Exposé : La conjecture de l'intersection arithmétique

Notations : F/F_0 corps CM, $F = F_0[\sqrt{\Delta}]$, $\Delta << 0$.

$\Phi = \{ \varphi : F \to \mathbb{C} \mid \varphi(\sqrt{\Delta}) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot \sqrt{-1} \}$ CM-type corresp.

$\varphi_0 \in \Phi$ elt distingué.

W = F-esp. hermitien, t.q. $\mathrm{sgn}(W_{\varphi_0}) = (1, n-1)$, $\mathrm{sgn}(W_\varphi) = (0, n)$.

$G = \mathrm{Res}_{F_0/\mathbb{Q}}(U(W))$, et $h_G : \mathbb{C}^\times \to G(\mathbb{R})$ donné en coord. par

$$h_G(z)_{\varphi_0} = \mathrm{diag}(z/\bar{z}, 1, \dots, 1), \quad h_G(z)_\varphi = 1.$$

$\Rightarrow$ get Shimura variety $Sh(G, h_G) / F \underset{\varphi_0}{\hookrightarrow} \mathbb{C}$. compact si $n>2$

Let $u \in W$ with $(u,u)_\varphi < 0$ $\forall \varphi \rightsquigarrow W^\flat, H, h_G$ and

$$(H, h_G) \subset (G, h_G) \text{ and } Sh(H, h_H) \subset Sh(G, h_G) \text{ and}$$

$$Sh(H, h_G) \subset Sh(H, h_G) \times Sh(G, h_G) = Sh(H \times G, h_{H \times G})$$

Use Hecke corresp. to construct

$$z \in Ch_0^{n-1}(Sh(G \times H)) \quad \text{coh. trivial rational Chow gp}$$

Bloch-Beilinson pairing $Ch_0^{n-1} \times Ch_0^{n-1} \to \mathbb{R}$, hence z defines

$$l : Ch_0^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Conjecture (AGGP): Let π be cohom. "generic" auto. of $H \times G(\mathbb{A})$. Equiv. :

(i) $l \mid Ch_0^{n-1}[\pi_f] \neq 0$

Rankin-Selberg of $BC(\pi)$.

(ii) $\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, \mathbb{C})$ 1-dim. and $L'(\frac{1}{2}, \pi, R) \neq 0$.

The problem is : uses too many conjectures – hopeless.

Soient

$$G^{\mathbb{Q}} = \{ g \in R_{F_0/\mathbb{Q}}(GU(W)) \mid c(g) \in \mathbb{G}_m \}$$

$$Z^{\mathbb{Q}} = \{ \cancel{g}\ z \in \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathbb{G}_m) \mid \mathrm{Nm}_{F/F_0}(z) \in \mathbb{G}_m \}$$

$$\tilde{G} = \{ (z,g) \in Z^{\mathbb{Q}} \times G^{\mathbb{Q}} \mid \mathrm{Nm}(z) = c(g) \}$$

$$h_{\tilde{G}} = h_{Z^{\mathbb{Q}}} \times h_G, \quad \text{ou } h_{Z^{\mathbb{Q}}} : \mathbb{C}^\times \to Z^{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) \text{ diagonal (via } \Phi).$$

Soit $E = E(\tilde{G}, \tilde{h})$ defini par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E) = \{ \sigma \mid \sigma \circ \Phi = \Phi,\ \sigma \circ \varphi_0 = \varphi_0 \}$

- sauf si $n = 2$, E est le corps reflexe, et
- on a $\varphi_0 : F \hookrightarrow E$, mais en général strict.

<u>Problèmes de modules</u> sur E ($(\tilde{G}, \tilde{h})$ type PEL).

- M_0 : $(A_0, \iota_0, \lambda_0)$ avec

$$\mathrm{char}(\iota_0(a) \mid \mathrm{Lie}\, A_0) = \prod_{\varphi} (T - \varphi(a))$$

étale + fini

champs DM, meme $\mathcal{M}_0 / \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_E$ avec $|\mathcal{M}_0| = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_H$

→ <u>sauf si</u> $M_0 = \emptyset$! Alors on doit utiliser une variante ($\mathrm{Ker}\, \lambda_0 = A[\mathfrak{a}]$).

- Fixons $K_G \subset G(\mathbb{A}_f)$. Alors

$M_{K_G}(\tilde{G}) = (A_0, \iota_0, \lambda_0; A, \iota, \lambda, \bar{\eta})$ où (A, ι, λ) à isogénie près avec

$$\mathrm{Char}(\iota(a) \mid \mathrm{Lie}\, A) = (T - \varphi_0(a)) \cdot (T - \bar{\varphi}_0(a))^{n-1} \cdot \prod_{\varphi} (T - \bar{\varphi}(a)

et

$$\bar{\eta} : \hat{V}(A_0, A) \simeq W \otimes \mathbb{A}_{F,f} \quad \text{isométrie mod } K_G.$$

Ici

$$\hat{V}(A_0, A) = \mathrm{Hom}_F(\hat{V}(A_0), \hat{V}(A)) \quad \text{esp. hermitien !}$$

<u>Proposition</u> : $M_{K_G}(\tilde{G})$ est un DM-champs lisse de dimension $n-1$ sur $\mathrm{Spec}\, E$. En plus $M_{K_G}(\tilde{G}) \otimes_E \mathbb{C} = Sh_{K_G}(\tilde{G}, h_{\tilde{G}})$.

Pour $u \in W$ $\rightsquigarrow$ $W^\flat$, H, $(\tilde{H}, h_{\tilde{H}})$. On obtient pour $K_H \subset H(\mathbb{A}_f) \cap K_G$,

$$\delta : M_{K_H}(\tilde{H}) \longrightarrow M_{K_G}(\tilde{G})$$
$$(A_0, A^\flat, \bar{\eta}^\flat) \longmapsto (A_0, A, \bar{\eta}) \quad \text{où}$$
$$A = A^\flat \times \bar{A}_0 \quad \text{avec} \quad \lambda = \lambda^\flat \times (u,u)\cdot \mathrm{id}_{\bar{A}_0},$$
$$\bar{\eta} = \bar{\eta}^\flat \times (\mathrm{id}_{\hat{V}(A_0,A)} \mapsto u).$$

On obtient immersion fermée (graphe)

$$\Delta : M_{K_H}(\tilde{H}) \hookrightarrow M_{K_H}(\tilde{H}) \times_{M_0} M_{K_G}(\tilde{G}) = M_{K_{HG}}(\tilde{H}\tilde{G})$$

On va former une version <u>semi-globale</u> dans le cas <u>de bonne réduction</u>

<u>Notations</u> : • p ~~2~~ nombre premier, v_0 non-ramifié sur p, déployé ou inerte dans F.

$\mathrm{sgn}_{v_0}(W) = 1$.

• $p \neq 2$ si $\exists\, v \mid p$ non-décomposé en F.

• $\Lambda_v \subset W_v$ avec $\Lambda_v \subset \Lambda_v^\vee \subset \pi_v^{-1} \Lambda_v$, $\Lambda_{v_0} = \Lambda_{v_0}^\vee$.

On pose $K_{G,p} = \prod_{v|p} K_{G,v}$, avec $K_{G,v} = \mathrm{Stab}(\Lambda_v)$.

$$K_G = K_G^p \cdot K_{G,p}.$$

- On fixe ν dans E avec $\nu|_{F_0} = v_0$.

<u>Problème de modules sur</u> $\mathcal{O}_{E,(\nu)}$: $(A_0, \iota_0, \lambda_0, A, \iota, \lambda, \bar{\eta}^p)$

où A à isogénie premier à p (sinon comme avant), et

$$\bar{\eta}^p : \hat{V}^p(A_0, A) \simeq W \otimes \mathbb{A}^p_{F,f} \mod K_G^p.$$

<u>On impose les conditions suivantes</u> : Soit

$$A[p^\infty] = \prod_{v|p} A[v^\infty].$$

<u>On demande alors</u> : $\mathrm{Ker}\,\lambda_v \subset A[\pi_v]$, $|\mathrm{Ker}\,\lambda_v| = \#(\Lambda_v^\vee/\Lambda_v)$.

En plus, pour $v \neq v_0$:

- $\mathrm{sgn}(r_v)$: $\mathrm{inv}_v(A_0, A) = \mathrm{inv}_v(W)$ <u>specification</u>
- $A[v^\infty]$ vérifie la <u>condition de Eisenstein</u> (rel. à r_v) : <u>platitude</u>
  si w/p ramifié, de degré > 2.

<u>Proposition</u> : $\mathcal{M}_{K_G}(\tilde{G})$ est DM-champs lisse de dim. $n-1$ sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{E,(\nu)}$. Sa fibre générique est iso à $M_{K_G}(\tilde{G})$.

Soit $u \in W$ t.q. $(u,u) \in \mathcal{O}^\times_{F_0,(p)}$, et $\Lambda_v = \Lambda_v^\flat \oplus \mathcal{O}_{F,v} u$.

On obtient sur $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{E,(\nu)}$ pour $K_H^p \subset K_G^p$,

$$\Delta : \mathcal{M}_{K_H}(\tilde{H}) \hookrightarrow \mathcal{M}_{K_H}(\tilde{H}) \times_{\mathcal{M}_0} \mathcal{M}_{K_G}(\tilde{G}) = \mathcal{M}_{K_{HG}}(\widetilde{HG}$$

Dimension moitié ! $(n-1 \subset 2(n-1))$.

~~Lemme~~ <u>Définition</u> : Soit $f = \otimes f_\ell$ tenseur pur dans l'algèbre de Hecke premier à p, $f \in \mathcal{H}^p(\widetilde{HG}(\mathbb{A}_f), K_{HG}^{\sim})$. Soit $\lambda | \ell$ une place de F_0. Alors f à support ~~supp(f)~~ <u>régulier en</u> λ si

$$\mathrm{supp}(f_\ell) \subset U(W_\lambda)_{rs} \times \prod_{\lambda' \neq \lambda} U(W_{\lambda'}).$$

<u>Lemme</u> : Soit f régulier en λ. Alors

$$|R(f)\cdot\Delta| \cap |\Delta| \qquad \text{propre sur } \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E,(\nu)}).$$

En plus, si v_0 décomposé, alors $\cap = \emptyset$ a support dans $(\mathcal{M}\otimes k(\nu))^{ss}$.

Maintenant on varie ν (sur v_0 fixé). On ~~pose~~ définit

~~$z_\nu = \mathrm{vol}(K_H)\cdot\Delta_\nu$ ... de K_H.~~

~~et~~

$$\langle R(f)\Delta_\nu, \Delta_\nu\rangle \in \mathbb{Q} \text{ par extension } \mathbb{Q}\text{-linéaire de } \chi \text{ de } \otimes^{\mathbb{1}}.$$

Posons

$$\mathrm{Int}_{v_0}(f) = \sum_{\nu | v_0} \langle R(f)\Delta_\nu, \Delta_\nu\rangle \log q_\nu.$$

Même f.

<u>Conjecture</u> (inspirée de W. Zhang) : Soit $f' = \otimes f'_v$ un <u>transfer lisse</u> de f à $G'(\mathbb{A}_{F,f})$ (ici $G' = GL_{n-1} \times GL_n / F$).

On suppose ~~que~~ f' régulier en λ et que $f'_{v_0} = \mathbb{1}_{G'(\mathcal{O}_{F,v_0})}$.

Alors

$$\mathrm{Int}_v(f) = \partial J_{v_0}(f').$$

Ici ∂J_{v_0} est une certaine fonctionelle sur $C_c^\infty(G'(\mathbb{A}_{F_0,f}))$.

Si f' est regulier en une place, alors

$$\partial J_{v_0}(f') = \sum_{\gamma \in G'(F_0)_{rs} / H'_{1,2}(F_0)} \partial Orb(\gamma, f'_{v_0}) \cdot \prod_{v \neq v_0} Orb(\gamma, f'_v).$$

<u>Theorème</u> (inspiré de W. Zhang): La conjecture valable pour $n \leq 3$.