Strasbourg, Janv 09

Exposé „Sur l'approche de Langlands-Kottwitz à la fonction zêta : au-delà du cas parahorique".

(1) Rappel sur LK dans le cas le plus simple :

Soit $n \geq 3$, soit

$$\mathcal{M}_n / \mathbb{Z}[\tfrac{1}{n}] = \text{classifie } (E, \varphi)$$

But : déterminer $\# \mathcal{M}_n(k)$, où $k = \mathbb{F}_{p^r}$. $(p,n)=1$

Fixons E_0/k.

But' : $\# \underbrace{\{ (E,\varphi) \in \mathcal{M}_n(k) \mid E \sim_k E_0 \}}_{\mathcal{J}(E_0)}$

Soit

$$Y^p = \{ (L, \varphi) \mid L \subset H^1(E_0 \otimes_k \bar{k}, \mathbb{A}_f^p), \ Gal(\bar{k}/k)\text{-inv.} \}$$

$$Y_p = \{ \Lambda \mid \Lambda \subset H^1(E_0/W(k)) \otimes \mathbb{Q}_p, \ (F,V)\text{-inv.} \}.$$

$$\Gamma = (\mathrm{End}(E_0) \otimes \mathbb{Q})^\times.$$

Alors

$$\mathcal{J}(E_0) = \Gamma \backslash (Y^p \times Y_p).$$

Pour compter, soit L_0 resp. Λ_0 les points base donnés par la coho de E_0. Alors

$$Y^p = \{ g x_0 \mid g \in G(\mathbb{A}_f^p), \ \underset{\text{op. de Frob.} \in Gal}{\gamma} \cdot g x_0 = g x_0 \}$$

$$Y_p = \{ h \cdot y_0 \mid h \in G(\mathbb{Q}_{p^r}), \ \mathrm{inv}(\delta \sigma h y_0, h y_0) = (1,0) \}$$

Maintenant, on peut compter :

$$\# J(E_0) = \mathrm{vol}\left(\Gamma \backslash \left(G_\gamma(\mathbb{A}_f^p) \cdot G_{\delta\sigma}(\mathbb{Q}_p)\right)\right) \cdot O_\gamma(f^p) \cdot TO_{\delta\sigma}(\varphi_p).$$

Ici $f^p = \mathrm{char}\, K^p(n)$ et

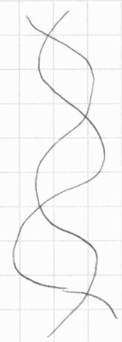
$$\varphi_p = \varphi_{p,r} = \mathrm{char}\, K_r \cdot \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K_r \in \mathcal{H}(G_r, K_r)$$

Après on fait la somme sur toutes les classes d'isogénie, et on transforme TO en O (chgt de base)

2. Généralisation au cas Iwahorique

Ce qui précède correspond au niveau $\Gamma(n)$, $(n,p)=1$

Passons au niveau $\Gamma(n), \Gamma_0(p) \rightsquigarrow M_0$. Alors on a mauvaise réduction :



Alors on ne veut plus compter les points de $M_0(k)$, mais on veut pondérer tout point $x \in M_0(k)$ par

$$\mathrm{Tr}^{ss}(\Phi_r, R\Psi_x).$$

Ceci est egale à $\begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ ordinaire} \\ 1-q & \text{si } x \text{ supersing}, \ q = p^r. \end{cases}$

Avec cette information, on démontre que

$$\mathrm{Contr.}(\mathcal{J}(E_0)) = \mathrm{vol} \cdot O_\gamma(f^p) \cdot TO(\varphi_{0,p}),$$

où $\varphi_{0,p}$ est l'élément suivant de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_{p^r}) /\!/ K_{0,r})$:

On a bijection

$$K_{0,r} \backslash G(\mathbb{Q}_{p^r}) / K_{0,r} \simeq \tilde{W} = \mathbb{Z}^2 \rtimes S_2 .$$

C'est le groupe de Iwahori-Weyl. C'est une extension du groupe de Weyl affine (de SL_2) par $\mathbb{Z}$

$\tilde{W} = W_a \rtimes \mathbb{Z}$. $\cancel{W \hookrightarrow W_a \to \tilde{W} \xrightarrow{c = \mathrm{ord}\det} \mathbb{Z} \to 0 \rightsquigarrow \text{quasi-Coxeter}}$

Alors $\mathrm{supp}(\varphi_{0,p}) \subset c^{-1}(1)$ et pour $w \in c^{-1}(1)$

$$\varphi_{0,p}(w) = \begin{cases} (1-q)^{1-\ell(w)} & \ell(w) \leq 1 \\ 0 & \ell(w) > 1. \end{cases}$$

Il y a une construction abstraite de la fonction à droite pour tout groupe deployé $G/\mathbb{Q}_{p^r}$ (Kottwitz) : elle dépend de (G, μ) ms

$k^G(\mu, w)$ = <u>fct. de Kottwitz, elt. dans</u> $Z(\mathcal{H}(G_r, I_r^w))$

On peut énoncer le resultat plus haut comme

$$\varphi_{0,p} = k^{GL_2}(\mu), \quad \mu = (1,0).$$

Cas très special d'un resultat de Haines / Ngo, valable pour var. de Shimura standard pour

$$\begin{cases} G = GSp(2n), & \mu = (1^{(n)}, 0^{(n)}) \\ G = GL(n), & \mu \text{ minuscule arbitraire.} \end{cases}$$

(Conjecture de Kottwitz)

(3.) Niveau $\Gamma_1(p)$. [travail avec Haines].

Notations: $F/\mathbb{Q}$ avec $(p) = \mathfrak{p}\cdot\bar{\mathfrak{p}}$.

D/F d^2, $*$, avec $D_{\mathfrak{p}} \simeq M_d(\mathbb{Q}_p)$.

$O_D = \mathbb{Z}_{(p)}$ - order egale a $M_d(\mathbb{Z}_p)$ en $\mathfrak{p}$.

On considère le groupoïde AV_{O_D} des variétés ab. à isogénie premier à p près, avec action de O_D.

Problème de modules $\mathcal{M}_0$ sur $(Sch/\mathbb{Z}_{(p)})$: $S \mapsto$

a)
$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \xrightarrow{\alpha} & A_1 & \xrightarrow{\alpha} & \cdots & \xrightarrow{\alpha} & A_{d-1} & \xrightarrow{\alpha} & A_0 \\ \lambda_0\downarrow & & \lambda_1\downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A}_0 & \longrightarrow & \hat{A}_{d-1} & \longrightarrow & \cdots & & \hat{A}_1 & \longrightarrow & \hat{A}_0 \end{array}$$

Ici $\alpha^d = p\cdot Id_{A_0}$, les $\lambda_\bullet$ à $\mathbb{Q}^\times$-près,

λ_0 p-principal $*$-polariz.

b) structure de niveau premier à p sur A_0.

+ Condition: $char(\iota(x) \mid Lie\, A_i) = char(x)^{d-1}\cdot\overline{char(x)}$, $x \in O_D$.

$\Rightarrow \dim A_i = d^2$

Considérons les groupes p-div. des A_i :

$$A_i(p^\infty) = A_i(\mathfrak{p}^\infty) \times A_i(\bar{\mathfrak{p}}^\infty)$$

$$A_i(\bar{\mathfrak{p}}^\infty) = X_i^d \quad ,$$

où X_i gpe p-div. de dimension 1 et hauteur d.

De a) on obtient sur $\mathcal{M}_0$

$$X_0 \xrightarrow{\alpha} X_1 \xrightarrow{\alpha} \cdots \longrightarrow X_{d-1} \longrightarrow X_d = X_0$$

ou $\alpha^d = \mathrm{Id}$, et tout α isogénie de hauteur p.

Soit

$$G_i = \ker(X_{i-1} \longrightarrow X_i) \quad , \quad i = 1, \ldots, d.$$

<u>Problème de modules</u> $\mathcal{M}_1$ <u>sur</u> $\mathcal{M}_0$: on ajoute un générateur de G_i au sens de { Oort-Tate, $\forall i$. ou de { Drinfeld-Katz-Mazur.

<u>Proposition</u> : a) $\mathcal{M}_0$ est un schéma regulier de dimension d, avec réduction semi-stable sur $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}_p$.

Soit

$$\mathcal{M}_{0,i} = \text{lieu où } \mathrm{Lie}\, X_{i-1} \to \mathrm{Lie}\, X_i \text{ est zéro.}$$

Alors les $\mathcal{M}_{0,i}$ sont des diviseur lisses et

$$\mathcal{M}_0 \otimes \mathbb{F}_p = \bigcup \mathcal{M}_{0,i} \quad \text{à croisements normaux.}$$

b) $\mathcal{M}_1$ est un schéma regulier à reduction semi-stable au sens faible ($\mathcal{M}_{1,i}$ à mult. p-1, $\forall i$)

c) Soit $T = \prod_{\mathbb{Z}/d} \mathbb{G}_m$. Alors

$$\pi : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_0$$

est un morphisme fini et plat, et c'est un revêtement ~~recouvrement~~ galoisien, ramifié ? avec gpe de Galois $T(\mathbb{F}_p)$. //

Considérons $\mathcal{M}_{1,S} \xrightarrow[T^S(\mathbb{F}_p)]{} \mathcal{M}_{0,S}$

$$R\Psi_0(\pi_{\eta *}\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \bigoplus_{\chi \in T(\mathbb{F}_p)^\vee} \underbrace{R\Psi_0(\pi_{\eta *}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\chi)}_{R\Psi_{\mathbb{Z}_p}\chi}.$$

Fixons χ

Théorème : a) La restriction de $R\Psi_{\mathbb{Z}_p}\chi$ à toute strate $\mathcal{M}_{0,S}$ (pour $S \subset \mathbb{Z}/d$, $S \neq \emptyset$) est localement constante, et est constante sur $\mathcal{M}_{1,S}$.

b) Soit $\dot{x} \in \mathcal{M}_{0,S}(\mathbb{F}_{p^r})$. Alors

$$\mathrm{Tr}^{ss}(\Phi, R\Psi_{\mathbb{Z}_p}\chi) = \begin{cases} (1-q)^{|S|-1} \cdot \chi(t_{\dot{x}}) \\ 0. \end{cases}$$

Le premier cas $\Leftrightarrow$ $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_d)$ avec $\chi_j = \text{triv}$, $\forall j \in S$

$\mathcal{M}_{1,S} \xrightarrow{T^S(\mathbb{F}_p)} \mathcal{M}_{0,S}$ } $\to$ Ici $t_{\dot{x}} \in T(\mathbb{F}_p) / T_S(\mathbb{F}_p)$ est défini par

$$\Phi(\tilde{\dot{x}}) = t_{\dot{x}} \cdot \tilde{\dot{x}}$$

Théorème : Soit χ fixé.

a) $$\mathrm{Cont}(\gamma) = \mathrm{vol} \cdot O_\gamma(f^p) \cdot T_{\delta\sigma}(\varphi_{1,p}),$$

où

$$\varphi_{1,p} \in Z(\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_{p^r}), K_{1,r}, \underbrace{\chi_r}_{\chi \circ Nm_r})).$$

b) Sous l'isomorphisme de Roche

$$Z(\mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_{p^r}), K_{1,r}, \chi_r)) \simeq Z(\mathcal{H}(M_\chi(\mathbb{Q}_{p^r}), K_{0,r}^{M_\chi}))$$

l'image de $\varphi_{1,p}$ est égale à

$$q^{\frac{1}{2}(\ell(\mu)-\ell^{M}(\mu))} \cdot k^{M_\chi}(\mu)$$

c) Comme fonction sur $T(\mathbb{F}_{p^r}) \times \widetilde{W}$ (ensemble !),

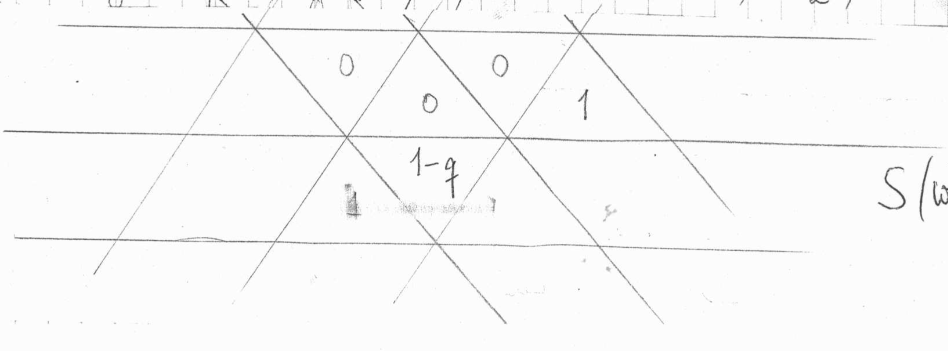
$\varphi_{1,p}$ est donné par l'expression suivante :

$$\varphi_{1,p}(t,w) = \begin{cases} \delta^1(w,\chi) \cdot (1-q)^{|S(w)|-1} \cdot \chi \circ N_r(t) \\ \quad \text{si } w \in \mathrm{supp}\, k^G(\mu). \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\chi = 1 \Rightarrow$ résultat „classique" pour $\varphi_{0,p}$.

$\delta^1(w,\chi) = 1$ si $\chi_j = 1$, $\forall j \in S(w)$ (et 0 sinon).

Image pour $d = 3$, $\chi = (\mathrm{triv}, \chi_2, \mathrm{triv})$



$S(w) \subset \{1,3\}$