

Paris 11 Mai 26

## Correspondances entières de Hecke

Görke, He, inspiré par Fakhruddin-Pilloni

### § Motivation

Soit  $(G, X)$  donnée de Shimura  $\mapsto$

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) = G(\mathbb{Q}) \backslash [X \times \mathbb{A}_f / K]$$

tour de var. alg. quasi-proj., définie sur  $\mathbb{E}$ .

Correspondances de Hecke : soit  $g \in \mathbb{A}_f$ .

Pour  $K' \subset K, g \in K'g^{-1}$ ,

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & \mathrm{Sh}_{K'} & \\ \swarrow 1 & & \searrow g \\ \mathrm{Sh}_K & & \mathrm{Sh}_K \end{array}$$

$\mapsto \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f), K) \rightarrow \mathrm{Corr}(\mathrm{Sh}_K)$ .

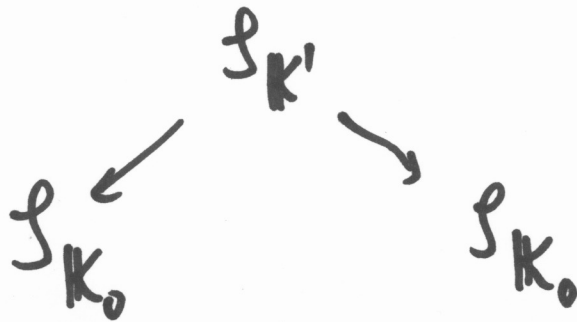
Fixons  $p$ . Soit  $v | p$ .

$$G = G \otimes \mathbb{Q}_p, \quad E = E_v.$$

Soit  $K_0 = K^p \cdot K_0$ , où  $K_0 = \text{hs max.}$

On "a" modèle canonique entière  $S_{K_0}$ ,  
 liée sur  $\mathcal{O}_E$ .

On voudrait étendre sur  $\mathcal{O}_E$  le toit (\*)  
 en



Obstacle:  $K'$  n'est pas parahorique (pour  
 $K' = K^p$ .  $K'$  avec  $K'$  parahorique c'est bon).

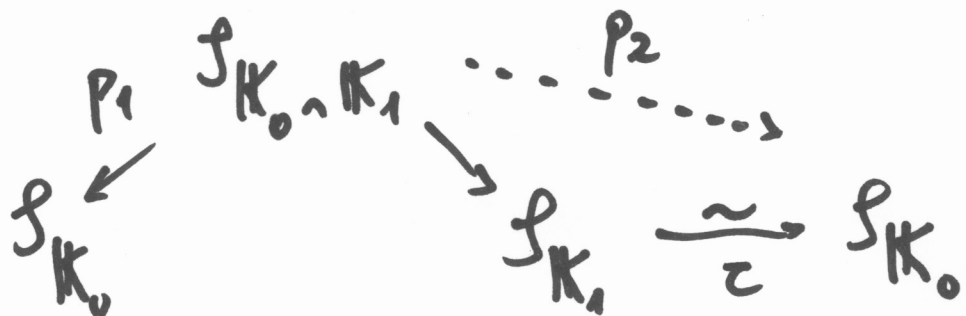
§ Construction de corresp. de Hecke entière

On fixe  $Jwahon \subset K_0$  ms parah. std..

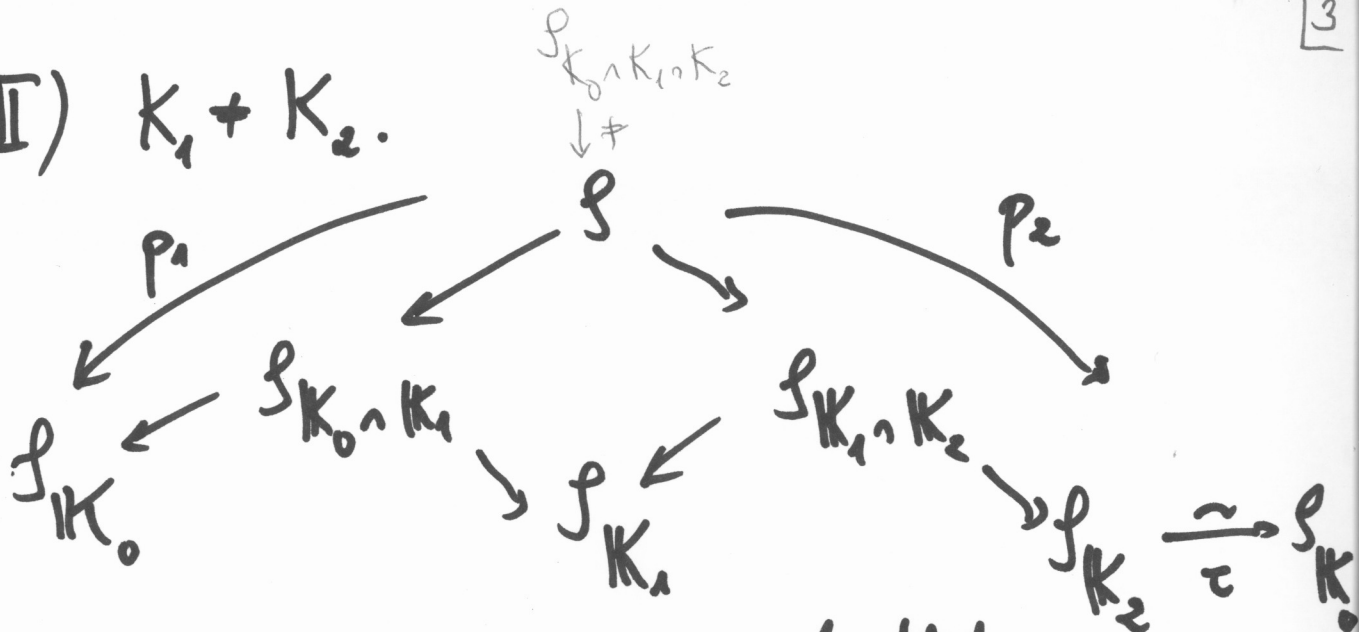
Soit  $(K_1, K_2)$  une paire de parah.  
 std. maximales, avec  $K_2$  hs. et  $K_1 \neq K_0$ .

Deux cas

(I)  $K_1 = K_2$ . Alors corresp. entière



$$(I) K_1 + K_2.$$



En fibre gén., ces corresp. de Hecke sont l'image des elts dans  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(L(\mathbb{Q}), K_0)$  suivants

$$(I) \quad \mathbb{1}_{K_0 K_1} \cdot \mathbb{1}_z \quad \underline{\text{minuscule}}$$

$$(II) \quad \mathbb{1}_{K_0 K_1} \cdot \mathbb{1}_{K_1 K_2} \cdot T_z.$$

Ces éléments sont appelés fondamentaux.

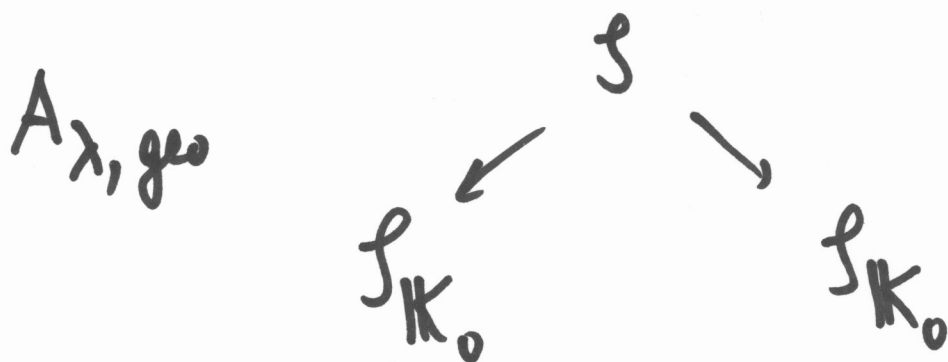
On va utiliser le théorème suivant.

Th.: Il existe une base  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in X_r(A)^+}$  <sup>atomiques</sup> de  $\mathcal{H} \otimes \mathbb{Z}_p$  avec les propriétés suivantes

- matrice de ch't de bases à des bases standards  $(T_\lambda, S_\lambda, R_\lambda)$  est triangulaire

- 4
- $A_{\lambda_1} \cdot A_{\lambda_2} = A_{\lambda_1 + \lambda_2}$
  - $\lambda$  minuscule  $\Rightarrow A = \text{ell. minusc. fondam.}$   
 $\parallel \lambda$   
 $T_\lambda = S_\lambda = R_\lambda$  modulo  $\mathbb{Z}_p [X_n (\text{cette})]$
  - $G$  type classique. Alors si  
 $\lambda$  indécomposable  $\Rightarrow A = \text{ell. fondam.}$   
 $\lambda$  modulo  $\text{---}$ .

Par itération, on obtient (pour  $G$  classique)



$\Sigma$ : Cette corresp. dépend à priori de la présent. de  $\lambda$  par des indécompos., on obtient

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}_p} \longrightarrow \text{Corr}(\mathcal{S}_{K_0})_{\mathbb{Z}_p}.$$

On peut relier les corresp. géométriques en  
Corresp. cohomologique :

Th. : (i) La corresp.  $A_{\lambda, geo}$  se relève en

$$A_{\lambda} : p_1^* \mathcal{O} \rightarrow p_2^* \mathcal{O},$$

et définit

$$\tilde{\mathcal{H}}_{Z_p} \rightarrow \text{Corr}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1, K})$$

"intégralité"

avec fibre générique la corresp. coh. de Hecke classiques.

Rem. 1 : On procède par récurrence - mais pour pouvoir définir la compos. de corresp. coh., il faut des hypothèses de ~~type~~ Tor-indép. ou remplacer les produits fibrés de schémas par leur variante obviée.

{ (ii) Mais  $p^{-1}A_{\lambda}$  n'est pas une corresp. coh. entière  
"optimalité"

Rem. 2 : Le th. reste valable pour toute  $(G, X)$  si

(\*) modèle integral canonique existe et admet (LMD),  
+ densité du lieu  $\mu$ -ordinaire.

### § Extension aux fibrés vectoriels automorphes

Soit  $T \subset B \subset G$  et  $\mu \in X_*(T)$  repés de  $\{\mu_X\}$ .

Soit  $M \subset P$  paire parah. corresp. à  $\mu$ . (sur  $E$ ).

Soit  $\kappa \in X^*(T)^{M\text{-dom.}}$ , avec  $V = V_\kappa$  rep. irred. de  $M$ .

$\mapsto$  fibré vect. homogène sur  $F_\mu$

$\mapsto$  — sur  $Sh_{\kappa, E}$ , avec relèvement des

corresp. géomstr. de Hecke en des corresp. cohom.

On a une extension "naturelle" de  $V_{\kappa_0}$  sur  $S_{\kappa_0} : \mathcal{V}_{\kappa_0}$

Pour  $\lambda \in X_*(A)^+$ , on pose

$$C_\lambda(\kappa) = \langle \lambda, \omega(\kappa) - \rho \rangle + \langle \lambda, \beta(\kappa) \rangle \in \mathbb{Z}.$$

J'ai  $\rho = \frac{1}{2} \sum \alpha$ ,  $\omega(\kappa) = (\kappa + \rho)$   $G$ -dom.

$\beta(\kappa) =$  certaine somme de racines positives.

"Correction"  $\geq 0$  et  $= 0$  si  $\lambda$  minuscule ou  
( $= 0$  pour  $GL_n$ ,  $> 0$  pour  $GL_p$ )  $\kappa + \rho$  régulier.

Conjecture : Après multipl. avec  $C_\lambda(\kappa)$  (intégralité)

la corresp. coh.  $A_\lambda$  sur  $V_{\kappa_0}$  s'étend à  $\mathcal{V}_{\kappa_0}$ .

Si  $\lambda$  indécomp., alors  $\mathcal{V}_{\kappa_0}^{-1}$  ne s'étend pas. (optimalité)

Th.: Soit  $(R, X)$  une paire de Shimura du type Kottwitz-PEL. Alors

- i) intégralité valable après restriction à l'ouvert accessible. (soit Komposition)
- ii) Optimalité valable si la cond. suivante sur  $K$  est vérifiée:

Tout  $w \in W_0$  avec  $w(\kappa + \alpha) = \alpha(\kappa)$  est contenu dans  $W_0^\sharp \cdot W_{0, \mu}$ .

Remarque sur les opérateurs de Hecke: Les corresp.

de Hecke définissent

$$\tilde{H}_{\mathbb{Z}_p} \rightarrow \text{End} (R\Gamma(S_{K_0}, \mathcal{V}_{K_0}))$$

(ou plutôt leur version de dimension  $R\tilde{\Gamma}$ ).

Fixons  $i$  et formons le  $\mathbb{Z}_p$ -reson

$$\tilde{H}_{\mathbb{Z}_p}^i = \text{Im} (\tilde{H}^i(S_{K_0}, \mathcal{V}_{K_0}) \rightarrow \tilde{H}^i(S_{K_0}, \mathcal{V}_{K_0}))$$

$\langle \lambda, \alpha(\kappa) - \alpha \rangle \cdot S_\lambda$

Conjecture (FP):  $\tilde{H}_{\mathbb{Z}_p}^i$  stable par  $P_{C_\lambda(\kappa)} \cdot S_\lambda$ .

estimées sur val. à la Clozel-Lafforgue

Notre conj. implique:  $P_{C_\lambda(\kappa)} \cdot A_\lambda$ .

Conjecture: Les elts  $P_{\langle \lambda, \alpha(\kappa) - \alpha \rangle} \cdot S_\lambda$  et  $P_{\langle \lambda, \alpha(\kappa) - \alpha + \beta(\kappa) \rangle} \cdot A_\lambda$ .

stabilisent les mêmes réseaux.

Rem.: On peut conjecturer que

$$\mathcal{H}_K^A \subset \mathcal{H}_K^S.$$

Mais l'inégalité peut être strict (eg.  $Sp_6$ ). Tout de même, cela ne contredit pas la conjecture.

Rem.: Si  $K$  est  $\mathbb{Q}$ -régulier, alors  $\mathcal{H}_K^A = \mathcal{H}_K^S$  - donc dans ce cas, notre conj. implique directement FP.

FP  $\Rightarrow$  estimations sur valeurs  $p$ -adiques des valeurs propres des op. de Hecke. Si  $K$  régulier, alors ces estimations sont identiques aux estimations démontrées de Clozel-Lafforgue.

such that  $\bullet$  smooth + large <sup>over  $\mathcal{O}_E$</sup> .

$\bullet$  (amazingly):  $\pi_{K',K}(U_{K'}) \subset U_K$ .

Now for any map (separ., f.t.) between smooth schemes /  $\mathcal{O}_E$

$$f: U' \rightarrow U$$

get  $f^* \mathcal{O}_U \rightarrow f^! \mathcal{O}_U$  (Groth-duality).

Lemma (Bhatt): Consider diagram of (separ. f.t.)

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \end{array} \quad \text{same dimension}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ U' & \xrightarrow{f_U} & U \end{array}, \quad \text{where } U' \text{ large in } X'$$

Assume  $X$  CM. Then any map  $f_U^* \mathcal{O} \rightarrow f_U^! \mathcal{O}$  extends uniquely to  $f^* \mathcal{O} \rightarrow f^! \mathcal{O}$ .

Remark: In order to define the composition of coh.

corresp., have to replace scheme-th. fibre product  $S$

by derived fiber product  $S^L$ .

Cor. (by induction): Get  $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}_p}(G, K_0) \rightarrow \text{Corr}_S(\mathcal{O}_{S_{K_0}^L} \rightarrow \mathcal{O}_{S_{K_0}^L})$   
 extends generic fiber