

Paris, Mars 2011

Exposé : Sur le LFA de Wei Zhang

Le LF est lié à l'approche par la formule des traces relatives à la conj. de Gross-Prasad (Jacquet-Rallis). Le LFA est lié à la conj. de Gross-Prasad arithmétique.

2 excuses : a) je ne vais pas dresser un tableau global.

b) l'exposé est 'premature', pas tout est démontré - je vais énoncer des "théorèmes désirés" (Walds).

D'abord on va énoncer le LF.

$F =$ ext. finie de $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}_F$, π , $k = F/\pi$.

E/F quadr. non-ramifié, $\mathcal{O}_E$, k' ; $\sigma \in \text{Gal}(E/F)$.

Soit $n \geq 1$. Soit $v = (0, \dots, 0, 1) \in F^n \mapsto GL_{n-1} \hookrightarrow GL_n$.

Définition: Un élément $g \in GL_n(E)$ est reg. semi-simple (r.s.)

(par rapport à l'action de $GL_{n-1}(E)$ par conjugaison) si

(i) $g^i v$, $i = 0, \dots, n-1$ est lin. indép.

(ii) $\text{tr}_v g^i$, _____

C'est équiv. à : $\text{Stab}_{GL_{n-1}(\bar{E})}(g) = \{e\}$ et $GL_{n-1}(\bar{E}) * g$

est Zariski-fermé dans $GL_n(\bar{E})$.

Invariants numériques de $g \in GL_n(E)_{\text{rs}}^*$: $\begin{cases} \text{charg}(T) \in E[T] \\ \text{tr}_v g^i v, i = 1, \dots, n-1. \end{cases}$

Alors: Deux elts de $GL_n(E)_{rs}$ sont conj. sous $GL_{n-1}(E)$ si les invariants sont identiques.

Soit

$$S(F) = S_n(F) = \{ \delta \in GL_n(E) \mid \delta \cdot \sigma(\delta) = 1 \}.$$

Alors $GL_{n-1}(F)$ agit, et deux elts de $S(F)_{rs}$ sont conjugués sous $GL_{n-1}(F)$ si ils sont conjugués par $GL_{n-1}(E)$.

Soit maintenant $J \in \text{Hom}_{n-1}(E/F)$. On a une injection

$$U(J)(F) \hookrightarrow U(J \oplus 1)(F)$$

où on ajoute u avec $|u_p|=1$.

On considère $U(J \oplus 1)$ comme sous-gpe de $GL_n(E)$, compar. avec $U(J) \subset GL_{n-1}(E)$. Alors on pose

$$U(J \oplus 1)(F)_{rs} = (U(J \oplus 1)(F)) \cap GL_n(E)_{rs}.$$

Le groupe $U(J)(F)$ agit.

Définition: Soit $\gamma \in S(F)_{rs}$ et $g \in U(J \oplus 1)(F)_{rs}$. Alors

$\gamma \leftrightarrow g$ (se correspondent) $\nexists$ conjugués sous $GL_{n-1}(E)$
 $\Leftrightarrow$ mêmes invariants.

Ne dépend de l'orbite de $\begin{cases} \gamma \text{ sous } GL_{n-1}(F) \\ g \text{ sous } U(J)(F). \end{cases}$

Lemme: On a une bijection entre espaces d'orbites

$$[U(J \oplus 1)(F)_{rs}] \sqcup [U(J \oplus 1)(F)_{rs}] \simeq [S(F)_{rs}].$$

Remarque: On peut préciser d'où vient $\gamma \in S(F)_n$: regarder
 $v(\det(\frac{1}{v} \gamma^{i+j} v))_{i,j=0, \dots, n-1}$.

Pour $\gamma \in S(F)_n$ et $f \in C_c^\infty(S(F))$, soit

$$O_\gamma(f) = \int_{GL_n(F)} f(h^{-1} \gamma h) \eta(h) dh \quad \text{intégrale pondérée,}$$

où $\eta = \eta_{E/F}$ et $\text{vol}(S(\mathcal{O}_F)) = 1$.

De même, pour $g \in U(I_0 \oplus 1)_n$ et $f \in C_c^\infty(U(I_0 \oplus 1)(F))$, soit

$$O_g(f) = \int_{U(I)(F)} f(h^{-1} g h) dh, \quad \begin{array}{l} \text{Stab}_{U(I \oplus 1)(F)}(\Lambda_0) \\ \downarrow \\ K_n U(I)(F) \end{array}$$

où $\text{vol}(K') = 1$, où $K' = \text{Stab}_{U(I)(F)}(\Lambda_0)$, $\Lambda_0^* = \Lambda_0 \oplus u$

Théorème (Xun, Gordon) (= ex-conj. de Jacquet-Rallis): Pour $\gamma \in S(F)_n$

$$O_\gamma(1_S) = \begin{cases} w(\gamma) \cdot O_g(1_K) & \text{si } \gamma \leftrightarrow g \in U(I_0 \oplus 1)(F)_n \\ 0 & \text{si } \gamma \leftrightarrow g \in U(I, \theta 1)(F)_n \end{cases}$$

Ici le signe $w(\gamma)$ est donné par

$$w(\gamma) = (-1)^{v(\det(\gamma^{i+j} v))_{i,j=0, \dots, n-1}}$$

Comme toujours une intégrale orbitale "couple" des résaux.

Ici, la première identité est équivalente à:

Soit $L = L_g = \langle u, gu, \dots, g^{n-1}u \rangle_{\mathcal{O}_E}$. Alors

$$\omega(g) \cdot \sum_{\{\Lambda \mid L \subset \Lambda \subset L^*, g\Lambda = \Lambda, \Lambda^c = \Lambda\}} (-1)^{\ell(\Lambda/L)} = \omega(g) \cdot \sum_{\{\Lambda \mid L \subset \Lambda \subset L^*, g\Lambda = \Lambda, \Lambda^* = \Lambda\}} 1$$

$\tau = \text{inv. anti-lin, d\acute{e}p de } g$

Passons au LFA: Pour $s \in \mathbb{C}$, on pose

$$O_g(f, s) = \int_{GL_{n-1}(F)} f(L^{-1}gh) \eta(h) \cdot |\det h|^s dh.$$

et

$$O'_g(f) = \left. \frac{d}{ds} O_g(f, s) \right|_{s=0}.$$

Conjecture (Wei Zhang): Pour $g \in S(F)_n$ avec $g \leftrightarrow g \in \mathcal{U}(\mathbb{I}, \theta)(F)_n$

on a

$$O'_g(1_S) = -\omega(g) \cdot \langle \Delta(\mathcal{W}_{n-1}), (1, g) \cdot \Delta(\mathcal{W}_{n-1}) \rangle.$$

Explication dans le cas $F = \mathbb{Q}_p$: Soit

$\mathcal{W}_n =$ espace de modules formels des (X, z, λ, α)
sur $\text{Spf } W$, où $W = W(\bar{\mathbb{K}})$,

où $X =$ gpe p -div. de hauteur $2n$

$z: \mathcal{O}_E \rightarrow \text{End}(X)$ tq. $\text{char}_{z(a)|\text{Lie } X}(T) =$
 λ polyn. $\mathcal{O}_E$ -lib. principale, $= (T-a) \cdot (T-\sigma(a))^{n-1}$,
tq. Rosati $_X|_{\mathcal{O}_E} = \sigma$ $\forall a \in \mathcal{O}_E$

$\alpha: X \times_S \bar{S} \rightarrow X \times_{\text{Spec } \bar{\mathbb{K}}} \bar{S}$ hauteur zero.

On peut prendre

$$X_n = X_{n-1} \times \left(\bigvee_{\text{Spec } W}^{\text{expliquer}} \text{Spec } \bar{k} \right)$$

et on obtient

$$\delta: \mathcal{N}_{n-1} \longrightarrow \mathcal{N}_n : X \mapsto X \times \bar{Y}$$

D'autre part, $U(I, \theta)(F)$ agit par $\mathcal{N}_n$ par post-mult.

de α par g . On obtient le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{N}_{n-1} \times_{\text{Spec } W} \mathcal{N}_n & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \Delta(\mathcal{N}_{n-1}) & & (1 \times g) \cdot \Delta(\mathcal{N}_{n-1}) \end{array}$$

Deux ss-schémas formels lisses de dimension $n-1$ dans un schéma formel lisse de dimension $2(n-1)$. Alors on pose

$$\langle \Delta(\mathcal{N}_{n-1}), (1 \times g) \cdot \Delta(\mathcal{N}_{n-1}) \rangle = \chi \left(\mathcal{O}_{\Delta} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{O}_{(1 \times g) \Delta} \right) \cdot \log q.$$

expression finie (g rs!).

Thm (Wei Zhang): LFA $\dagger$ est vrai pour $n=2$ et 3 .

Dans ce cas, l'intersection de Δ et $(1 \times g) \Delta$ est propre, i.e. de longueur finie. WZ calcule les deux côtés : à gauche par un calcul brutal à la Jacquet-Rallis, à droite utilise de façon essentielle les résultats de KR sur les intersections des diviseurs spéciaux sur $\mathcal{N}_{n-1}$.

Résultat de WZ et moi: On rappelle $L = L_g = \langle u, g u, \dots \rangle$

Soit $\text{inv}(g) = \text{inv}(L^*, L) \in (\mathbb{Z}^n)_+$. Alors

$\text{inv}(g) = (r_1, \dots, r_n)$ avec $r_n = 0$ et $\sum r_i$ pair.

⊗ D'autant plus grand est $\text{inv}(g)$, d'autant plus difficile est LFA.

Théorème: (i) Toujours $(\Delta \cap (1 \times g) \Delta)_{\text{red}}$ a une stratification par des variétés de DL (on peut dire lesquelles) seuvent appar. a priori

Soit maintenant $\text{inv}(g)$ minuscule Alors

(ii) L'intersection de Δ et de $(1 \times g) \Delta$ est propre, et

~~toutes les longueurs~~ il n'y a pas de Tor's supérieurs qui apparaissent, et toutes les longueurs sont identiques.

(iii) (80%) LFA est vrai.

→ (iv) Critère simple pour décider quand les deux cotés de LFA $\neq 0$.

Explication: g induit un automorphisme unitaire

$$\bar{g} : L^*/L \longrightarrow L^*/L$$

Soit $P = \text{char}_{\bar{g}}(T)$. Alors

$$P = P^*$$

On décompose en facteurs irréductibles

$$P = \prod_i P_i^{a_i}$$

Alors on a une involution τ sur les indices i, j

$$P_i^* = P_{\tau(i)} \quad , \quad a_{\tau(i)} = a_i$$

Mais $\deg P$ impair $\Rightarrow \exists i : \tau(i) = i$ et a_i impair.

Alors on démontre :

- $\Delta \cap \{xg\}\Delta \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists ! i = i_0$ avec (*) et prenant de type $\deg P_{i_0}$
- $|\Delta \cap \{xg\}\Delta| = \prod_{\{i,j\}, j=\tau(i)+i} (1+a_i) \cdot \deg P_{i_0}$

Point crucial : $\bar{g}$ est un automorphisme régulier !

$$? \parallel \quad \lg \mathcal{O}_{\Delta \cap \{xg\}\Delta, x} = \frac{a_{i_0} + 1}{2} \quad , \quad \forall x.$$

C'est au moins vrai si $a_{i_0} = 1$.

De l'autre côté on a :

$$\omega(g) \cdot \sum_{\{\Lambda \mid L \subset \Lambda \subset \Delta^*, g\Lambda = \Lambda, \Lambda^c = \Lambda\}} (-1)^{\ell(\Lambda/L)} \cdot \ell(\Lambda/L).$$

Et on compare !

se réduit à un calcul de sous-esp. vect. de $V = L^*/L$.