

Nancy, Juin 09

Exposé : groupes de lacets tordus et modules locaux
avec J. Pappas.

$$k = \bar{k}, \quad K = k((t)), \quad \mathcal{O}_K = k[[t]].$$

G = gpe réductif connexe / K .

Pour simplifier : • G_{abr} 1-connexe, abs. simple,
• G déployé sur extension modérément ramifiée.

Groupe de lacets assoc. à G : ind-schéma en groupes $LG / \mathbb{A}^1_K$
qui représente le foncteur

$$(k\text{-Alg}) \longrightarrow \text{Sets}, \quad R \mapsto L(R((t))).$$

Soit $P \subset G(k((t)))$ sous-groupe parabolique.

Buchel - Tits : $P \mapsto$ schéma en groupes $\underline{P} / \mathcal{O}_K$,
avec $P = \underline{P}(\mathcal{O}_K)$, fibre gén. G .

Groupe de lacets positifs assoc. à $\underline{P}$: schéma en groupes $L^+ \underline{P} / \mathbb{A}^1_K$
qui représente le foncteur

$$(k\text{-Alg}) \longrightarrow \text{Sets}, \quad R \mapsto \underline{P}(k[[t]]).$$

Varétés de drapeaux affine assoc. à (G, P) :

$$\mathcal{F}_G^P = LG / L^+P \quad \text{comme fais. ppq.}$$

Exemples : a) $G = GL_n$. Si $P = GL_n(\mathcal{O}_K)$,

alors

$$\mathcal{F}_G^P(R) = \{ R[[t]]\text{-} \text{réseaux dans } R((t))^n \}$$

Si $P = \text{Iwahori}$, alors

$$\mathcal{F}_G^P(R) = \{ \text{chaînes de réseaux périodiques,} \\ \text{complets dans } R((t))^n \}.$$

b) Soit $K' = K(u)$, $u^2 = t$, car $k \neq 2$.

Soit $G =$ groupe de similitudes unitaires d'un
espace vect. K'/K -hermitien (V, σ) .

Soit $P = \text{Iwahori}$, alors considérons

$$\mathcal{F}(R) = \{ \text{chaînes de réseaux périodiques complets} \\ \text{dans } R((u))^n \text{ plus } \alpha \in R((u))^{\times} / R[[u]]^{\times} \\ \text{t.q. } \hat{L}_i = \alpha \cdot L_{-i}, \forall i \}.$$

Alors

$$\mathcal{F}_G^P = \begin{cases} \mathcal{F} & \text{si } \dim V \text{ impair} \\ \mathcal{F} \sqcup \mathcal{F} & \text{si } \dim V \text{ pair} \\ & (\text{alors } P = \text{Stab}(L_0)^{\circ}) \end{cases}$$

Théorème de structure:

$$a) \pi_0(LG) = \pi_0(\mathbb{F}_G^P) = \pi_1(G)_I$$

b) Si G semi-simple et $(\text{char } k, |\pi_1(G)|) = 1$,
alors LG et $\mathbb{F}_G^P$ schémas réduits.

d) Soit $\text{Twahon} \triangleq$ alcôve, alors $\{P \supset B\} \triangleq \{Y \subset S\}$
 $\text{Pic}(\mathbb{F}_{G_{der}}^Y) \cong \bigoplus_{i \in Y} \mathbb{Z} \cdot \varepsilon_i$ $\neq \emptyset$

via $L \mapsto \deg(L|_{P_{\varepsilon_i}})$

Conjecture de cohérence: Elle compare les dimensions

c) Toutes les variétés de Schubert dans $\mathbb{F}_G^P$ sont
des variétés projectives, normales, à sig. rationnels, F-split.

des sections globales sur certaines réunions de var. de
Schubert d'un faisceau inversible ample très simple:

Remarque: $\mathbb{F}_{G_{der}}^Y$ est variété de drapeaux au sens de Kac-Moody
($\rightarrow$ Kumar, Littelmann, ...))

Faisceau ample $\mathcal{L}'(\gamma)$ sur $\mathbb{P}^Y$: correspond

à $\sum_{i \in \gamma} k(i) e_i$, où $k(i) = 1$ sauf

si la partie vectorielle de x_i est div. par 2 auquel

cas on pose $k(i) = 2$ (ce dernier cas n'arrive que
pour ${}^2A_{2m}$ - groupe unitaire impair) explique le 'dans la notation.

Réunion de variétés de Schubert: Schubert var. paramétrisé

by $w \in W^Y \setminus W_a / W^Y$.

Fix co-character μ of G_{ad} $\rightsquigarrow$

$$Adm^Y(\mu)^\circ = (W^Y \cdot Adm(\mu) \cdot W^Y) \tau_\mu^{-1}.$$

Here $\mu \rightsquigarrow t_\mu \in \tilde{W}(G_{ad}) = W_a \rtimes \left(\begin{smallmatrix} \text{finite abelian} \\ \text{gr} \end{smallmatrix} \right)$.

$$1 \mapsto X_*(T_{ad})_I \rightarrow \tilde{W} \rightarrow W_0 \rightarrow 1.$$

And

$$Adm(\mu) = \left\{ \tilde{w} \in \tilde{W}(G_{ad}) \mid \tilde{w} \leq w_0(\lambda_\mu), \text{ some } w_0 \in W_0 \right\}$$

Here λ_μ = image of μ in $X_*(T_{ad})_I \subset \tilde{W}(G_{ad})$.

translation subgp.

Pictures for $Adm(\mu)^\circ$ ($Y = S$).

Polynôme:
Conjecture: Soit

$$A^Y(\mu)^0 = \bigcup_{w \in \text{Adh}^Y(\mu)^0} S_w \subset \mathbb{F}_{\text{Grob}}^Y.$$

Soit

$$h_Y^{(\mu)}(k) = \dim H^0(A^Y(\mu)^0, L'(Y)^{\otimes k})$$

est polynôme en k .

On voudrait une expression pour ce polynôme. Ces polynômes dépendent de Y - mais apparemment de façon très cohérente (ceci explique le nom de la conjecture).

Soit K'/K ext. de degré e qui déploie G .

Soit ν
minuscule

$\mapsto$ Soit $X(\nu) = (G \otimes_K K') / P(\nu)$ var. homog.

avec $\text{Pic } X(\nu) = \mathbb{Z}$. Soit $L(\nu) = \text{gén. ample}$.

$\mapsto H^{(\nu)}(k) = \dim H^0(X(\nu), L(\nu)^{\otimes k})$.

Supposons que $\mu = \nu_1 + \dots + \nu_r$ est somme de cochar.

minuscules. Soit

$$H^{(\mu)}(k) = H^{(\nu_1)}(k) \cdots H^{(\nu_r)}(k).$$

Conjecture:

$$h_Y^{(\mu)}(k) = H^{(\mu)}(|Y| \cdot k).$$

C'est vrai pour

$$G = GL_n \quad \text{ou} \quad GSp_{2n}$$

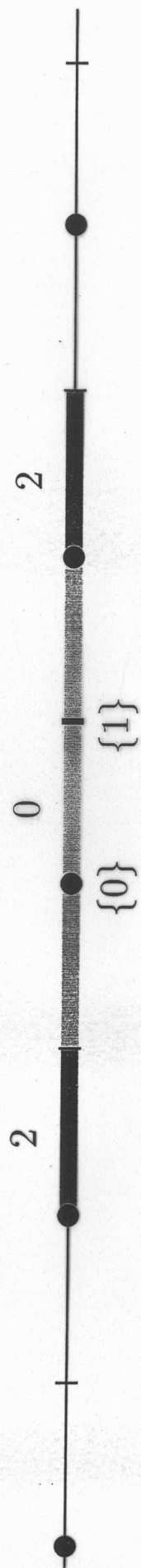
(résulte de travaux de Jöres sur les modèles locaux). Je voudrais surtout le cas GU .

Un mot final sur les modèles locaux: Soit

μ minuscule. Alors à (G, μ, P) on associe (souvent) un schéma projectif $M = M(G, \mu)^P$ sur $\mathcal{O}_{K'}$, avec fibre générique $X(\mu)$ avec fibre spéciale réunion de var. de Schubert $\supset A^\vee(\mu)^\circ$.

Smithling: égalité de schémas réduits sous-jacents (par pps unitaires impaires).

La conjecture impliquerait que $M \otimes_{\mathcal{O}_{K'}} k$ est réduit, égale à $A^\vee(\mu)^\circ$.



$u(2,1)$

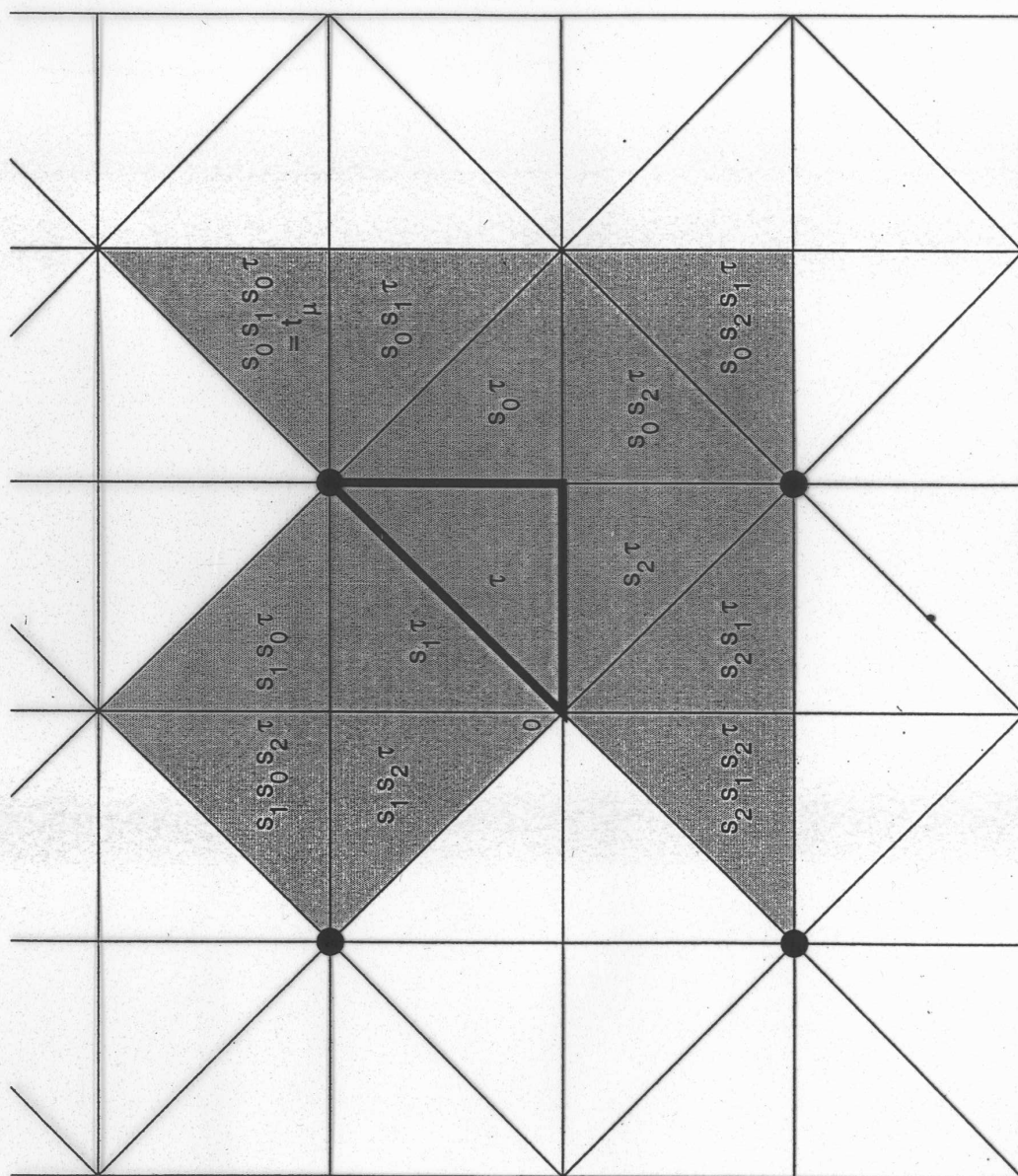


FIGURE 2. The admissible alcoves $\text{Adm}(\mu)$ for GSp_4 , $\mu = (-1, -1, 0, 0)$.

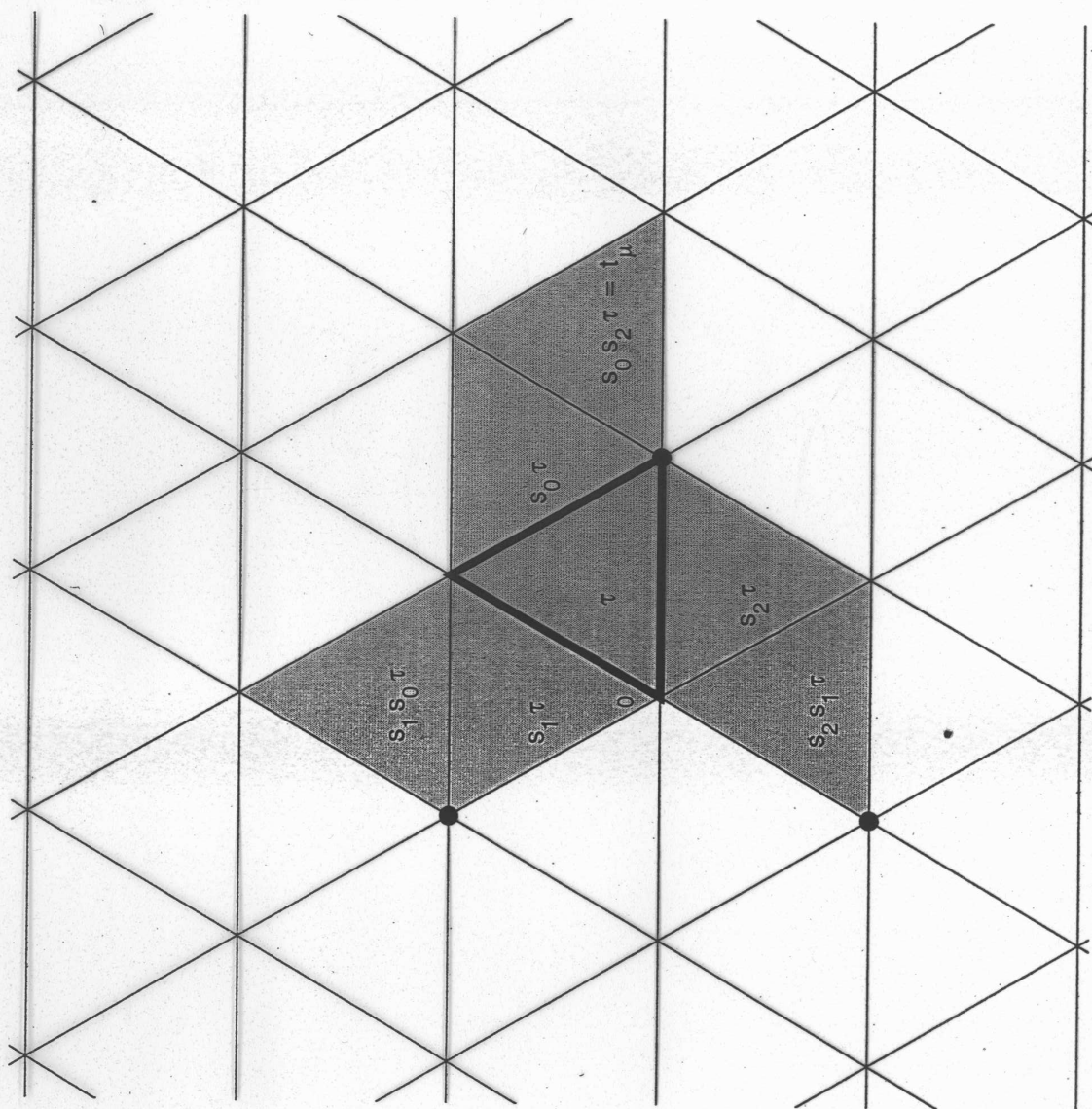
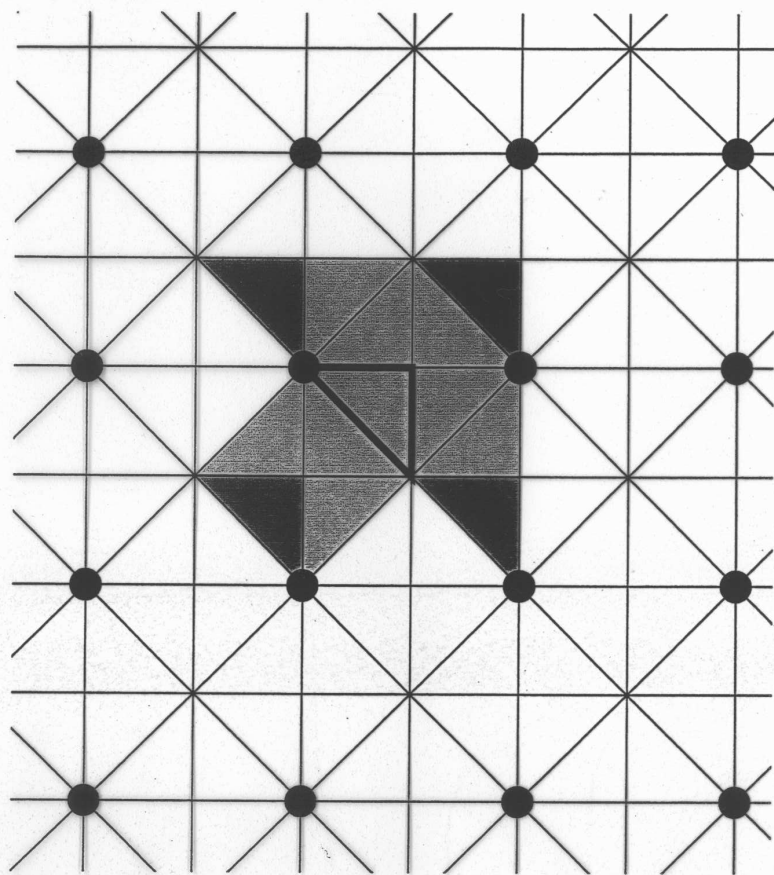
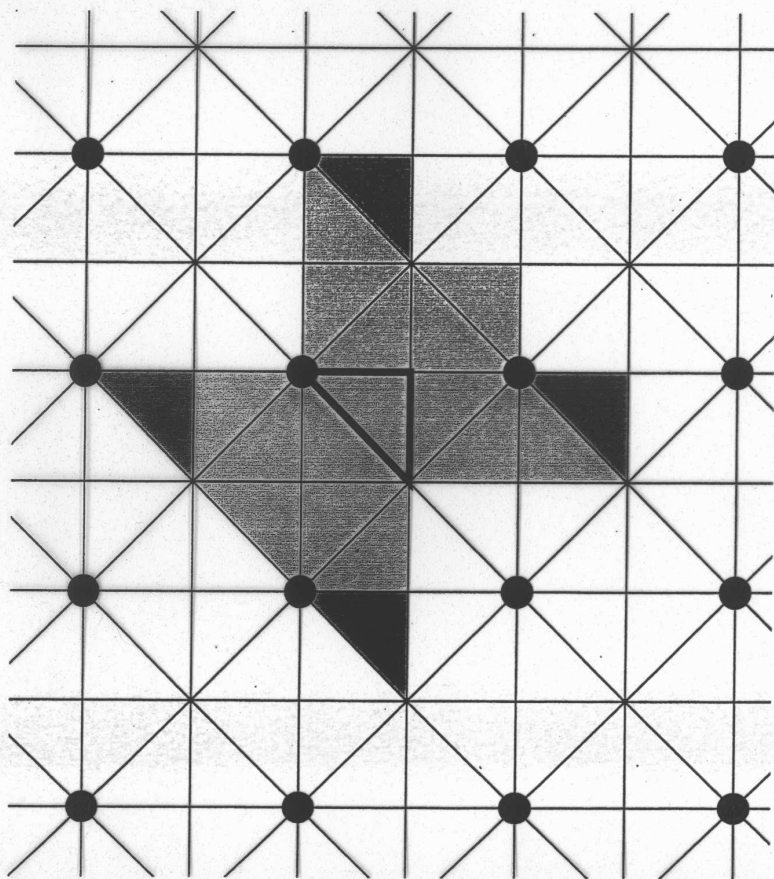


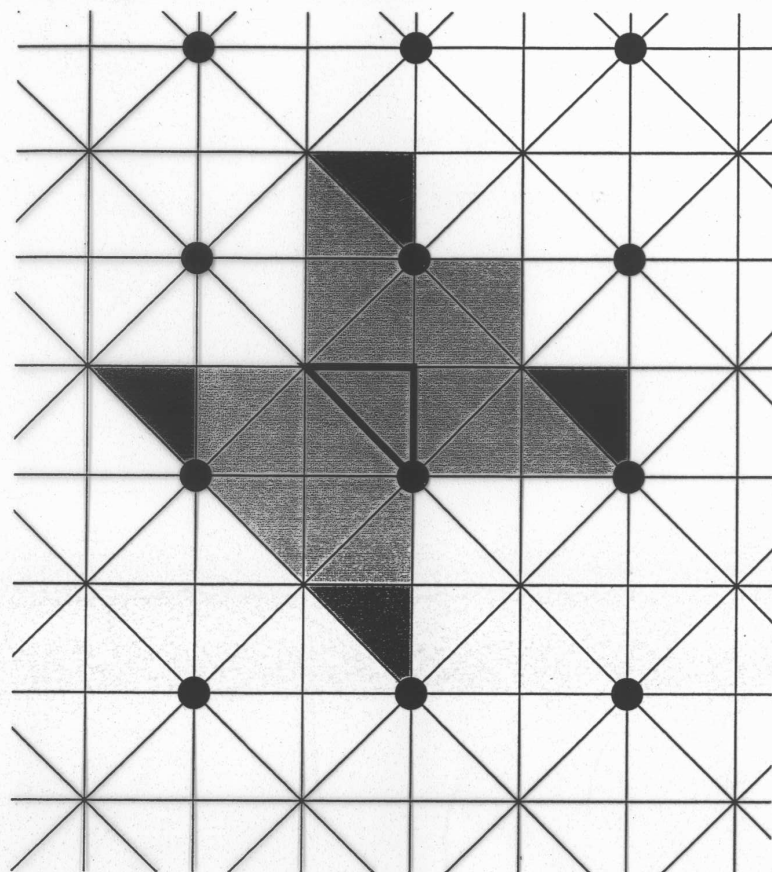
FIGURE 1. The admissible alcoves $\text{Adm}(\mu)$ for GL_3 , $\mu = (-1, 0, 0)$. The base alcove is labeled by τ .



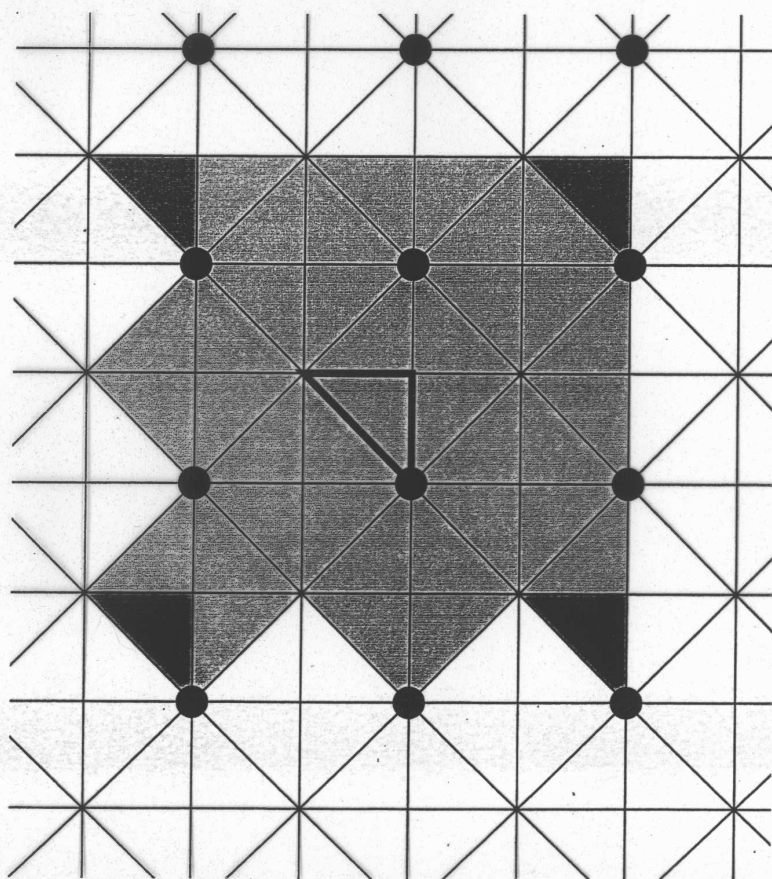
$u(3,1)$



$u(2,2)$



$u(4,1)$



$u(3,2)$