

Modèles entiers des var. de Shimura locales

avec Pappas.

1) Motivation

• var. de Sh. globales: $A(G, X) \rightsquigarrow (Sh_K(G, X) / E = E(G, X))$

tour de var. alg., à morphismes de transition fini étale $K \subset G(A_f)$

De plus, fixons p et $K = K^! K_p$ avec K_p quasi-parahorique,
alors pour $v|p$ on devrait avoir un bon modèle $Sh_K(G, X) / \mathcal{O}_{E, v}$

• analogue local: Soit p fixé. Donnée de Sh. local $\tilde{a}_f$

(G, b, μ) , où

• $G / \mathbb{Q}_p$ réductif

• $b \in G(\check{\mathbb{Q}}_p)$

• $\mu = \text{cl. de conj. de cocar. unimodales.}$

Scholze-Weinstein (2020) $\rightsquigarrow (Sh_K(G, b, \mu) / \check{E})_{K \subset G(\mathbb{Q}_p)}$

tour de var. rigide-anal., à morph. de transition $f + \epsilon$.

(prédit par Rapoport-Zink).

Contraste entre les deux mondes:

• Cas global: descr. explicite de l'ens. des points. Mais
seulement dans les cas PEL descr. modulaires (Deligne, motifs)

- Cas local : pas descr. explicite des points, mais descr. modulaire dans tous les cas - mais pas motivique. (Shimura p-adiques)

Def : Un schéma en groupes $G/\mathbb{Z}_p$ ^{quasi-}parahorique = G lisse affine et G° parahorique avec $G = G^\circ \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$.

$$G \mapsto K = G(\mathbb{Z}_p) \subset G(\mathbb{Q}_p).$$

Conjecture (Scholze) : Soit G quasi-parahorique. On étend de façon tautologique le pb. de modules pour $\mathrm{Sh}_K(G, b, \mu)$ sur $\mathcal{O}_{\check{E}}$. Alors ce foncteur est représ. par un schéma formel $\mathcal{M} = \mathcal{M}_G(b, \mu)$ qui est normal + plat loc. f.t.f. / $\mathcal{O}_{\check{E}}$. Si G parahorique, alors

$$\mathcal{M}^{\mathrm{rig}} = \mathrm{Sh}_K(G, b, \mu).$$

Exemple (non-trivial) : Soit $G = \mathrm{GL}_n$, $\mu = (1^{(d)}, 0^{(n-d)})$, $G = \mathrm{GL}(\Lambda_0)$. Partant de $b \mapsto$ module de Drinfeld $(\check{\mathbb{Q}}_p^n, b\sigma) \mapsto$ gpe p -div. / $\overline{\mathbb{F}}_p$, de hauteur n et dim = d . $\mapsto \mathcal{M} = \mathrm{RZ}$ -esp. corresp. = schéma formel / $\mathrm{Spf} \check{\mathbb{Z}}_p$, esp. de paramètres de $(X, \mathcal{Q})$, où

- X comme ci-dessus
- $\mathcal{Q}$ encadrement

Alors $\mathrm{Sh}_{K_0}(G, b, \mu) = \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}.$

Les autres membres de la tour par str. de niveau mod K .

2) Résultat principal

Théorème : Soit (G, h, p) et g quasi-parah. On suppose $p \neq 2$ et (G, p) de type abélien. Alors le foncteur de Scholze est repr. par $M = M_g(h, p)$. De plus :

a) structure locale : pour $x \in M(\bar{\mathbb{F}}_p) \exists y \in M_{g, p}^{\text{loc}}(\bar{\mathbb{F}}_p)$ t.q.

$$M_x^\wedge \simeq M_y^{\text{loc}^\wedge}$$

b) fibre générique : Soit

$$\Pi_g = \text{Ker}(H_{\text{et}}^1(\mathbb{Z}_p, g) \rightarrow H_{\text{et}}^1(\mathbb{Q}_p, G)) \text{ gr ab. fini}$$

Alors

$$M^{\text{rig}} \simeq \coprod_{\bar{\beta} \in \Pi_g} \text{Sh}_{K_{\bar{\beta}}}(G, h, p).$$

Remarques : • On a aussi un résultat pour $p=2$.

• $M_{g, p}^{\text{loc}}$ = modèle local au sens de Scholze ou Pappas-Zhu
 - schéma proj. plat sur $\mathcal{O}_E$, normal à fibre spécial réduit, CM pour $p \neq 2$.

(existence par Auschik, Gleason, Haines, Lawrence, Richarz ;
 connu explicitement de beaucoup de cas : de Jang, Görtz, Rapoport-Zink, Smithling).

• Pour $\bar{\beta} \in \Pi_g \mapsto$ quasi-parah. $g_{\bar{\beta}}/\mathbb{Z}_p$ t.q. $g_{\bar{\beta}}(\check{\mathbb{Z}}_p)$ conj. à $g(\check{\mathbb{Z}}_p)$.

Si g parahorique, alors $\Pi_{\bar{\beta}}$ trivial.

• remisc. à la formule de Kottwitz $\text{Ker}(H^1(\mathbb{Q}, G) \rightarrow \Pi H^1(\mathbb{Q}_p, G))$

Explication type abélien:

- (G, μ) de type de Hodge $\bar{\sigma}_f \iff \exists i: (G, \mu) \hookrightarrow (GL_n, \mu_d)$
- (G, μ) de type abélien $\bar{\sigma}_f \iff \exists (G_1, \mu_1)$ de type de Hodge +
iso $(G_{1,ad}, \mu_{1,ad}) \simeq (G_{ad}, \mu_{ad})$.

Observation: G essent. modérément ramifié $\bar{\sigma}_f$ $\iff$ écrivons $G_{ad} = \prod_i \bar{G}_i$,
avec $\bar{G}_i$ simple et $\bar{G}_i = \text{Res}_{F_i/\mathbb{Q}_p} \bar{H}_i$, avec $\bar{H}_i$ absolu. simple.

Condition: $\bar{H}_i$ déploie sur ext. modérément ramif. de F_i , $\forall i$.

Soit (G, μ) de type automatique pour $p \geq 5$
abélien t.q. $\mu_{ad,i}$ non-triv. $\forall i$. Soit aussi $p \neq 2$.

Alors G essent. modérément ramifié!

Cas crucial: $p=3$, G trilitaire. Dans ce cas, due à Serre
(il y a 35 ans!).

Renforcement integral du point b) du th. principal.

Théorème: On a une action de $\pi_0(\mathcal{G}_\beta)^\sigma$ sur $M_{\mathcal{G}_0}/(\mathfrak{h}, \mu)$, et

$$M_{\mathcal{G}} \simeq \coprod_{\beta} M_{\mathcal{G}_0} / \pi_0(\mathcal{G}_\beta)^\sigma$$

Remarques:

- redonne le point b), car $(M_{\mathcal{G}_0} / \pi_0(\mathcal{G}_\beta)^\sigma)^{\text{rig}} = \text{Sh}_{K_\beta}(G, \mathfrak{h}, \mu)$
 $K_\beta = \mathcal{G}_\beta(\mathbb{Z}_p)^\sigma$
- donc reduct. de quasi- parah. au parahorique.

3. Le foncteur de Scholze

On considère la cat. $\text{Perfd}_{\overline{\mathbb{F}}_p} = \text{cat. des esp. perf'd sur } \overline{\mathbb{F}}_p$,
i.e. opposé à alg. de Tate, en même temps $\overline{\mathbb{F}}_p$ -alg. parfaite

Foncteur assoc. à $S \mapsto (S^\#, (\mathcal{P}, \phi_{\mathcal{P}}), \mathcal{Q})$, où

- $S^\# = \text{unilt de } S \text{ sur } \text{Spa } \mathcal{O}_{\check{E}}$

- $(\mathcal{P}, \phi_{\mathcal{P}})$ - $\mathcal{G}$ -shévale sur S avec patte le long $S^\#$ borné par μ ,

i.e. $\mathcal{G}$ -foncteur sur $S \times \text{Spa}(\mathcal{O}_{\check{E}}) = \text{Spa } W_{\mathcal{O}_{\check{E}}}(S) - \{[\omega] = 0\}$

$$+ \phi_{\mathcal{P}} : \text{Frob}_S^*(\mathcal{P})|_{S \times \text{Spa}(\mathcal{O}_{\check{E}}) \setminus S^\#} \longrightarrow \mathcal{P}|_{\text{---}}$$

mono + borné par μ .

- $\mathcal{Q}$ encadrement

Pour $\text{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p)}(\mathcal{G}, \mathcal{G}, \mu)$, on se restreint aux $S^\#$ sur $\text{Spa } \check{E}$.

4. Démonstrations

- Cas de base: $(\mathcal{G}_L, \mathcal{G}, \mu, \mathcal{G}(\Lambda_0))$ comme ci-dessus

- Cas crucial: $(\mathcal{G}, \mu)$ de type de Hodge et $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}(\Lambda_0)$ l.g.

$\mathcal{G}(\mathbb{Z}_p) = \mathcal{G}(\mathbb{Q}_p) \cap \mathcal{G}(\Lambda_0)$. Dans ce cas on utilise

Kisin-Zhou, basé sur la théorie des displays de Zink
(ici $p \neq 2$)

- Cas général: par dévissage (en $\mathcal{G}$ et en $\mathcal{G} \text{ ad-iso}$)