Nov. 2005

Exposé à Orsay

„ Groupes de lacets tordus ".

- Merci pour l'invitation à Orsay et au SAGA.
- Lien idéal pour l'exposé : Genestier, Beauville-Laszlo.
- travail en commun avec Pappas.

1. Position du problème.

3 avatars des gpes de lacets :

a) - géométrie differ. : G gpe de Lie (e.g. s-s, compact)

$$LG = \mathrm{Hom}_{C^\infty}(S^1, G).$$

b) - soit A matrice de Cartan généralisé $\mapsto \mathfrak{g}_{KM}(A)/k$.

Alors on a variété en groupes avec Lie $\approx \mathfrak{g}_{KM}(A)$.

c) - soit G gpe alg. linéaire $/ k \mapsto LG : \mathrm{Aff}/k \to (\mathrm{ens})$,

$LG(R) = G(R((t)))$: représ. par un ind-schéma.

Versions tordues : a) $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$: $f : \mathbb{R} \to G$ avec

$$f(x + 2\pi) = \alpha(f(x)).$$

b) on peut le faire dans le cas affine tordu.

c) je vais dire ça tout-de-suite.

<u>L'exemple de base</u> : $G = GL_n$

$G \rightsquigarrow LG$, $\mathcal{G} = LG / L^+ G$, $\mathcal{F} = LG/\mathcal{B}$.

repérés par ind-schémas.

~~Pour $G_m = GL_1$, on a $\mathcal{F}$~~

Alors $\mathcal{G}(R) = \{$ réseaux $\mathcal{L}$ dans $R((t))^n \}$

c.à.d. sous-$R[[t]]$-module $\mathcal{L}$ avec

$$t^r L_{0_R} \subset \underbrace{\mathcal{L} \subset t^{-r} L_{0_R}}_{R\text{-module projectif}} , \quad r \text{ convenable.}$$

$\mathcal{F}(R) = \{$ chaines periodiques de réseaux dans $R((t))^n$,

$\ldots \subset \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_{n-1} \subset t^{-1}\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_n \subset \ldots \}$

<u>De même pour</u> SL_n : $\mathcal{G}_{SL_n}$ = réseaux normalisés : $\det \mathcal{L} = \det L_{0_R} \subset R((t))$.

Pour $n = 1$, on $\pi_0(\mathcal{F}_{G_m}) = \mathbb{Z}$ et

$$\mathcal{F}_{G_m} = \coprod_{\mathbb{Z}} \mathcal{F}^0_{G_m}, \text{ et}$$

$$\mathcal{F}^0_{G_m} = L^{--} G_m \mp \text{ sur } R = \{1 + \sum_{-N}^{-1} a_i t^i \mid a_i \in \text{nil } R\}$$

$$= \widehat{\mathbb{A}^\infty} \qquad \text{non-}\underline{\text{réduit}}. \ (\underline{\lim} \text{ schémas réduits})$$

<u>Théorème (BL / Faltings)</u> : a) $L SL_n$, b) $\mathcal{F}_{SL_n}$, $\mathcal{G}_{SL_n}$ sont ind-réduits, ind-proper,

c.à.d. limite inductive de schémas réduits.

<u>Effectif en char 0</u> : On peut écrire $\mathcal{G}_{SL_n} = \lim \mathcal{G}^{(r)}_{SL_n}$, où

$\mathcal{G}^{(r)}_{SL_n}(R) = \{$ réseaux $\mathcal{L}$ avec $t^{+r} L_{0_R} \subset \mathcal{L} \subset t^{-r} L_{0_R}$ | loc. facteur direct

et $\text{char}(t \mid (\mathcal{L}/t^r L_0)) = X^{r \cdot n} \}$

Et $\mathfrak{g}^{(r)}$ est réduit si char $k = 0$ (Weyman).

2. <u>Cas tordu</u>. On pose $K = k((t))$, $\mathcal{O}_K = k[[t]]$.

- Soit $\mathcal{X}$ schéma affine sur $k[[t]] \rightsquigarrow L^+\mathcal{X}$: schéma affine sur k avec $L^+\mathcal{X}(R) = \mathcal{X}(R[[t]])$: expliquer
- De même, si X schéma affine sur $k((t)) \rightsquigarrow LX$: ind-schéma (strict) sur k avec $LX(R) = X(R((t)))$.
- Alors si G gpe linéaire/K (toujours connexe réductif chez nous), on a le gpe de lacets associé LG.

<u>exemple</u> : Soit $L = k((u))$ avec $u^2 = t$. Soit $G = SU(V, h)$ gpe unitaire (spéciale) rel. à L/K. Alors G n'est pas de la forme $G = G_0 \otimes_k K$.

- Soit $P \subset G(K)$ sous-gpe parahorique $\rightsquigarrow \mathcal{P}$ sur $k[[t]]$ affine, lisse, connexe à fibre gén. G.

Si $G = G_0 \otimes_k K$, ~~[illegible]~~, alors $L^+(G_0 \otimes_k \mathcal{O}_K)$ est parahorique.

On pose $\mathcal{F}_P = LG / L^+\mathcal{P}$, p. ex. $\mathcal{F} = LG / L^+\mathcal{B}$.

Il n'y a plus de parahorique préféré : la symétrie est rétablie.

$\mathcal{F}$ représ. le foncteur de chaînes de réseaux complets, périodiques et autoduales, et <u>normalisé</u> ! ($\det \mathcal{L}_i = \det L_i$)

<u>sauf</u> pour $n = 2m$, auquel cas $LG / L^+\mathcal{B}$ est proprement cont. du foncteur.

On veut savoir plus sur la structure de ces objets. (comp. connexe.

(Théorie de Bruhat-Tits géométrique).

3. Théorèmes de structure

Th. 1 : Soit $k = \bar{k}$. Alors, pour tout parahorique P,

$$\pi_0(LG) = \pi_0(\mathcal{F}_P) = \pi_1(G)_I ,$$

où $I = Gal(\bar{K}/K)$.

Ici $\pi_1(G)$ = gpe fond. algébrique de G = $X_*(T)/X_*(T_{sc})$.

L'identific. est donnée par l'applic. de Kottwitz.

[Cas non-tordu dû à [BLS] et [BD] en car. 0].

Th. 2 : Soit G semi-simple et dépl. sur une extension modérément ramifiée de K. Si $p \nmid |\pi_1(G)|$, alors LG et $\mathcal{F}_P$ sont réduits

[généralise [BL], [LS], et [F] ?. Mais $LPGL_2$ non-réduit en car. 2].

Le 3ème th. concerne les variétés de Schubert, disons dans $\mathcal{F}$.

Soit $\tilde{W}$ = groupe de Iwahori-Weyl. Donc

$$\tilde{W} = L^+B(k) \backslash LG(k) / L^+B(k) :$$ paramétrise les orbites de L^+B dans $\mathcal{F}_B$.

Pour $w \in \tilde{W} \mapsto S_w$ = adhérence de $L^+B \cdot w \cdot * \subset \mathcal{F}$

variété de Schubert associé (réduit)

variété projective, de dim. $\ell(w)$.

de même pour $S_w \subset \mathcal{F}_P$, $w \in W_P \backslash \tilde{W} / W_P$

Th 3 : Soit G dépl. sur une ext. modérément ramifiée. Alors S_w est normale, à singul. rationelles. Si ~~ch~~ car $k>0$, alors toutes les S_w sont F-scindées de façon compatible.

[car 0 est du à Kumar, Litt., Mathieu ;

car p, du à Faltings dans le cas non-tordu].

Dém : relever en car. 0, puis utiliser K, L, M.

4. Une conjecture combinatoire

On suppose G simplement connexe simple déployé sur ext. modérée. Soit

$\mathcal{S}$ = ensembles de racines affines simples p.r. à Iwahori B.

Pour $I \subset \mathcal{S}$ $\rightsquigarrow$ $P_I \supset B$ et $\mathcal{F}_I = LG/L^+P_I$.

Ici, on normalise $P_{\mathcal{S}} = B$, $P_{\{\alpha_i\}}$ maximal.

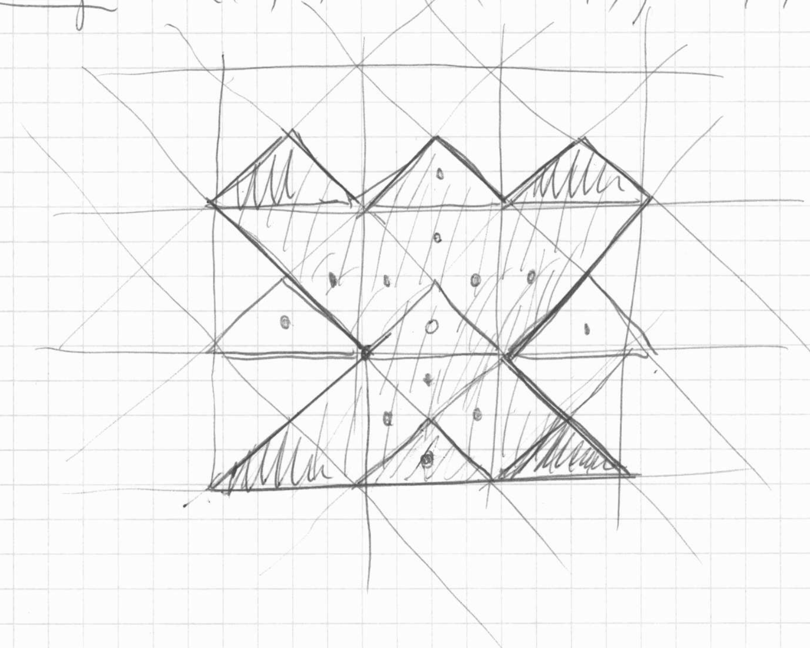
Sur $\mathcal{F}_I$ on a faisceaux inversible ample naturel $\mathcal{L}_I$,

$$\mathcal{L}_I = \text{"} \; G \times_{P_I, \varepsilon_I} \mathbb{A}^1 \; \text{"} \quad , \text{ où } \varepsilon_I = \sum_{i \in I} \varepsilon_i .$$

Soit μ cocaractère géométrique de G_{ad} (minuscule ou somme de minuscules). Alors $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Adm}(\mu)^\circ \subset W_a^{=}$. $\widetilde{W}$ pour LG. ensemble μ-admissible.

$\simeq$ ens. de alcoves dans l'apartm. de G.

<u>exemple</u> $SU(2,2)$. $= (SU(4), \mu = (1,1,0,0))$.



$U(1,2)$ ... Sp_4.

Soit $\mathrm{Adm}_I(\mu)^\circ \subset W_{I^\circ} \backslash \tilde{W}_a / W_{I^\circ}$ image de $\mathrm{Adm}(\mu)^\circ$

Soit

$$\mathcal{A}_I(\mu)^\circ = \bigcup_{w \in \mathrm{Adm}_I(\mu)^\circ} S_w \subset \mathcal{F}_I.$$

On considère

$$h_I^{(\mu)}(m) = \dim H^0(\mathcal{A}_I(\mu)^\circ, \mathcal{L}_{I^\circ}^{\otimes m})$$

$$= \chi(\mathcal{A}_I(\mu)^\circ, \mathcal{L}_{I^\circ}^{\otimes m}) \quad \text{polynôme en } m.$$

<u>combinatoire</u> (Littelmann): $= \# \{$ chemin π de LS avec $i(\pi) \in \mathrm{Adm}_I$; de forme $m \cdot \varepsilon_I \}$.

<u>Conjecture</u>: $\exists$ polynome $h^{(\mu)}$, t.q. $\forall I$

$$h_I^{(\mu)}(m) = h^{(\mu)}(|I| \cdot m).$$

Si $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_r$ avec μ_i minuscules, alors

$$h^{(\mu)} = \prod h^{(\mu_i)}.$$

[Vrai pour $G = SL_n$ et $G = Sp_{2n}$, par les résultats sur les modèles locaux de Görtz, [PR] — on voudrait une démonstr. directe de ces résultats !].

Si la conjecture est vraie, alors le modèle local pour le groupe de simil. unitaires et I est à fibre spéciale réduit et t.q. toutes les compos. irréduct. sont normales, à sing. rationnelles et isomorphe à $\mathcal{A}_I(\mu)^{\circ}$.