EXISTENCE DE FILTRATIONS ADMISSIBLES SUR DES ISOCRISTAUX

J.-M. Fontaine[1] et M. Rapoport[2]

0 – Enoncé des résultats

Soit F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Soit k un corps parfait de caractéristique p contenant le corps résiduel k_F de F. Notons $W(k)$ (resp. $W(k_F)$) l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k (resp. k_F) et posons $L = F \otimes_{W(k_F)} W(k)$. C'est un corps, extension finie totalement ramifiée du corps des fractions de $W(k)$. Soient q le cardinal de k_F, σ_0 l'automorphisme de $W(k)$ induit par fonctorialité par l'automorphisme $x \mapsto x^q$ sur k et σ l'automorphisme $\mathrm{id} \otimes \sigma_0$ de L. Un *isocristal* (*relativement à* (F, k)) est un espace vectoriel D de dimension finie sur L, muni d'un endomorphisme φ bijectif et σ-linéaire. Soit $(\mathbf{Q}^d)_+ = \{(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d) \in \mathbf{Q}^d \mid \nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots \geq \nu_d\}$. A un isocristal (D, φ) de dimension d on associe son vecteur de Newton (= la suite des pentes en ordre *décroissant*), $\nu(D, \varphi) \in (\mathbf{Q}^d)_+$. Soit $(\mathbf{Z}^d)_+ = (\mathbf{Q}^d)_+ \cap \mathbf{Z}^d$. Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d) \in (\mathbf{Z}^d)_+$. Soit $\mathcal{F}^\bullet$ une filtration de D par des sous-L-espaces vectoriels, décroissante, exhaustive et séparée, indexée par $\mathbf{Z}$; on dit que $\mathcal{F}^\bullet$ *est de type* μ si

$$\dim gr_i^{\mathcal{F}^\bullet}(D) = \#\{j;\ \mu_j = i\} \quad . \tag{0.1}$$

Autrement dit, les sauts de la filtration $\mathcal{F}^\bullet$ sont les μ_j $(j = 1, \ldots, d)$ et la taille du saut en μ_j est donnée par la multiplicité de μ_j dans μ. Toute filtration $\mathcal{F}^\bullet$ a un type $\mu(\mathcal{F}^\bullet) \in (\mathbf{Z}^d)_+$ bien déterminé.

Une filtration $\mathcal{F}^\bullet$ de l'isocristal (D, φ) de dimension d est dite *admissible* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) on a

$$|\mu(\mathcal{F}^\bullet)| = |\nu(D, \varphi)|$$

(on a noté ici $|\nu| = \sum_{i=1}^d \nu_i$ pour $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbf{Q}^d$) ;

(ii) soit (D', φ') un sous-isocristal de (D, φ) et soit $\mathcal{F}'^\bullet$ la filtration induite par $\mathcal{F}^\bullet$ sur D' ; on a

$$|\mu(\mathcal{F}'^\bullet)| \leq |\nu(D', \varphi')| \quad .$$

Remarques : 1) Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d) \in (\mathbf{Q}^d)_+$, notons $P(\lambda)$ le *polygone associé à* λ, i.e. le polygone convexe (autrement dit, à pentes croissantes) du

[1]Institut Universitaire de France et UMR 8628 du CNRS, Mathématique, Université de Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

[2]Mathematisches Institut der Universität zu Köln, Weyertal 86-90, D–50931 Köln, Deutschland

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

plan réel d'origine $(0,0)$ dont les pentes sont les λ_j, la longueur de la projection du segment de pente λ_j sur l'axe des x étant égale à la multiplicité de λ_j dans λ. Le nombre rationnel $|\nu(D,\varphi)|$, noté $t_N(D)$ dans [F], est toujours un entier ; les points de coordonnées $(0,0)$ et $(d,|\nu(D,\varphi)|)$ sont les extrémités du polygone $P(\nu(D,\varphi))$ (parfois appelé *polygone de Newton* de l'isocristal (D,φ)). De même, $|\mu(\mathcal{F}^\bullet)|$ est noté $t_H(\mathcal{F}^\bullet)$ dans [F] ; les points de coordonnées $(0,0)$ et $(d,|\mu(\mathcal{F}^\bullet)|)$ sont les extrémités du polygone $P(\mu(\mathcal{F}^\bullet))$ (parfois appelé *polygone de Hodge* de la filtration).

2) Dans le cas où $F=\mathbf{Q}_p$, dire qu'une filtration est admissible signifie qu'elle est *faiblement admissible* au sens de [F]. Le résultat principal de [CF] signifie qu'elle est alors également admissible au sens de [F]. Si $\bar{L}$ désigne une clôture algébrique de L, on dispose donc (*loc.cit.)* d'une équivalence naturelle entre la catégorie des isocristaux (relativement à $(\mathbf{Q}_p,k)$) munis d'une filtration admissible, et la catégorie des représentations p-adiques cristallines de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$.

3) Ce résultat s'étend au cas où F est une extension finie arbitraire de $\mathbf{Q}_p$. Soit C_p le complété de $\bar{L}$ pour la topologie p-adique. Appelons *F-représentation de* $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ la donnée d'un F-espace vectoriel de dimension finie V muni d'une action linéaire et continue de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$. Pour une telle représentation, notons $V_{C_p,F}$ le noyau de l'application C_p-linéaire naturelle de $C_p\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$ dans $C_p\otimes_F V$. On dispose alors d'une équivalence naturelle entre la catégorie des isocristaux (relativement à (F,k)) munis d'une filtration admissible et la sous-catégorie pleine de la catégorie des F-représentations de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ dont les objets sont les V qui sont cristallines en tant que représentations p-adiques et vérifient la condition

$(*)$ le C_p-espace vectoriel $V_{C_p,F}$ est engendré par les éléments fixes par $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$.

Lorsque V provient d'un groupe formel Φ, cette dernière condition signifie que Φ est un O_F-module formel (cf. par exemple, [De]). Par exemple, soit π une uniformisante de F et soit $(D,\varphi)=(L,\pi\sigma)$; la seule filtration admissible est celle pour laquelle $gr_1^{\mathcal{F}^\bullet}(D)\neq 0$. La F-représentation de $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ associée est de dimension 1 et c'est la duale de la restriction à $\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ de celle que fournit un groupe formel de Lubin-Tate pour F correspondant à π. Soit $\eta:\mathrm{Gal}(\bar{L}/L)\to F^\times$ le caractère qui définit l'action du groupe de Galois. Si τ est un $\mathbf{Q}_p$-automorphisme non trivial de F, la F-représentation de dimension 1 définie par $\tau\eta$ est encore cristalline mais elle ne vérifie pas $(*)$.

Les remarques (2) et (3) ne seront pas utilisées dans la suite.

Sur $(\mathbf{Q}^d)_+$, on dispose de l'ordre partiel pour lequel $\lambda\leq\lambda'$ si $\lambda_1+\lambda_2\ldots+\lambda_r\leq\lambda'_1+\lambda'_2\ldots+\lambda'_r$, pour $r=1,2,\ldots,d-1$ et $\lambda_1+\lambda_2\ldots+\lambda_d=\lambda'_1+\lambda'_2\ldots+\lambda'_d$. Dire que $\lambda\leq\lambda'$ équivaut à dire que $P(\lambda)$ est au-dessus de $P(\lambda')$ et que ces deux polygones ont mêmes extrémités.

Théorème 1. *Supposons k algébriquement clos. Soit (D,φ) un isocristal de dimension d. Soit $\mu\in(\mathbf{Z}^d)_+$. Pour qu'il existe une filtration faiblement admissible de type μ sur D il faut et il suffit que $\mu\geq\nu(D,\varphi)$.* $\square$

Soit O_L l'anneau des entiers de L, et soit $\pi\in O_F$ une uniformisante qui est donc aussi une uniformisante de l'anneau de valuation discrète O_L. Soit (D,φ) un isocristal de dimension d. Un O_L-réseau M de D est dit de type $\mu\in(\mathbf{Z}^d)_+$ s'il existe une base $e_1,\ldots,e_d$ de M tel que $\pi^{\mu_1}e_1,\ldots,\pi^{\mu_d}e_d$ soit une base de $\varphi(M)$. Tout O_L-réseau M a un type bien déterminé que l'on note $\mu(M)$.

Théorème 2. *Supposons k algébriquement clos. Soit (D,φ) un isocristal de dimension d. Soit $\mu \in (\mathbf{Z}^d)_+$. Alors il existe un O_L-réseau de type μ dans D si et seulement si $\mu \geq \nu(D,\varphi)$.* $\square$

D'après [F], Prop. 4.3.3, la condition d'admissibilité équivaut à demander que $P(\mu(\mathcal{F}^\bullet))$ et $P(\nu(D,\varphi))$ ont mêmes extrémités et que, pour tout sous-isocristal (D',φ') de (D,φ), si $\mathcal{F}'^\bullet$ est la filtration induite par $\mathcal{F}^\bullet$, alors $P(\mu(\mathcal{F}'^\bullet))$ est en dessous de $P(\nu(D',\varphi'))$. L'implication directe du théorème 1 en résulte.

L'implication directe du théorème 2 est l'inégalité de Mazur ([Ka], Th. 1.4.1). Le contenu de ces deux théorèmes est donc la réciproque à ces inégalités. Le lien entre eux est donné par un résultat de Laffaille [L], comme on va le voir au §1.

Le théorème 2 est aussi obtenu, avec une preuve différente, dans [KR]. En fait, on a une version de l'inégalité de Mazur pour un groupe réductif quasi-déployé dans F et déployé dans une extension non ramifiée de F [RR]. On peut conjecturer que la réciproque à cette inégalité est vraie, dans ce contexte (existence de certains sous-groupes parahoriques hyperspéciaux), et on peut la démontrer dans certains cas ([R], [KR]). En ce qui concerne la généralisation du théorème 1 dans cette direction, on a le résultat suivant :

Soit G un groupe réductif connexe *quasi-déployé* sur F. Soit A un tore déployé maximal. Soit T le tore maximal contenant A. Fixons un sous-groupe de Borel B contenant T. Soit $\bar{C}$ la chambre de Weyl fermée dans $X_*(T)\otimes\mathbf{R}$ correspondante. Si $\bar{F}$ est une clôture algébrique de F, le groupe $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ agit sur $\bar{C}$. Soit $\mathfrak{A} = X_*(A)\otimes\mathbf{Q}$ et $\mathfrak{A}_+ = \mathfrak{A}\cap\bar{C} = \bar{C}^\Gamma \cap (X_*(T)\otimes\mathbf{Q})$.

Soient L' une extension finie de L et $\mu : \mathbf{G}_m \to G$ un morphisme défini sur L'. On note μ_0 l'unique conjugué de μ qui appartient à $\bar{C}\cap X_*(T)$. On pose

$$\bar{\mu} = \frac{1}{(\Gamma : \Gamma_{\mu_0})}\cdot \sum_{\tau\in\Gamma/\Gamma_{\mu_0}} \tau\mu_0 \in \mathfrak{A}_+ \quad . \tag{0.2}$$

C'est un élément de $\mathfrak{A}_+$ qui ne dépend que de la classe de conjugaison $\{\mu\}$ de μ.

Soit $b\in G(L)$. On note $\bar{\nu}_b \in \mathfrak{A}_+$ son point de Newton ([K3], introduction et §3.2). Rappelons comment on peut le définir : Soit $\mathbf{D}$ le groupe diagonalisable sur F de groupe des caractères $\mathbf{Q}$. On a $\mathrm{Hom}(\mathbf{D},T) = \mathfrak{A}$. A toute représentation rationnelle (V,ϱ) de G est associée un isocristal (D,φ), avec $D = V\otimes_F L$ et $\varphi = \varrho(b)\cdot(id_V\otimes\sigma)$. La décomposition par les pentes

$$D = \oplus_{\alpha\in\mathbf{Q}} D_\alpha$$

peut être considérée comme un morphisme $\nu_\varrho : \mathbf{D}\to GL(V)$ défini sur L. Il existe un unique morphisme $\nu_b : \mathbf{D}\to G$ tel que $\nu_\varrho = \varrho\circ\nu_b$ pour tout ρ. Alors $\bar{\nu}_b$ est l'unique conjugué de ν_b sous l'action de $G(L)$ qui est dans $\mathfrak{A}_+$. Il ne dépend que de la classe de σ-conjugaison de b [K3].

On a par ailleurs sur $\mathfrak{A}_+$ l'ordre partiel usuel, pour lequel $\lambda\leq\lambda'$ si et seulement si $\lambda'-\lambda$ est combinaison linéaire à coefficients ≥ 0 des coracines simples relatives à $\bar{C}$.

Une paire (b,μ) formée d'un élément $b\in G(L)$ et d'un homomorphisme $\mu : \mathbf{G}_m \to G$ défini sur une extension finie L' de L est dite *admissible* (appelée *faiblement admissible* dans [RZ], déf. 1.18) si, pour toute représentation rationnelle (V,ϱ) de G, l'isocristal associé (D,φ), muni de la filtration $\mathcal{F}^\bullet$ sur $D\otimes_L L'$ induite par

$\varrho \circ \mu$, est admissible. Il suffit pour vérifier cette propriété de la tester sur une représentation fidèle.

Théorème 3. *Supposons k algébriquement clos. Soit G un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F. Soient $b \in G(L)$, L' une extension finie de L et $\mu : \mathbf{G}_m \to G$ un morphisme défini sur L'. Pour qu'il existe $\mu' \in \{\mu\}$ défini sur L' et tel que la paire (b, μ') soit admissible il faut et il suffit que $\bar{\mu} \geq \bar{\nu}_b$.* $\square$

Explicitons ce théorème dans le cas où $G = T$ est un tore. Dans ce cas $\{\mu\}$ correspond à un seul élément $\mu \in X_*(T)$ et $\bar{\mu}$ est la moyenne sur l'orbite $\Gamma \cdot \mu$. Dans ce cas l'ordre partiel est trivial et l'énoncé signifie que

$$(b, \mu) \text{ est admissible } \iff \bar{\mu} = \bar{\nu}_b \quad . \tag{0.3}$$

Ceci est exactement l'équivalence entre (i) et (iii) de la proposition 1.21 de [RZ]. Le théorème 3 est donc à la fois une généralisation de cette proposition, qui est le cas d'un tore, et du théorème 1, qui est le cas de GL_d.

Remarque : Dans le théorème 3, soit $E \subset L'$ le corps de définition de la classe de conjugaison $\{\mu\}$ de μ. Alors E est une extension finie de F et L' contient EL. Inversément, étant données une classe de conjugaison $\{\mu\}$ définie sur E et une extension L' de EL, il existe $\mu \in \{\mu\}$ défini sur L', cf. [K1], 1.4.3.

Nous remercions G. Laumon pour des discussions utiles.

Durant la préparation de ce travail le deuxième auteur a bénéficié du soutien financier du Ministère de la Recherche et de la Fondation A. von Humboldt (prix Gay-Lussac / Humboldt), et aussi de l'hospitalité des Universités de Paris (Jussieu et Orsay).

1 – Démonstrations des théorèmes 1 et 2

Comme on l'a dit dans l'introduction, il s'agit seulement de vérifier les implications réciproques. On fixe l'isocristal (D, φ) de dimension d.

Soit $s \in \mathbf{N}$ tel que $s \cdot \nu(D, \varphi) \in \mathbf{Z}^d$. Soit $F' = F_s$ l'extension de degré s de F contenue dans L. Pour tout nombre rationnel α tel que $s\alpha \in \mathbf{Z}$, soit

$$V_\alpha = \{v \in D;\ \varphi^s(v) = \pi^{s\alpha} v\} \quad . \tag{1.1}$$

Soit $V = \Sigma V_\alpha$. Alors on sait que V est somme directe des V_α et que l'application naturelle $V \otimes_{F'} L \to D$ est un isomorphisme. En plus, tout sous-isocristal (D', φ') de (D, φ) est rationnel sur F', i.e., il existe un unique sous-F'-espace vectoriel V' de V tel que $D' = V' \otimes_{F'} L$.

On fixe $\mu \in (\mathbf{Z}^d)_+$. Les filtrations $\mathcal{F}^\bullet$ de type μ sur $V \otimes_{F'} K$, pour K extension de F' variable, forment l'ensemble des K-points d'une variété algébrique projective $\mathcal{F} = \mathcal{F}(V, \mu)$ sur F'. En fait, $\mathcal{F}$ est une variété de drapeaux partiels de V et est de la forme

$$\mathcal{F} = G/P \quad , \tag{1.2}$$

où $G = GL(V)$ et où P est un sous-groupe parabolique de G.

Un point $x \in \mathcal{F}(L)$ sera dit *Weil-générique relativement à F'* si le point image du composé

$$\operatorname{Spec} L \xrightarrow{x} \mathcal{F} \times_{\operatorname{Spec} F'} \operatorname{Spec} L \longrightarrow \mathcal{F}$$

est le point générique de $\mathcal{F}$.

Lemme 1.1. *(i) Il existe toujours des points $x \in \mathcal{F}(L)$ Weil-génériques relativement à F'.*
(ii) Un tel point n'est contenu dans aucune sous-variété propre de $\mathcal{F}$ définie sur F'.

Démonstration. (i) Par le lemme de Bruhat, on sait que le corps des fonctions K de $\mathcal{F}$ est une extension transcendante *pure* de F'. Comme L est de degré de transcendance infinie sur F', K peut être plongé dans L.
(ii) C'est évident. $\square$

Lemme 1.2. *Soit $\mathcal{F}^\bullet$ une filtration de D de type μ correspondant à un point Weil-générique relativement à F' de $\mathcal{F}(L)$. Soit (D', φ') un sous-isocristal de (D, φ). Alors le type de la filtration $\mathcal{F}'^\bullet$ induite par $\mathcal{F}^\bullet$* sur D' est donné par

$$\mu(\mathcal{F}'^\bullet) = (\mu_{d-d'+1}, \ldots, \mu_{d-1}, \mu_d) \quad , \quad \text{où } d' = \dim\, D' \quad .$$

Démonstration. La filtration $\mathcal{F}^\bullet$ est transverse à D', puisque les filtrations qui ne le sont pas forment une sous-variété propre de $\mathcal{F}$ définie sur F' (le complément de l'unique orbite ouverte du parabolique standard de type $(d', d-d')$ sur G/P). On a donc

$$\dim(\mathcal{F}^i \cap D') = \max(0, \dim\, \mathcal{F}^i - (d-d')),\ \forall i \in \mathbf{Z} \tag{1.3}$$

et ceci implique l'assertion. $\square$

Démonstration du théorème 1. Soient donc $\mu \geq \nu(D, \varphi)$ et $\mathcal{F}^\bullet$ une filtration de D correspondant à un point Weil-générique relativement à F'. Montrons que $\mathcal{F}^\bullet$ est admissible. La condition (i) de l'admissibilité $|\mu(\mathcal{F}^\bullet)| = |\nu(D, \varphi)|$ (cf. introduction) résulte de la définition même de l'ordre partiel sur $(\mathbf{Q}^d)_+$. Soit (D', φ') un sous-isocristal de (D, φ) de dimension d'. Alors (D', φ') est un facteur direct de (D, φ) et son vecteur des pentes est de la forme

$$\nu(D', \varphi') = (\nu_{j_1}, \ldots, \nu_{j_{d'}}) \text{ pour } 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{d'} \leq d \quad . \tag{1.4}$$

D'après le lemme 1.2, la filtration $\mathcal{F}'^\bullet$ sur D' induite par $\mathcal{F}^\bullet$ est de type $\mu(\mathcal{F}'^\bullet) = (\mu_{d-d'+1}, \ldots, \mu_d)$. L'inégalité dans (ii) de la définition de l'admissibilité résulte alors de

$$\sum_{i=1}^{d'} \mu_{d-d'+i} \leq \sum_{i=1}^{d'} \nu_{d-d'+i} \leq \sum_{i=1}^{d'} \nu_{j_i} \quad . \qquad \square \tag{1.5}$$

Le théorème 2 résulte alors de la proposition suivante (pour laquelle il n'est pas nécessaire de supposer k algébriquement clos) :

Proposition 1.3. *Soient (D, φ) un isocristal de dimension d et $\mu \in (\mathbf{Z}^d)_+$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) Il existe une filtration admissible $\mathcal{F}^\bullet$ de type μ sur D,
ii) il existe un O_L-réseau de type μ.

Démonstration. C'est une conséquence du résultat de Laffaille [L] : Soit (D, φ) un isocristal et soit $\mathcal{F}^\bullet$ une filtration de D. Rappelons [L] qu'un O_L-réseau M dans

D est dit *adapté à la filtration* $\mathcal{F}^\bullet$ (ou, dans une autre terminologie [FL], que le réseau M, muni de sa filtration $\mathcal{F}^\bullet \cap M$, est *fortement divisible*), si l'on a

$$M = \varphi(\sum_i \pi^{-i}(\mathcal{F}^i \cap M)) \quad . \tag{1.6}$$

D'après le théorème 3.2 de [L][3], la filtration $\mathcal{F}^\bullet$ est faiblement admissible si et seulement s'il existe un réseau M adapté à $\mathcal{F}^\bullet$. La proposition résulte alors du lemme suivant :

Lemme 1.4. *Soit (D, φ) un isocristal de dimension d et soit $\mathcal{F}^\bullet$ une filtration de type $\mu(\mathcal{F}^\bullet)$ sur D. Soit M un réseau adaptée à $\mathcal{F}^\bullet$. Alors*

$$\mu(M) = \mu(\mathcal{F}^\bullet) \quad .$$

Démonstration. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_d$ une base de M sur O_L *adaptée à la filtration*, i.e. telle que, si, pour $1 \leq r \leq d$, μ_r désigne le plus grand des entiers i vérifiant $u_r \in \mathcal{F}^i \cap M$, alors

$$\mathcal{F}^i \cap M = \oplus_{\mu_r \geq i} O_L u_r \quad .$$

Quitte à changer l'ordre des u_r, on peut supposer que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_d$ et on a alors $\mu(\mathcal{F}^\bullet) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d)$.

Si l'on pose $e_r = \pi^{-\mu_r}\varphi(u_r)$, on voit que $e_1, e_2, \ldots, e_d$ est une base de M sur O_L tandis que $\pi^{\mu_1}e_1, \pi^{\mu_2}e_2, \ldots, \pi^{\mu_d}e_d$ est une base de $\varphi(M)$. On a donc $\mu(M) = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d)$. $\square$

Remarque : Les énoncés des théorèmes 1 et 2 ne s'étendent pas au cas où le corps k n'est plus algébriquement clos. Un exemple est donné par $L = F$, $(D, \varphi) = (L^2, \mathrm{id})$, $\mu = (r, -r)$ où r est un entier ≥ 1. Alors $\mu \geq (0, 0) = \nu(D, \varphi)$, mais il n'existe pas de filtration admissible de type μ.

2 – Démonstration du théorème 3

Soient G quasi-déployé sur F, L' une extension finie de L et $\mu : \mathbf{G}_m \to G$ un morphisme défini sur L'. Avec les notations de l'introduction, à μ correspondent des éléments $\mu_0 \in \bar{C}$ et $\bar{\mu} \in \mathfrak{A}_+$ qui ne dépendent que de la classe de conjugaison $\{\mu\}$ de μ.

Soit (V, ϱ) une réprésentation rationnelle de G, où V est un espace vectoriel de dimension d sur F. Alors on associe à $\{\mu\}$ une classe de conjugaison $\{\varrho \circ \mu\}$ de morphismes de $\mathbf{G}_m$ dans $GL(V)$ à laquelle correspond un élément bien defini $\varrho(\mu_0)$ de $(\mathbf{Z}^d)_+$. De même, $\bar{\mu}$ et par ailleurs n'importe quel élément $\bar{\nu} \in \mathfrak{A}_+$ définissent des éléments $\varrho(\bar{\mu})$ et $\varrho(\bar{\nu})$ de $(\mathbf{Q}^d)_+$.

Lemme 2.1. *Soit $\bar{\nu} \in \mathfrak{A}_+$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $\bar{\mu} \leq \bar{\nu}$ (dans l'ordre partiel sur $\mathfrak{A}_+$)
(ii) $\varrho(\bar{\mu}) \leq \varrho(\bar{\nu})$ pour toute représentation rationnelle (V, ϱ) de G
(ii') $\varrho(\mu_0) \leq \varrho(\bar{\nu})$ pour toute représentation rationnelle (V, ϱ) de G
(iii) comme en (ii), pour une représentation fidèle (V, ϱ) de G

[3] *Stricto sensu*, ce résultat n'est énoncé dans [L] que lorsque $F = \mathbf{Q}_p$ et la filtration est positive. Par une torsion à la Tate, on se ramène au cas d'une filtration positive. La preuve de Laffaille s'étend alors telle quelle au cas considéré ici : il suffit de remplacer p par π.

(iii') comme en (ii'), pour une représentation fidèle (V, ϱ) de G

Démonstration. On remarque que la classe de conjugaison $\{\varrho \circ \mu\}$ est définie sur F, de sorte que $\varrho(\mu_0) = \varrho(\bar{\mu})$. Ceci étant, l'assertion résulte de [RR], §2. $\square$

Ce lemme entraîne déja l'implication directe dans le théorème 3, comme conséquence de l'implication directe dans le théorème 1.

Un cocaractère $f : \mathbf{G}_m \to G$ définit, sur chaque représentation linéaire V de G, une graduation $V = \oplus_{n \in \mathbf{Z}} V_n$ donc aussi une filtration décroissante en posant $\mathrm{Fil}^r V = \oplus_{n \geq r} V_n$. Deux cocaractères de G sont dit *par-équivalents* s'ils définissent les mêmes filtrations sur les représentations linéaires de V. Les classes d'équivalence dans la classe de conjugaison $\{\mu\}$ de μ forment une variété projective $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G, \{\mu\})$ définie sur L'. On peut écrire

$$\mathcal{F}(G, \{\mu\}) = G_{L'}/P_\mu \quad , \tag{2.1}$$

où P_μ est un sous-groupe parabolique défini sur L'.

Soit $b \in G(L)$. Pour démontrer le théorème 3 on peut remplacer $b \in G(L)$ par un élément σ-conjugué $b' = gb\sigma(g)^{-1}$, pour $g \in G(L)$, car(b, μ) est admissible si et seulement si $(gb\sigma(g)^{-1},\ g\mu g^{-1})$ l'est. D'après Kottwitz ([K2], §4) on peut donc supposer que b vérifie une identité de décence ([RZ], p. 8), c'est-à-dire qu'il existe un entier $s > 0$ tel que

$$(b\sigma)^s = (s \cdot \nu_b)(\pi)\sigma^s$$

où $\nu_b : \mathbf{D} \to G$ a été défini avant l'énoncé du théorème 3 et s désigne l'endomorphisme de $\mathbf{D}$ induit par la multiplication par s sur $\mathbf{Q}$.

A $x \in \mathcal{F}(L')$ on associe son *co-caractère canonique de Harder-Narasimhan*

$$\lambda_x : \mathbf{D} \longrightarrow G \tag{2.2}$$

qui est bien défini (sur L') à par-équivalence près. Il est caractérisé par le fait que pour toute représentation rationnelle (V, ϱ) de G la $\mathbf{Q}$-filtration sur $V \otimes_F L$ induite par $\varrho \circ \lambda_x$ est la filtration canonique (indexée par les HN-pentes) de l'isocristal filtré $(V \otimes_F L,\ \varrho(b) \cdot (\mathrm{id} \otimes \sigma), \mathcal{F}^\bullet_{\varrho(x)})$, (cf. par exemple, [RZ], Prop. 1.4). Soit F' l'unique extension de degré s de F contenue dans L. On sait ([RZ], Prop. 1.36), que λ_x est défini sur F'.

Soit $G_{\mathrm{ab}} = G/G_{\mathrm{der}}$ le tore quotient maximal de G. L'isomorphisme

$$\mathcal{F}(G, \{\mu\}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(G_{\mathrm{ad}}, \{\mu_{\mathrm{ad}}\}) \times \mathcal{F}(G_{\mathrm{ab}}, \{\mu_{\mathrm{ab}}\}) \tag{2.3}$$

induit une bijection entre points (faiblement) admissibles,

$$\mathcal{F}(G, \{\mu\})(L')^{\mathrm{adm}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(G_{\mathrm{ad}}, \{\mu_{\mathrm{ad}}\})(L')^{\mathrm{adm}} \times \mathcal{F}(G_{\mathrm{ab}}, \{\mu_{\mathrm{ab}}\})(L')^{\mathrm{adm}} \quad . \tag{2.4}$$

Pour démontrer le théorème 3, on peut donc supposer que G est semi-simple, puisque le cas d'un tore est déja reglé par [RZ], Prop. 1.21, comme on l'a expliqué dans l'introduction.

Soit donc G semi-simple et soit E' une extension finie de F' contenue dans L' sur laquelle la classe de conjugaison de μ est définie. Soit $x \in \mathcal{F}(L')$ Weil-générique relativement à E'. De tels points existent d'après le lemme 1.1 (lemme de Bruhat pour G). Montrons que, sous l'hypothèse $\bar{\mu} \geq \bar{\nu}_b$, x est faiblement admissible. Il suffit de voir que le cocaractère λ_x associé à x est trivial. Raisonnons par l'absurde et supposons que le parabolique $P_x = P_{\lambda_x}$ soit propre. Ce parabolique est défini sur F'.

Lemme 2.2. *Soient G un groupe quasi-déployé sur F et B un sous-groupe de Borel défini sur F. Soit P un sous-groupe parabolique propre défini sur F'.*

(i) Il existe une représentation rationnelle irréductible (V, ϱ) de G et une droite $\ell \subset V \otimes_F F'$, telles que $P = \mathrm{Stab}_G(\ell)$.

(ii) Pour une telle représentation soit $W_\bullet = ((0) \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_d = V)$ un drapeau complet de V stable par $\varrho(B)$. Alors il existe $g \in G(F')$ tel que ℓ soit transverse à $\varrho(g) \cdot W_\bullet$, i.e., tel que $\ell \not\subset \varrho(g)W_{d-1}$.

Démonstration. (i) On peut évidemment supposer que P est standard, i.e., contient $B \otimes_F F'$. Soit $\bar{C}^* \subset X^*(T) \otimes \mathbf{R}$ la chambre de Weyl fermée dans l'espace des caractères correspondant à B. Alors P correspond à une facette de $\bar{C}^*$. Soit $\lambda \in X^*(T)$ à l'intérieur de cette facette, et soit V_λ la représentation irréductible de plus haut poids λ. Alors V_λ est un espace vectoriel sur F' sur lequel agit $G_{F'}$. Soit $F_\lambda = F^{\Gamma_\lambda}$. Alors V_λ est défini sur F_λ, i.e. est de la forme $V_\lambda = V_\lambda^0 \otimes_{F_\lambda} F'$ et V_λ^0 est irréductible comme représentation de G_{F_λ}. Le F- espace vectoriel cherché V est égale à V_λ^0 et est muni de la représentation rationnelle ϱ de G définie par la composition des homomorphismes canoniques,

$$G \to R_{F_\lambda/F}(G_{F_\lambda}) \to R_{F_\lambda/F}(GL_{F_\lambda}(V_\lambda^0)) = GL_F(V), \tag{2.5}$$

(cf. [T], th. 7.2). Alors (V, ϱ) répond à la question en prenant pour ℓ la droite engendré par un vector de poids λ dans V_λ.

(ii) Le sous-espace de $V \otimes_F F'$ engendré par $\{\varrho(g)x;\ g \in G(F'),\ x \in \ell\}$ est une représentation irréductible de $G_{F'}$. Le plus petit sous-espace défini sur F et le contenant est une représentation de G. Son espace ne peut donc pas être contenu dans W_{d-1}. $\square$

Appliquons ce lemme au parabolique P_{λ_x}. On considère l'isocristal $(D, \varphi) = (V \otimes_F L, \varrho(b) \cdot (\mathrm{id} \otimes \sigma))$, muni de sa filtration $\mathcal{F}^\bullet_{\varrho(x)}$ sur $D \otimes_L L'$. Soit $D' = \ell \otimes_{F'} L$. Alors D' est un cran dans la filtration de Harder-Narasimhan de D, car il est stable par le parabolique de Harder-Narasimhan $P_{\varrho\circ\lambda_x}$ de $GL(V)_L$. Le type $\mu(\mathcal{F}'^\bullet) \in \mathbf{Z}$ de la filtration induite par $\mathcal{F}^\bullet_{\varrho(x)}$ sur $D' \otimes_L L'$ et la pente $\nu(D', \varphi') \in \mathbf{Q}$ de l'isocristal $(D', \varphi') = (D', \varphi | D')$ vérifient donc

$$\mu(\mathcal{F}'^\bullet) > \nu(D', \varphi') \quad . \tag{2.6}$$

Le lemme 2.2 implique que les points $y \in \mathcal{F}(L')$ tels que la filtration $\mathcal{F}^\bullet_{\varrho(y)}$ de $D \otimes_L L'$ ne soit pas transverse à $D' \otimes_L L'$ forment une sous-variété fermé *propre* de $\mathcal{F}$ défini sur E'. Comme x est Weil-générique relativement à E', il ne peut pas être contenu dans cette sous-variété. Soit $\mathcal{F}^\bullet_{\varrho(x)}$ de type $(\mu_1, \ldots, \mu_d) \in (\mathbf{Z}^d)_+$. Comme dans le lemme 1.2, la transversalité implique que

$$\mu(\mathcal{F}'^\bullet) = \mu_d \quad . \tag{2.7}$$

Soit $\nu(D, \varphi) = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in (\mathbf{Q}^d)_+$. Alors $\nu(D', \varphi') = \nu_j$, pour un j avec $1 \leq j \leq d$. Comme $\bar{\mu} \geq \bar{\nu}_{\bar{b}}$, le lemme 2.1 nous montre que $(\mu_1, \ldots, \mu_d) \geq (\nu_1, \ldots, \nu_d)$, ce qui nous donne

$$\mu(\mathcal{F}'^\bullet) = \mu_d \leq \nu_d \leq \nu_j = \nu(D', \varphi') \quad , \tag{2.8}$$

contredisant (2.6). $\square$

3 – Remarques supplémentaires

Supposons k algébriquement clos.

a) D'après la proposition 1.3, dans le cas de GL_d, les deux théorèmes d'existence sont équivalents. Il faut pourtant souligner que dans le contexte d'un groupe réductif G, quasi-déployé sur F et déployé sur une extension non ramifiée de de F, l'existence d'un sommet hyper-spécial d'un type μ implique, outre l'inégalité $\bar{\mu} \geq \bar{\nu}_b$ qui apparaît dans le théorème 3, l'identité

$$\mu^{\natural} = \kappa(b) \tag{3.1}$$

dans $\pi_1(G)_\Gamma$ (cf. [RR], §4) . On voit donc qu'a priori, dans le cas général, la question d'existence de réseaux est plus subtile que la question d'existence de filtrations. Le cas de GL_d est exceptionnel car alors (3.1) résulte de l'inégalité $\bar{\mu} \geq \bar{\nu}_b$. Le lien entre le théorème 1 et le théorème 2 se fait via le théorème de Laffaille sur l'existence de réseaux fortement divisibles et on peut se demander s'il existe une notion analogue en théorie de groupes.

b) La construction de Laffaille d'un réseau adapté à une filtration admissible fournit à partir d'un réseau M arbitraire un unique réseau adapté maximal $M^{\max}$ contenu dans M, et aussi un unique réseau adapté minimal $M^{\min}$ contenant M. Malheureusement, cette construction n'est pas compatible aux operations d'algèbre linéaire usuelles (produit tensoriel: $(M_1 \otimes M_2)^{\max} \neq M_1^{\max} \otimes M_2^{\max}$, $(M_1 \otimes M_2)^{\min} \neq M_1^{\min} \otimes M_2^{\min}$, passage au dual: on a $(M^*)^{\max} = (M^{\min})^*$ et non $(M^{\max})^*$). Ceci, tout comme la remarque précédente, semble montrer qu'il n'est pas possible de déduire du théorème 2 et du théorème 3 pour le groupe symplectique l'existence de réseaux autoduaux d'un type donné dans un isocristal symplectique (un tel théorème d'existence est pourtant démontré, par d'autres méthodes, dans [KR]).

c) Nous ignorons ce qui se passe si l'on abandonne l'hypothèse $\bar{\mu} \geq \bar{\nu}_b$. Explicitons dans le cas de GL_d. Soit (D, φ) un isocristal de dimension d. Soit $\mu \in (\mathbf{Z}^d)_+$ avec $|\mu| = |\nu(D, \varphi)|$, et soit $\mathcal{F}$ la variété des filtrations de type μ sur D. Soit $x \in \mathcal{F}(L)$ et soit $\lambda_x : \mathbf{D} \to GL(D)$ le HN-cocaractère associé (bien défini à par-équivalence près). Alors λ_x définit un élément bien déterminé $\lambda(x) \in (\mathbf{Q}^d)_+$ avec $|\lambda(x)| = 0$. On obtient ainsi une décomposition disjointe

$$\mathcal{F}(L) = \dot{\bigcup_{\substack{\lambda \in (\mathbf{Q}^d)_+, \\ |\lambda| = 0}}} \mathcal{F}(L)_\lambda \quad , \tag{3.2}$$

où

$$\mathcal{F}(L)_\lambda = \{x \in \mathcal{F}(L);\ \lambda(x) = \lambda\} \quad .$$

Si $\mu \geq \nu(D, \varphi)$, le théorème 1 montre que l'unique élément minimal $\lambda = 0$ de l'ensemble d'indices donne une contribution non-vide à (3.2). Même dans le cas $\mu \geq \nu(D, \varphi)$ nous n'avons pas déterminé l'ensemble des indices dans (3.2) avec une contribution non-vide. Si $\mu \not\geq \nu(D, \varphi)$ nous ignorons même les indices *minimaux* parmi ceux avec une contribution non-vide à (3.2).

d) Rappelons que C_p désigne le complété d'une clôture algébrique de L. Soient G, b, L', μ comme dans l'énoncé du théorème 3. Alors on sait [RZ], Prop. 1.36 que les points admissibles par rapport à b dans $\mathcal{F}(G,\{\mu\})(C_p)$ forment un espace rigide-analytique sur L', ouvert admissible de $\mathcal{F}(G,\{\mu\})$, que nous noterons $\mathcal{F}(G,\{\mu\})^{\mathrm{adm}}$. On peut alors reformuler ainsi le théorème 3 :

Théorème 3'. *On suppose k algébriquement clos. Soit G, b, L', μ comme dans le théorème 3. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $\mathcal{F}(G,\{\mu\})^{\mathrm{adm}} \neq \emptyset$
(ii) $\mathcal{F}(G,\{\mu\})^{\mathrm{adm}}(L') \neq \emptyset$
(iii) $\bar{\mu} \geq \bar{\nu}_b$.

En effet, (i) $\Rightarrow$ (iii) se démontre comme dans le §2 par réduction à l'inégalité [F] 4.3.3 pour le cas de GL_d. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) est le théorème 3 et l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est triviale. □

e) Soit (D, φ, N) un (φ, N)-module sur L (cf. par exemple, [CF]), c'est-à-dire un isocristal muni d'une application L-linéaire $N : D \to D$ telle que $N\varphi = q\varphi N$ (où q, rappelons-le, est le nombre d'éléments du corps résiduel de F). On a encore une notion de filtration admissible dans ce cadre et le théorème 1 s'étend : cela résulte de ce que toute filtration admissible sur l'isocristal sous-jacent (obtenu en oubliant l'action de N) est a fortiori admissible sur le (φ, N)-module.

Bibliographie

[CF] P. Colmez, J.-M. Fontaine: Construction des représentations semi-stables. Invent. Math. **140** (2000), 1– 43

[De] J.-M. Decauwert: Classification des A-modules formels, C.R.A.S. Paris **282** (1976), 1413-1416

[F] J.-M. Fontaine: Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. Astérisque **65** (1979), 3–80

[FL] J.-M. Fontaine, G. Laffaille: Construction de représentations p-adiques. Ann. Sci. École Norm. Sup. **15** (1982), 547–608

[Ka] N. Katz: Slope filtration of F-crystals. Astérisque **63** (1979), 113-163

[K1] R. Kottwitz: Shimura varieties and twisted orbital integrals. Math. Ann. **269** (1984), 287–300.

[K2] R. Kottwitz: Isocrystals with additional structure. Comp. Math. **56** (1985), 201-222

[K3] R. Kottwitz: Isocrystals with additional structure. II. Comp. Math. **109** (1997), 255-339

[KR] R. Kottwitz, M. Rapoport: On the existence of F-crystals. In preparation

[L] G. Laffaille: Groupes p-divisibles et modules filtrés: le cas peu ramifié. Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 187–206

[R] M. Rapoport: A positivity property of the Satake isomorphism. Manuscripta Math. **101** (2000), 153–166

[RR] M. Rapoport, M. Richartz: On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure. Comp. Math. **103** (1996), 153–181

[RZ] M. Rapoport, Th. Zink: Period spaces for p-divisible groups. Annals of Mathematics Studies **141**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996

[T] J. Tits: Représentations linéaires irréductibles d'un groupe réductif sur un corps quelconque. J. Reine Angew. Math. **247** (1971), 196–220