mathcal{F}_\mu$

$\rightsquigarrow$ ——— sur $Sh_{\mathbb{K},E}$, avec relèvement des corresp. géométr. de Hecke en des corresp. cohom..

On a une extension "naturelle" de $\mathbb{V}_{\mathbb{K}_0}$ sur $\mathcal{S}_{\mathbb{K}_0}$: $\mathcal{V}_{\mathbb{K}_0}$

Pour $\lambda \in X_*(A)^+$, on pose

$$C_\lambda(\kappa) = \langle \lambda, \infty(\kappa) - \rho \rangle + \langle \lambda, \beta(\kappa) \rangle \in \mathbb{Z}.$$

Ici $\rho = \frac{1}{2} \sum \alpha$, $\infty(\kappa) = (\kappa + \rho)_{G\text{-dom.}}$

$\beta(\kappa)$ = certaine somme de racines positives.

"Correction" ≥ 0 et $= 0$ si λ minuscule ou $\kappa+\rho$ regulier.

($= 0$ pour GL_n, > 0 pour GSp_6)

Conjecture : Après multipl. avec $p^{C_\lambda(\kappa)}$ (integralité)

la corresp. coh. A_λ sur $\mathbb{V}_{\mathbb{K}_0}$ s'étend à $\mathcal{V}_{\mathbb{K}_0}$.

Si λ indécomp., alors p^{C-1} ne s'étend pas.

(optimalité)

Th.: Soit (G, X) une paire de Shimura du type Kottwitz-PEL. Alors

i) intégralité valable après restriction à l'ouvert **accessible**. (voir Komposition)

ii) Optimalité valable si la cond. suivante sur κ est vérifiée:

Tout $w \in W_0$ avec $w(\kappa+\rho) = \infty(\kappa)$ est contenu dans $W_0^{\natural} \cdot W_{0,\mu}$.

Remarque sur les opérateurs de Hecke: Les corresp. de Hecke définissent

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow \mathrm{End}\,(R\Gamma(S_{K_0}, V_{K_0}))$$

(ou plutot leur version de dimension $R\tilde{\Gamma}$).

Fixons i et formons le $\bar{\mathbb{Z}}_p$-reseau

$$\tilde{H}^i_{\bar{\mathbb{Z}}_p} = \mathrm{Im}\,(\tilde{H}^i(S_{K_0}, V_{K_0}) \longrightarrow \tilde{H}^i(Sh_{K_0}, V_{K_0})).$$

Conjecture (FP): $\tilde{H}^i_{\bar{\mathbb{Z}}_p}$ stable par $p^{\langle\lambda, \infty(\kappa)-\rho\rangle} \cdot S_\lambda$.

Notre conj. implique: ———— $p^{c_\lambda(\kappa)} \cdot A_\lambda$.

estimées sur val.- à la Clozel-Lafforgue ⇐

Conjecture: Les elts $p^{\langle\lambda, \infty(\kappa)-\rho\rangle} \cdot S_\lambda$ et $p^{\langle\lambda, \infty(\kappa)-\rho+\beta(\kappa)\rangle} \cdot A_\lambda$

stabilisent les mêmes réseaux.

Rem.: On peut conjecturer que

$$\mathcal{H}_K^A \subset \mathcal{H}_K^S.$$

Mais l'inégalité peut être strict (eg. Sp_6). Tout de même, cela ne contredit pas la conjecture.

Rem.: Si K est Q-régulier, alors $\mathcal{H}_K^A = \mathcal{H}_K^S$ – donc dans ce cas, notre conj. implique directement FP.

FP $\Rightarrow$ estimations sur valeurs p-adiques des valeurs propres des op. de Hecke. Si K régulier, alors ces estimations sont identiques aux estimations démontrées de Clozel-Lafforgue.

such that • smooth + large over O_E.

• (amazingly): $\pi_{K',K}(U_{K'}) \subset U_K$.

Now for any map (separ., f.t.) between smooth schemes $/O_E$

$$f : U' \longrightarrow U$$

get $f^* O_U \longrightarrow f^! O_U$ (Groth-duality).

<u>Lemma</u> (Bhatt): Consider diagram of (separ. f.t.)

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \cup & & \cup \\ U' & \xrightarrow{f_U} & U \end{array}$$

same dimension

, where U' large in X'.

Assume X CM. Then any map $f_U^* O \to f_U^! O$ extends uniquely to $f^* O \longrightarrow f^! O$. //

<u>Remark</u>: In order to define the composition of coho. corresp., have to replace scheme-th. fibre products S by derived fiber product S^L.

Cor. (by induction): Get $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}(G, K_0) \longrightarrow \mathrm{Corr}_S(O_{S_{K_0}} \overset{S}{\times} S_{K_0})$

+ optimalité

extends generic fiber