

Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik

On the local zeta function of Shimura varieties.

Monodromy filtration and vanishing cycles in unequal characteristic

M. Rapoport¹★ und Th. Zink²

¹ Sonderforschungsbereich „Theoretische Mathematik“, Universität Bonn,
Beringstr. 4, D-5300 Bonn 1

² Institut für Mathematik der Akademie der Wissenschaften der DDR,
Mohrenstr. 39, DDR-1080 Berlin

Es sei $S(G, h) = S_C(G, h)$ eine Shimuravarietät [7]: $S_C(G, h)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / C_\infty \cdot C$. In vielen Fällen ist die Shimuravermutung gelöst: es gibt ein kanonisches Modell von $S(G, h)$ über einem Zahlkörper $E = E(G, h) \subset \mathbb{C}$, der sich explizit beschreiben läßt. Das Problem, die Zetafunktion der algebraischen Varietät $S_C(G, h)$ über E zu bestimmen, ist seit längerer Zeit von Interesse. Das Ziel ist es, diese Zetafunktion als Produkt von L -Funktionen, die von Langlands zu automorphen Darstellungen assoziiert werden, auszudrücken. Der lokale Faktor der Zetafunktion in einer *guten* Stelle ist jetzt in einigen Fällen bekannt (Eichler, Shimura, Ihara für Shimurakurven; Langlands für einige Shimuravarietäten höherer Dimension). In dieser Arbeit bestimmen wir den lokalen Faktor der Zetafunktion in gewissen *schlechten* Stellen für einige Shimuravarietäten der Dimension 2. Unser Resultat betrifft die beiden folgenden Klassen von Shimuravarietäten. Es sei p eine feste rationale Primzahl.

Klasse A: G ist eine Gruppe von unitären Ähnlichkeiten über $\mathbb{Q}$, so daß $G_{\text{ad}\mathbb{R}} = \text{PSU}(2, 1)$ und so daß $G_{\text{ad}\mathbb{Q}_p}$ anisotrop ist. Über die offene kompakte Untergruppe $C \subset G(\mathbb{A}_f)$ setzen wir voraus, daß sie maximal kompakt in p ist. Die entsprechende Shimuramannigfaltigkeit ist über einem imaginär-quadratischen Körper E definiert, in dem p in zwei verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zerfällt. Wir bestimmen die lokalen Faktoren in $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$. Grob gesagt ist unser Ergebnis, daß der lokale Faktor in $\mathfrak{p}_i$ ein Produkt von lokalen Hecke'schen L -Funktionen von E in $\mathfrak{p}_i$ ist:

$$Z_{\mathfrak{p}_i}(S_C(G, h)/E, s) = \prod_k (L(s, \chi_k) \cdot L(s-1, \chi_k) \cdot L(s-2, \chi_k)) \cdot \prod_l L(s, \chi_l)$$

(Die Anzahl der auftretenden Charaktere χ_k ist gleich $\dim H^0(S_C(G, h), \mathbb{Q})$, die Anzahl der auftretenden Charaktere χ_l ist gleich

★ *Ständige Adresse:* Mathematisches Institut, Universität Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 288, D-6900 Heidelberg 1

$$\dim H^2(S_C(G, h), Q) - \dim H^0(S_C(G, h), Q)).$$

Wir identifizieren die auftretenden Charaktere. Die genaue Formulierung findet sich im § 6.

Klasse B: G ist die multiplikative Gruppe einer Quaternionenalgebra über einer reell-quadratischen Erweiterung F von Q , in der p prim bleibt, die unverzweigt in den unendlichen Stellen und die verzweigt in p ist. Wir setzen wieder voraus, daß C maximal kompakt in p ist. In diesem Fall ist $E(G, h) = Q$ und wir bestimmen den lokalen Faktor in p :

$$Z_p(S_C(G, h), s) = \prod_k (L(s, \chi_k) \cdot L(s-1, \chi_k) \cdot L(s-1, v_{F_p/Q_p} \cdot \chi_k) \cdot L(s-2, \chi_k)) \\ \cdot \prod_l (L(s, \chi_l) \cdot L(s, v_{F_p/Q_p} \cdot \chi_l))$$

(v_{F_p/Q_p} = multiplikativer Charakter von $Q_p^\times$, der der Erweiterung F_p von Q_p mittels Klassenkörpertheorie entspricht). Dies ist ein Produkt von lokalen Hecke'schen L -Funktionen für Q in p .

Wir begründen im weiteren unser Herangehen an das Problem und weisen auf andere in der Arbeit bewiesene Sätze hin, die unabhängig von der Berechnung der Zetafunktion von Interesse sind. Es sei $\mathfrak{p} \subset E$ eine Primstelle, in der $S_C(G, h)$ schlechte Reduktion hat. Der lokale Faktor der Zetafunktion ist über die durch die l -adische Kohomologie definierte l -adische Darstellung der lokalen Galoisgruppe erklärt [34]. Im Gegensatz zum Fall der guten Reduktion hängt er nicht unmittelbar von den Punkten einer Reduktion mod $\mathfrak{p}$ ab. Daher versagt die für eine gute Primstelle benutzte Methode [19], um den lokalen Faktor der Zetafunktion zu berechnen. Das folgende Vorgehen führt in einigen Fällen schlechter Reduktion zum Ziel:

a) Man definiert ein „passendes“ Modell von $S_C(G, h)$ über $O_{E_{\mathfrak{p}}}$ und analysiert seine spezielle Faser und deren Lage in der Gesamtvarietät.

b) Man benutzt die Spektralsequenz der verschwindenden Zyklen, um die Kohomologie der allgemeinen geometrischen Faser mit ihrer natürlichen $\text{Gal}(\bar{E}_{\mathfrak{p}}/E_{\mathfrak{p}})$ -aktion aus den in a) gewonnenen Informationen zu berechnen. Damit ist der lokale Faktor der Zetafunktion bestimmt.

c) Man drückt das gewonnene Resultat als Produkt von lokalen automorphen L -Funktionen aus.

Wir machen jetzt einige Bemerkungen, die die einzelnen Punkte erhellen sollen. Das Vorbild für eine Lösung des Punktes a) ist ein Resultat von Čerednik, demzufolge Shimurakurven an schlechten Stellen eine p -adische Uniformisierung im Sinne von Mumford besitzen. Obgleich eine direkte Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf höhere Dimensionen nicht zu existieren scheint, haben wir, beginnend mit den Untersuchungen von Langlands [25], einige höherdimensionale Fälle analysieren können [30, 39]. Beispielsweise bildet im Fall A die spezielle Faser des passenden Modells einen reduzierten Divisor mit normalen Kreuzungen, während im Falle B das passende Modell lokal das Produkt von Kurven mit gewöhnlichen Doppelpunkten und einer glatten Varietät ist. In dieser Arbeit sehen wir den Schritt a) als bereits vollzogen an. Unser Hauptanliegen hier sind die Schritte b) und c) für diese Beispiele.

Um den Schritt b) zu erläutern, sei ganz allgemein (S, s, η) ein henselsches Tripel mit endlichem Restklassenkörper (S ist das Spektrum eines diskreten Bewertungsrings und s und η sind der spezielle und allgemeine Punkt) und $f: X \rightarrow S$ ein eigentlicher flacher Morphismus mit glatter allgemeiner Faser. Die Theorie der verschwindenden Zyklen drückt die Kohomologie der allgemeinen geometrischen Faser durch eine Spektralsequenz auf der speziellen Faser aus.

$$E_2^{p,q} = H^p(X_{\bar{s}}, R^q \Psi Q_i) \Rightarrow H^{p+q}(X_{\bar{\eta}}, Q_i).$$

Wir berechnen die Garben $R^q \Psi Q_i$ im Fall, daß X regulär ist und die spezielle Faser einen Divisor mit normalen Kreuzungen bildet, dessen Multiplizitäten alle prim zur Restklassencharakteristik von S sind. (Wegen SGA 7, I. Theorem 3.3 läuft dies auf einen Beweis der Puritätsvermutung von Grothendieck in diesem Fall hinaus) (Satz 2.2 und Satz 2.8). Bisher war dies nur im (geometrischen) Fall gleicher Charakteristik bekannt (ohne Voraussetzung über die auftretenden Multiplizitäten). Die Berechnung von $R^q \Psi Q_i$ kann auch im Fall, daß X lokal ein Produkt von Kurven mit Doppelpunkten ist, durchgeführt werden (Satz 3.11 und Korollar 3.7).

Wir nehmen im weiteren an, daß die Aktion der Trägheitsgruppe $I \subset \text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ auf $H^i(X_{\bar{\eta}}, Q_i)$ unipotent ist (semi-stabiler Fall). Dann faktorisiert sich diese Aktion über den maximalen pro- l -Quotienten G von I , der isomorph zu $\mathbb{Z}_l$ ist. Die von einer topologischen Erzeugenden von G induzierte Transformation T ist die Monodromietransformation. Es sei $N = \log T = -\sum (1 - T)^m / m$; dies ist eine nilpotente Transformation auf $H^i(X_{\bar{\eta}}, Q_i)$. Die *Monodromiefiltration*

$$0 \subset W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_{2i} = H^i(X_{\bar{\eta}}, Q_i)$$

ist dadurch charakterisiert, daß $N(W_j) \subset W_{j-2}$ und daß $N^k: Gr_{i+k}^w \rightarrow Gr_{i-k}^w$ ein Isomorphismus ist. Die Aktion der Galoisgruppe respektiert diese Filtration und operiert auf den graduierten Bestandteilen über ihren Quotienten $\text{Gal}(\bar{s}/s)$. Falls Deligne's Vermutung [6] richtig wäre, daß die $\text{Gal}(\bar{s}/s)$ -Darstellung Gr_j^w rein vom Gewicht j ist, so könnte man die Größe der Jordanblöcke von N aus den m.H. der Spektralsequenz der verschwindenden Zykeln berechneten Dimensionen der einzelnen Gewichtsräume ablesen. Die Bestimmung der Jordanschen Normalform von N ist aber ohnehin das Kernproblem im Schritt b). Deligne's Beweis seiner Vermutung im Fall gleicher Charakteristik [9] läßt sich nicht auf den Fall ungleicher Charakteristik übertragen. Steenbrinck [36] hat das Analogon dieser Vermutung in der Hodgetheorie bewiesen (s.a. [5, 33]). Man kann einen Teil seines Beweises genügend abstrakt fassen, um ihn auf den hier vorliegenden Fall übertragen zu können. Im Fall normaler Schnitte der relativen Dimension 2 können wir Deligne's Vermutung beweisen (Satz 2.13). Der Fall normaler Schnitte beliebiger Dimension könnte, unter Annahme von Purität, auf die folgende Standardvermutung zurückgeführt werden, die den starken Lefschetzsatz auf nicht notwendig ample Divisoren verallgemeinern würde. Es sei X eine glatte projektive Varietät der Dimension n über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und Y ein glatter Divisor auf X . Wir definieren die folgende Bilinearform auf $H^k(Y, Q_i)(k)$. Falls $a = \sum_i U a_i$ und

$b = \sum_j E b_j$ die primitiven Zerlegungen von zwei Kohomologieklassen sind, so ist

$$\langle a, b \rangle = \sum_j (-1)^j \operatorname{Tr}_Y(L^{(n-1)-(k-2j)} a_j \cup b_j).$$

Die Vermutung ist, daß die Einschränkung dieser Bilinearform auf das Bild unter der Restriktionsabbildung $H^k(X, Q_i)(k) \rightarrow H^k(Y, Q_i)(k)$ für $k \leq n-1$ nicht-ausgeartet ist.

Bei der Berechnung der Gewichtsräume im Fall A haben wir die Steenbrinckspektralsequenz, die bei seinem Beweis mit abfällt, verwendet. Sie drückt wie die von uns im Fall B benutzte Spektralsequenz der verschwindenden Zyklen die Kohomologie der allgemeinen Faser durch die spezielle Faser aus. Unsere Rechnungen zeigen, daß die 1. Kohomologiegruppen der von uns betrachteten Shimuravarietäten verschwinden (Satz 5.4 und Proposition 5.12). Während dies Ergebnis im Fall B auch einfach m.H. der kontinuierlichen Kohomologie bewiesen werden kann, ist es im Fall A mit dem Nichtverschwindungssatz von Kazhdan-Howe-Piatetskii-Shapiro für *quasizerfallende* unitäre Gruppen in Kontrast zu setzen. Man kann vermuten, daß ein solcher Verschwindungssatz für eine unitäre Gruppe in 3 Variablen über einem beliebigen Zahlkörper, die in einer nichtarchimedischen Stelle anisotrop modulo dem Zentrum ist, gilt. (Vgl. [26], wo diese Vermutung im Zusammenhang mit der Spurformel diskutiert wird.)

Für die von uns betrachteten Shimuravarietäten kann man einen Ausdruck für die globale Zetafunktion vermuten.

$$(*) \quad Z(S_C(G, h)/E, s) = \prod L(s-1, \pi', r)^{m(\pi)m(\pi_\infty)m(\pi_f)}.$$

Das Produkt auf der rechten Seite erstreckt sich über ein Repräsentantensystem der L -Pakete von automorphen Darstellungen und die Multiplizität $m(\pi)$, mit der π im Raum der automorphen Formen vorkommt, hängt lediglich von der L -Klasse von π ab. Hierbei sollten automorphe Darstellungen π in ein und dasselbe L -Paket zusammengefaßt werden, wenn ihre archimedischen Komponenten π_∞ L -ununterscheidbar sind. Wir beschäftigen uns nicht mit unserer Vermutung, daß $m(\pi)=1$. Der Exponent $m(\pi_\infty)$ ist gleich 1, wenn π_∞ Kohomologie liefert und gleich 0 sonst. Der Exponent $m(\pi_f)$ ist die Multiplizität, mit der die triviale Darstellung von C in π_f vorkommt. Die Darstellung r der zu G gehörigen L -Gruppe ist von dem die Shimuravarietät definierenden Kogewicht h_0 abgeleitet. (Vgl. [20], p. 1124). Die L -Funktion $L(s-1, \pi', r)$ ist gleich $L(s-1, \pi, r)$, falls π unendlichdimensional ist. Falls dagegen π eindimensional ist und somit mit einem Charakter χ des algebraischen Torus G/G_{der} identifiziert werden kann, so ist $L(s-1, \pi', r) = L(s-1, \chi, r)$. Diese beiden Eulerprodukte stimmen in fast allen Stellen überein.

Wir zeigen die Identität (*) in den von uns betrachteten Primstellen. Für den Schritt c) beginnt man mit dieser Behauptung als Ansatz. Diesen Ansatz führt man auf einen Vergleich der Selbergschen Spurformeln für G und für eine innere Verschränkung G_- zurück, der durch eine Stabilisierung der Spurformeln erreicht wird [26]. Genauer gesagt, erweist es sich, daß für die von uns eingesetzten Funktionen die Spurformeln automatisch stabil sind.

Unsere Arbeit stellt eine Weiterentwicklung der Überlegungen in [25] dar. Wir bedanken uns bei R.P. Langlands für sein Interesse und seine Hilfe.

§ 1. Eine formale Version einer Spektralsequenz von Steenbrinck	25
§ 2. Anwendung auf die verschwindenden Zyklen	34
§ 3. Berechnung der verschwindenden Zyklen für Produkte gewöhnlicher Doppelpunkte	50
§ 4. Beschreibung der Shimuravarietäten	56
§ 5. Berechnung der Kohomologie	63
§ 6. Berechnung des lokalen Faktors der Zetafunktion	74

§ 1. Eine formale Version einer Spektralsequenz von Steenbrinck

Es sei G eine pro- l -Gruppe, die isomorph zu Z_l ist. Wir fixieren einen Koeffizientenring $A = \mathbb{Z}/l^h \mathbb{Z}$. Unter einem $A[G]$ -Modul verstehen wir im folgenden einen stetigen und diskreten $A[G]$ -Modul. Mit $A(1)$ bezeichnen wir den $A[G]$ -Modul $A \otimes G$ mit der trivialen G -Aktion. Es seien $K^+ A[G]$ die Kategorie der nach unten beschränkten Komplexe von $A[G]$ -Moduln, $K^+ A$ die entsprechende Kategorie von Komplexen von A -Moduln und $D^+ A[G]$ und $D^+ A$ die derivierten Kategorien. Den abgeleiteten Funktor des Funktors der G -Invarianten $K \mapsto K^G$ bezeichnen wir mit

$$R_G: D^+ A[G] \rightarrow D^+ A.$$

Um Mißverständnisse auszuschließen, legen wir fest, daß ein Doppelkomplex $(K^{p,q}, \partial', \partial'')$ ein bigraduiertes Objekt mit Differentialen $\partial': K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$ und $\partial'': K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$ ist, so daß $\partial' \circ \partial'' = \partial'' \circ \partial'$. Der assoziierte einfache Komplex sei

$$sK^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}, d x^{p,q} = \partial' x^{p,q} + (-1)^p \partial'' x^{p,q}, \quad x^{p,q} \in K^{p,q}.$$

Es sei $f: M \rightarrow N$ ein Morphismus von Komplexen. Wir setzen $K^{-1,n} = M^n$, $K^{0,n} = N^n$ und $K^{i,n} = 0$ für $i \neq -1, 0$. Man erhält in offensichtlicher Weise einen Doppelkomplex, dessen assoziierter einfacher Komplex $C(f)$ der Abbildungszyylinder von f ist:

$$\partial'^{-1,*} = f, \partial''^{*, -1} = d_M, \partial''^{*, 0} = d_N.$$

Wir erinnern an die folgende bekannte Tatsache [10].

1.1 Satz. *Es sei T eine topologische Erzeugende von G . Es sei $K \in K^+ A[G]$. Dann wird $R_G K$ durch den assoziierten einfachen Komplex des folgenden Doppelkomplexes repräsentiert*

$$K \xrightarrow{T-1} K.$$

Der Satz gibt die Möglichkeit den Funktor R_G auf dem Niveau der Komplexe zu definieren.

$$R_G: K^+ A[G] \rightarrow K^+ A.$$

Leider hängt R_G von der Wahl von T ab. Wir fixieren T , aber machen trotzdem einen Unterschied zwischen G und Z_l , damit die folgenden Konstruktionen wenigstens auf den Kohomologiegruppen kanonisch werden.

Es sei

$$\theta \in H^1(G, A(1)) = \text{Hom}_{D^+ A[G]}(A, A(1)[1])$$

die kanonische Erzeugende. Wir erhalten Morphismen „Cupprodukt mit θ “

$$\theta: K \rightarrow K(1)[1], \theta: R_G K \rightarrow R_G K(1)[1], \quad K \in D^+ A[G],$$

deren explizite Definition im folgenden Beweis erscheint (Vorzeichen!).

1.2 Lemma. *Es sei $K \in K^+ A[G]$. Das Cupprodukt mit θ wird durch die folgende Abbildung von Doppelkomplexen induziert.*

$$\begin{array}{ccccc} R_G K & & K & \xrightarrow{T-1} & K \\ \downarrow \theta & & \downarrow \text{id} \otimes T & & \\ R_G K(1)[1] & K(1) & \xrightarrow{T-1} & K(1) & \\ & -1 & & 0 & 1 \end{array}$$

Die untersten Zahlen geben den ersten Grad in dem entsprechenden Doppelkomplex an.

Beweis. θ ist durch die folgende Extension von $A[G]$ -Moduln definiert

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow A(1) \rightarrow A \oplus_1 A(1) \rightarrow A \rightarrow 0 \\ \lambda \mapsto (0, \lambda) \\ (\mu, \lambda) \mapsto \mu. \end{aligned}$$

Wir schreiben $\oplus_1$, da es sich nicht um eine direkte Summe von $A[G]$ -Moduln handelt

$$T(\mu, \lambda) = (\mu, \lambda + \mu \otimes T).$$

Wenn wir die Extension mit K tensorieren, so erhalten wir eine exakte Sequenz von Komplexen.

$$0 \rightarrow K(1) \rightarrow K \oplus_1 K(1) \rightarrow K \rightarrow 0.$$

Das Cupprodukt mit θ ist der Verbindungshomomorphismus in dieser Sequenz. Folglich wird $\theta: R_G K \rightarrow R_G K(1)[1]$ durch die folgende Abbildung von Doppelkomplexen induziert

$$(1.2.1) \quad \begin{array}{ccc} R_G K(1) & \longrightarrow & R_G(K \oplus_1 K(1)) \\ \downarrow & & \\ R_G K(1) & & \end{array}$$

Die Abbildung $u: R_G K \rightarrow R_G K(1)[1]$ sei die im Lemma definierte. Durch Verschiebung erhält man $u': R_G K[-1] \rightarrow R_G K(1)$. In der derivierten Kategorie wird u durch die folgende Abbildung von Doppelkomplexen induziert

$$(1.2.2) \quad \begin{array}{ccc} R_G K(1) & \longrightarrow & C(u') \\ & \Downarrow & \\ & R_G K(1). & \end{array}$$

Das Lemma wäre bewiesen, wenn wir zeigten, daß die Diagramme (1.2.1) und (1.2.2) gleich sind. Dabei ist es zulässig u' durch eine homotope Abbildung zu ersetzen.

Wir betrachten die folgende Homotopie h :

$$\begin{array}{ccccc} R_G K[-1] & & & K & \xrightarrow{1-T} & K \\ \downarrow & & \nearrow h = \text{id} \otimes T & \downarrow \text{id} \otimes T & & \downarrow T \otimes T \\ R_G K(1) & & K(1) & \xrightarrow{T-1} & K(1) & \\ 0 & & 1 & & 2 & \end{array}$$

Dabei ist h auf den Elementen mit dem ersten Grad 2 null. Der Abbildungszylinder der durch $T \otimes T$ definierten Abbildung ist

$$\begin{array}{ccc} K \oplus_1 K(1) & \longrightarrow & K \oplus_1 K(1) \\ (x, y) & \longmapsto & ((T-1)x, Tx \otimes T + (T-1)y). \end{array}$$

Dieser Doppelkomplex ist aber nichts anderes als

$$R_G(K \oplus_1 K(1)) = K \oplus_1 K(1) \xrightarrow{T-1} K \oplus_1 K(1).$$

Das Lemma folgt unmittelbar.

Durch das Lemma 1.2 haben wir auch das Cupprodukt auf dem Niveau der Komplexe definiert. In diesem Sinne ist der folgende Satz zu verstehen.

1.3 Satz. *Es sei K ein Komplex von $\Lambda[G]$ -Moduln, auf dessen Kohomologie G trivial operiert. Dann induziert die folgende exakte Sequenz von Komplexen*

$$\dots \rightarrow R_G K(p-1)[p-1] \xrightarrow{\theta} R_G K(p)[p] \xrightarrow{\theta} R_G K(p+1)[p+1] \xrightarrow{\theta} \dots$$

exakte Sequenzen in der Kohomologie

$$\dots \rightarrow H^i R_G K(p-1)[p-1] \xrightarrow{\theta} H^i R_G K(p)[p] \xrightarrow{\theta} H^i R_G K(p+1)[p+1] \rightarrow \dots$$

Beweis. Indem man die Spektralsequenz für den Doppelkomplex $R_G K$ benutzt, beschränkt man sich darauf, die Exaktheit der folgenden Sequenzen zu zeigen

$$\dots \rightarrow H^i(G, H^j(K(-1))) \rightarrow H^{i+1}(G, H^j(K)) \rightarrow H^{i+2}(G, H^j(K(1))) \rightarrow \dots$$

Das ist trivial.

Wie üblich bezeichnen wir mit $\tau_p K$ die kanonische aufsteigende Filtration

$$\tau_p K = \dots \rightarrow K^{p-2} \rightarrow K^{p-1} \rightarrow \text{Ker } d \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

1.4 Satz. *Es sei K ein Komplex von $\Lambda[G]$ -Moduln auf dessen Kohomologie G trivial operiert. Es sei $K^i = 0$ für $i < 0$ und $H^i(K) = 0$ für hinreichend große i .*

Es sei A der folgende Doppelkomplex

$$R_G K(1)[1]/(\tau_0 R_G K(1))[1] \xrightarrow{\theta} \dots \xrightarrow{\theta} R_G K(p+1)[p+1]/(\tau_p R_G K(p+1))[p+1] \dots$$

Dann gibt es einen Quasiisomorphismus in $D^+ A$

$$sA \rightarrow K.$$

Beweis. Die kanonische Abbildung $R_G K \rightarrow K$ sieht auf dem Niveau der Komplexe folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{ccc} & K & \\ \tau-1 \uparrow & & \\ K & \longrightarrow & K. \end{array}$$

Offensichtlich induziert sie eine Surjektion in den Kohomologiegruppen. Es sei $H^i(K)=0$ für $i > q$. Wir betrachten den folgenden augmentierten Doppelkomplex B

$$(\dots \rightarrow \tau_q(R_G K(-p)[-p]) \rightarrow \dots \rightarrow \tau_q R_G K \rightarrow K.$$

Aus 1.3 erhält man, daß B Auflösungen in den Kohomologiegruppen induziert

$$\dots \rightarrow H^i(B^{-p,\cdot}) \rightarrow \dots \rightarrow H^i(B^{0,\cdot}) \rightarrow H^i K \rightarrow 0.$$

Daher ist nach der Spektralsequenz eines beschränkten Doppelkomplexes sB quasiisomorph zu K . Völlig analog sieht man, daß die kanonische Abbildung $B \rightarrow A$ einen Quasiisomorphismus der assoziierten einfachen Komplexe induziert. Q.E.D.

Es sei $L = R_G K$. Wir setzen

$$\begin{aligned} A^{p,q} &= (R_G K(q+1)[q+1]/(\tau_q R_G K(q+1))[q+1])^p \\ &= \begin{cases} L^{p+q+1}(q+1), & \text{für } p \geq 0 \\ L^q/\text{Ker } d(q+1), & \text{für } p = -1 \\ 0, & \text{für } p < -1. \end{cases} \end{aligned}$$

In Abweichung von den bisherigen Bezeichnungen haben wir hier die Indexe p und q vertauscht. Wir erhalten das folgende Bild des Doppelkomplexes:

(1.5)

					W_{-2}	
4	$L^4/\text{Ker}(5)$	$L^5(5)$	$L^6(5)$	$L^7(5)$	$L^8(5)$	
3	$L^3/\text{Ker}(4)$	$L^4(4)$	$L^5(4)$	$L^6(4)$	$L^7(4)$	W_1
2	$L^2/\text{Ker}(3)$	$L^3(3)$	$L^4(3) \xrightarrow{\theta} L^5(3)$	$L^6(3)$		
1	$L^1/\text{Ker}(2)$	$L^2(2)$	$L^3(2) \xrightarrow{\theta} L^4(2)$	$L^5(2)$		
0	$L^0/\text{Ker}(1)$	$L^1(1)$	$L^2(1)$	$L^3(1)$	$L^4(1)$	
q/p	-1	0	1	2	3	

Wir definieren auf $A^{p,q}$ die Gewichtsfiltration.

$$W_r A^{p,q} = (\tau_{r+2q+1} L(q+1))^{p+q+1} / (\tau_q L(q+1))^{p+q+1}.$$

Aus 1.5 folgt unmittelbar:

$$Gr_r^W A = \bigoplus_{\substack{k \geq 0 \\ k \leq -r}} H^{r+2k+1}(L)(k+1)[-r-2k].$$

Wir bemerken, daß G auf natürliche Weise auf $R_G K$ und auf A operiert. Der unter 1.4 definierte Quasiisomorphismus

$$sA \rightarrow K$$

ist offenbar ein Quasiisomorphismus in $D^+ A[G]$.

Es sei $\hat{T} \in Z_l(-1)$ die duale Erzeugende, d.h. $\hat{T} \otimes T = 1$. Wir erhalten eine Abbildung

$$(1.6.1) \quad (T-1) \otimes \hat{T}: sA \rightarrow sA(-1).$$

Es sei $v^{p,q}: A^{p,q} \rightarrow A^{p-1,q+1}(-1)$ die Abbildung, die durch die Multiplikation mit $(-1)^{p+q+1}: L^{p+q+1}(q+1) \rightarrow L^{p+q+1}(q+1)$ induziert wird. Wir erhalten einen Morphismus der assoziierten einfachen Komplexe.

$$(1.6.2) \quad v: sA \rightarrow sA(-1).$$

1.7 Satz. Die Abbildungen (1.6.1) und (1.6.2) sind homotop.

Beweis. Explizit sieht der Komplex $L = R_G K$ folgendermaßen aus:

$$L^{p+1} = K^{p+1} \oplus K^p, \quad d(x^0 \oplus x^1) = d_K x^0 \oplus (T-1)x^0 - d_K x^1.$$

Wir betrachten das folgende Diagramm für $p \geq 0$.

$$\begin{array}{ccccc} L^{p+q+1}(q+1) = A^{p,q} & \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} s' \\ \leftarrow \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} \bar{d} = (-1)^{q+1} d \\ \rightarrow \end{smallmatrix}} & A^{p+1,q} = L^{p+q+2}(q+1) \\ \bar{\partial} = (-1)^p \partial \uparrow & \swarrow \begin{smallmatrix} v' = v \otimes T \\ \end{smallmatrix} & \uparrow \bar{\partial} = (-1)^{p+1} \partial \\ L^{p+q}(q) = A^{p,q-1} & \xrightleftharpoons[\begin{smallmatrix} s' \\ \leftarrow \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} \bar{d} = (-1)^q d \\ \rightarrow \end{smallmatrix}} & A^{p+1,q-1} = L^{p+q+1}(q) \end{array}$$

Dabei ist $s'(x^0 \oplus x^1) = (-1)^{q-1}(x^1 \oplus 0)$, $x^0 \oplus x^1 \in A^{p+1,q-1}$. Das totale Differential des Komplexes A ist nach Definition $d_t = \bar{d} + \bar{\partial}$. Wir verifizieren, daß

$$d_t s' + s' d_t = v' - (T-1).$$

Die analoge Gleichung für $p < 0$ nachzuweisen und damit den Beweis von 1.7 zu beenden, überlassen wir dem Leser.

$$\begin{aligned} (\bar{\partial} s' + s' \bar{\partial})(x^0 \oplus x^1) &= (-1)^{q-1} \bar{\partial}(x^1 \oplus 0) + (-1)^{p+1} s'(0 \oplus x^0 \otimes T) \\ &= (-1)^{p+q-1} (0 \oplus x^1 \otimes T) + (-1)^{p+q+1} (x^0 \otimes T \oplus 0) \\ &= v'(x^0 \oplus x^1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ds' + s'd)(x^0 \oplus x^1) &= (-1)^{2q-1} d(x^1 \oplus 0) + (-1)^q s'(d_K x^0 \oplus (T-1)x^0 - d_K x^1) \\ &= -(d_K x^1 \oplus (T-1)x^1) - ((T-1)x^0 - d_K x^1 \oplus 0) \\ &= -(T-1)(x^0 \oplus x^1). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Es ist klar, daß die eben angestellten Überlegungen auch gelten, wenn man die Kategorie der $\mathcal{A}$ -Moduln durch die Kategorie der Etalegarben über einem Schema Y ersetzt.

Es sei K ein Komplex von $\mathcal{A}[G]$ -Garben auf Y , auf dessen Kohomologie G trivial operiert. Wie unter 1.4 setzen wir voraus, daß $K^i = 0$ für $i < 0$ und $H^i(K) = 0$ für genügend große i . Die Spektralsequenz der Hyperkohomologie des gefilterten Komplexes (A, W) nennen wir die *Steenbrinckspektralsequenz von K* .

$$(1.8) \quad E_1^{-r, q+r} = \mathbb{H}^q(Y, G r_r^W A) \Rightarrow H^q(Y, K).$$

Es sei $L = R_G K$. Aus 1.5.1 erhalten wir

$$(1.8.1) \quad E_1^{-r, q+r} = \bigoplus_{\substack{k \geq 0 \\ k \leq -r}} H^{q-r-2k}(Y, H^{r+2k+1}(L)) (k+1) \Rightarrow \mathbb{H}^q(Y, K).$$

Die Gruppe G operiert auf dieser Spektralsequenz. Nach 1.7 sieht die Wirkung von $T-1$ auf dem E_1 -Term folgendermaßen aus:

$$v \otimes T = (-1)^{r+1} \otimes T: E_1^{-r, q+r} \rightarrow E_1^{-r+2, q+r-2}.$$

Aus 1.5 sieht man sofort, daß v^r einen Isomorphismus induziert.

$$v^r: E_1^{-r, q+r} \xrightarrow{\sim} E_r^{r, q-r}(-r).$$

Wir bemerken, daß die Spektralsequenz nach Konstruktion von der Wahl von T abhängt. Mit den eben gewählten Bezeichnungen gilt:

1.9 Satz. *Es sei d'_1 das Differential in der Spektralsequenz der Hyperkohomologie des gefilterten Komplexes (L, τ) .*

$$d'_1: H^{q-r-2k}(Y, H^{r+2k+1}(L)) \rightarrow H^{q-r-2k+2}(Y, H^{r+2k}(L)).$$

Das Cupprodukt mit θ induziert eine Abbildung

$$\theta: H^{q-r-2k}(Y, H^{r+2k+1}(L)) \rightarrow H^{q-r-2k}(Y, H^{r+2k+2}(L)) (1).$$

Das Differential in der Steenbrinckspektralsequenz ist

$$d_1 = \sum (-1)^k d'_1 + (-1)^{r+k} \theta: E_1^{-r, q+r} \rightarrow E_1^{-r+1, q+r}.$$

Beweis. Nach Definition ist d_1 der Verbindungshomomorphismus in der Hyperkohomologie der exakten Sequenz

$$(1.9.1) \quad 0 \rightarrow G r_{r-1}^W sA \rightarrow W_r sA / W_{r-2} sA \rightarrow G r_r^W sA \rightarrow 0.$$

Da sA der assoziierte einfache Komplex zu A ist, wird (1.9.1) durch eine Folge von Doppelkomplexen induziert.

Wir machen die folgende einfache Bemerkung. Es sei eine exakte Folge von Doppelkomplexen gegeben.

$$0 \rightarrow X'' \rightarrow Y'' \rightarrow Z'' \rightarrow 0.$$

Mit $'F$ und $''F$ bezeichnen wir die üblichen absteigenden Filtrationen.

$$'F^p X = \bigoplus_{i \geq p} X^{i,j}, \quad ''F^p X = \bigoplus_{j \geq p} X^{i,j}.$$

Dann ist der Verbindungshomomorphismus

$$H^n(sZ) \rightarrow H^{n+1}(sX)$$

das Ende der folgenden Morphismen von Spektralsequenzen

$$(1.9.2) \quad \begin{aligned} H^{p+q}(Gr_F^p sZ) &\rightarrow H^{p+q+1}(Gr_F^p sX) \\ H^{p+q}(Gr_F^p sZ) &\rightarrow H^{p+q+1}(Gr_F^p sX). \end{aligned}$$

Wir wenden diese Tatsache auf die Hyperkohomologie von (1.9.1) an. Die Filtrationen $'F^p$ und $''F^p$ des Doppelkomplexes $Gr_r^W A$ induzieren auf der Hyperkohomologie

$$H^q(Y, Gr_r^W A) = \bigoplus_{\substack{k \geq 0 \\ k \geq -r}} H^{q-r-2k}(Y, H^{r+2k+1}(L))(k+1)$$

die Filtrationen, die auf der direkten Summe durch die Ungleichungen $q-k \geq p$ bzw. $k \geq p$ gegeben werden.

$$\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right)_{q-k \geq p} \cdot \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right)_{k \geq p'}$$

Wir betrachten die zu (1.9.1) gehörende Sequenz von Doppelkomplexen

$$(1.9.3) \quad 0 \rightarrow Gr_{r-1}^W A \rightarrow W_r A / W_{r-2} A \rightarrow Gr_r^W A \rightarrow 0.$$

Expliziter erhält man das folgende Bild

$$\begin{array}{ccccc} H^{r+2k+2}(L) & & L^{r+2k+2}/\text{Im } d & & H^{r+2k+3}(L) \\ (r+k, k+1) & & \uparrow \tilde{\theta} & & \\ H^{r+2k}(L) & & L^{r+2k}/\text{Im } d \xrightarrow{\tilde{d}} \text{Ker } d^{r+2k+1} & & H^{r+2k+1}(L) \\ (r+k-1, k) & & (r+k-1, k) & (r+k, k) & (r+k, k) \\ & & \uparrow & & \\ H^{r+2k-2}(L) & L^{r+2k-2}/\text{Im } d \longrightarrow & \text{Ker } d^{r+2k-1} & & H^{r+2k-1}(L) \\ (r+k-2, k-1) & & (r+k-1, k-1) & & (r+k-1, k-1). \end{array}$$

Die Zahlen in Klammern geben den Bigrad an. $\tilde{d}$ und $\tilde{\theta}$ haben die gleiche Bedeutung wie beim Beweis von 1.7. Wendet man auf (1.9.3) Gr_F^{r+k} an, so erhält man als Verbindungshomomorphismus $\tilde{\theta}$. Wenn man Gr_F^k anwendet, so erhält man $(-1)^k d'_1$. Daraus folgt die Behauptung.

In den Anwendungen der Steenbrinckspektralsequenz betrachten wir den Fall, wo Y ein Schema über $\mathbb{F}_p$ ist. Wir zeigen im folgenden wie man die Aktion des Frobenius auf der Kohomologie von Y berücksichtigen muß.

(1.10) Es sei (S_0, η_0, s_0) ein henselsches Tripel mit endlichem Restklassenkörper s_0 . Die maximale unverzweigte Erweiterung von S_0 bezeichnen wir mit (S, η, s) . Es sei $\bar{\eta}$ der algebraische Abschluß von η_0 . Man hat eine exakte Sequenz

$$1 \rightarrow I \rightarrow \text{Gal}(\bar{\eta}/\eta_0) \rightarrow \text{Gal}(s/s_0) \rightarrow 1.$$

Es sei q die Anzahl der Elemente im Restklassenkörper $k(s_0)$. Wir nehmen immer l prim zu q . Den maximalen pro- l -Quotienten von I bezeichnen wir mit G . Als $\text{Gal}(s/s_0)$ -Modul ist G kanonisch isomorph zu $Z_l(1)$. Es sei P der Kern der Projektion $I \rightarrow G$ und $\eta_{t,l} = \bar{\eta}/P$ der P entsprechende Zwischenkörper. Wir fixieren einen Isomorphismus

$$H = \text{Gal}(\bar{\eta}/\eta_0)/P = \text{Gal}(\eta_{t,l}/\eta_0) = G \rtimes \text{Gal}(s/s_0).$$

Wie oben ist T eine fixierte topologische Erzeugende von G . Den geometrischen Frobenius bezeichnen wir mit $\sigma \in \text{Gal}(s/s_0)$. Es gilt:

$$\sigma T^q = T\sigma.$$

Es sei Y_0 ein Schema über s_0 . Die Gruppe H wirkt über ihren Quotienten $\text{Gal}(s/s_0)$ auf dem Schema $Y = Y_0 \times_{s_0} s$. Es sei F eine Garbe auf Y mit einer stetigen H -Aktion. Genauer bedeutet das, daß für alle $h \in H$ Morphismen

$${}^t h: Y \rightarrow Y \quad \text{und} \quad \varphi_h: {}^t h^* F \rightarrow F$$

existieren. Für $h_1, h_2 \in H$ gilt:

$${}^t(h_1 h_2) = {}^t h_2 {}^t h_1, \quad \varphi_{h_1} \circ {}^t h_1^* \varphi_{h_2} = \varphi_{h_1 h_2}.$$

Manchmal schreiben wir den Morphismus φ_h einfach als

$$h: F \rightarrow F.$$

Es sei K ein Komplex von $\mathcal{A}[H]$ -Garben auf Y , der als Komplex von $\mathcal{A}[G]$ -Garben den Voraussetzungen vor 1.8 genügt. Wir betrachten den abgeleiteten Funktor des Funktors der G -Invarianten.

$$\bar{R}_G: D^+ \mathcal{A}[H] \rightarrow D^+ \mathcal{A}[\text{Gal}(s/s_0)]$$

R_G sei das Kompositum mit dem vergeßlichen Funktor $D^+ \mathcal{A}[\text{Gal}(s/s_0)] \rightarrow D^+ \mathcal{A}$. Dann operiert σ auf $R_G K$.

$$\sigma': \sigma^* R_G K \rightarrow R_G K.$$

Diese Operation kann man wie folgt beschreiben. Es sei $K_\sigma = {}^t \sigma^* K$. Wir definieren eine H -Aktion auf K_σ :

$${}^t h^* K_\sigma = {}^t h^* {}^t \sigma^* K \xrightarrow{{}^t h^* \varphi_\sigma} {}^t h^* K \xrightarrow{\varphi_h} K \xrightarrow{{}^t \sigma^* \varphi_{\sigma^{-1}}} {}^t \sigma^* K = K_\sigma.$$

Dann ist φ_σ ein Morphismus von H -Garben

$$\varphi_\sigma: K_\sigma \rightarrow K.$$

Da offenbar $K_\sigma^G = {}^t\sigma^* K^G$, hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$R_G K = {}^t\sigma^* R_G K.$$

Man erhält σ' als Kompositum

$${}^t\sigma^* R_G K = R_G K_\sigma \xrightarrow{R_G \varphi_\sigma} R_G K.$$

Auf dem Niveau der Komplexe sieht das so aus

$$\begin{array}{ccccc} {}^t\sigma^* R_G K & {}^t\sigma^* K & \xrightarrow{{}^t\sigma^* T-1} & {}^t\sigma^* K & \\ \parallel \wr & \parallel & & \downarrow & \\ R_G K_\sigma & {}^t\sigma^* K & \xrightarrow{{}^t\sigma^* T^{q-1}} & {}^t\sigma^* K & \\ \downarrow & \downarrow \varphi_\sigma & & \downarrow \wr_\sigma & \\ R_G K & K & \xrightarrow{T-1} & K & \end{array} \quad {}^t\sigma^* w = {}^t\sigma^* \left(\sum_{i=0}^{q-1} T^i \right)$$

Wenn man an den Fall denkt, wo Y ein Punkt ist, so leuchtet die folgende Abkürzung für das obige Diagramm ein:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{T-1} & K \\ \sigma' \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma w \\ K & \xrightarrow{T-1} & K. \end{array}$$

Wir definieren eine Aktion von σ auf (A, W) ausgehend von folgendem Morphismus von Doppelkomplexen (abgekürzte Schreibweise)

$$\begin{array}{ccccc} L(1)[1] & \longrightarrow & L(2)[2] & \longrightarrow & L(3)[3] \\ \downarrow \sigma'(qw^{-1}) & & \downarrow \sigma'(qw^{-1})^2 & & \downarrow \sigma'(qw^{-1})^3 \\ L(1)[1] & \longrightarrow & L(2)[2] & \longrightarrow & L(3)[3]. \end{array}$$

Dabei folgt die Kommutativität der einzelnen Karos aus der Kommutativität des folgenden Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} & & K & & \\ & \nearrow \sigma w & \uparrow T-1 & & \\ K & & K & \xrightarrow{\text{id} \otimes T} & K(1) \\ \uparrow T-1 & \nearrow \sigma & & \searrow q\sigma & \uparrow T-1 \\ K & \xrightarrow{\text{id} \otimes T} & K(1) & & K(1) \\ & \uparrow T-1 & \nearrow \sigma qw^{-1} & & \\ & K(1) & & & \end{array}$$

Der Leser überprüft unschwer, daß der Quasiisomorphismus aus 1.4 mit dieser Definition äquivariant ist.

$$\begin{array}{ccc} {}^t\sigma^*sA & \longrightarrow & {}^t\sigma^*K \\ \downarrow & & \downarrow \\ sA & \longrightarrow & K. \end{array}$$

Offenbar operiert T im Sinne der derivierten Kategorien identisch auf dem Komplex $L = R_G K$. Daraus folgt, daß auch $q^{-1}w$ identisch operiert. Insbesondere operiert $\sigma'(qw^{-1})^n$ auf der Kohomologie von L wie der Frobenius. Insgesamt erhalten wir eine äquivariante Wirkung von $\text{Gal}(s/s_0)$ auf der Spektralsequenz (1.8.1).

Es ist klar, daß die gesamte Konstruktion funktoriell in Λ ist. Wir können deshalb die erhaltenen Resultate für Q_I -Garben formulieren.

1.11 Satz. *Wir verwenden die Bezeichnungen von 1.10. Es sei K ein Komplex von $Q_I[H]$ -Garben auf Y , so daß $K^i = 0$ für $i < 0$ und $H^i(K) = 0$ für genügend große i . Wir setzen voraus, daß G auf der Kohomologie von K trivial operiert. Es sei $L = R_G K$. Dann existiert eine $\text{Gal}(s/s_0)$ -äquivariante Spektralsequenz*

$$E_1^{-r, q+r} = \bigoplus_{\substack{k \geq 0 \\ k \geq -r}} H^{q-r-2k}(Y, H^{r+2k+1}(L)) (k+1) \Rightarrow \mathbb{H}^q(Y, K).$$

Es sei W^{-r} die induzierte Filtration auf $\mathbb{H}^q(Y, K)$. Die Wirkung von $T-1$ auf K induziert einen Morphismus

$$T-1: Gr_W^{-r} \rightarrow Gr_W^{-r+2}.$$

Der folgende Endomorphismus des E_1 -Termes induziert die Wirkung von $T-1$ auf dem Ende.

$$v \otimes T: E_1^{-r, q+r} \xrightarrow{(-1)^{r+1} \otimes T} E_1^{-r, q+r} \xrightarrow{\text{kanonisch}} E_1^{-r+2, q+r-2}.$$

Die Abbildung $v^r: E_1^{-r, q+r} \rightarrow E_1^{r, q-r}$ ist ein Isomorphismus.

§ 2. Anwendung auf die verschwindenden Zyklen

Wir behalten die Bezeichnungen von 1.10 bei. Es sei $f_0: X_0 \rightarrow S_0$ ein Morphismus von endlichem Typ. Durch Basiswechsel erhalten wir $f: X \rightarrow S$. Es sei $Y = X_s$ die spezielle Faser von f . Auf Y operiert die Gruppe $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta_0)$ über ihren Quotienten $\text{Gal}(s/s_0)$. Es sei $D^+(Y_{\bar{\eta}}, \Lambda)$ die derivierte Kategorie der $\text{Gal}(\bar{\eta}/\eta_0)$ -Garben auf Y . Nach SGA 7 hat man einen Funktor

$$R\Psi: D^+(X_{\bar{\eta}}, \Lambda) \rightarrow D^+(Y_{\bar{\eta}}, \Lambda).$$

Wir erinnern an seine Definition. Es sei

$$X_{\bar{\eta}} \xrightarrow{\bar{j}} X \xleftarrow{i} Y.$$

Dann gilt:

$$R\Psi C = i^* R\bar{j}_* \bar{j}^* C, \quad C \in D^+(X_{\bar{\eta}}, \Lambda).$$

Analog sei $D^+(Y_{\eta_{il}}, \mathcal{A})$ die derivierte Kategorie der $\text{Gal}(\eta_{il}/\eta_0)$ -Garben auf Y . Ausgehend von dem Diagramm

$$X_{\eta_{il}} \rightarrow X \leftarrow Y$$

erhält man einen Funktor

$$R\Psi_{il}: D^+(X_{\eta}, \mathcal{A}) \rightarrow D^+(Y_{\eta_{il}}, \mathcal{A}).$$

Da der Übergang zu den P -Invarianten ein exakter Funktor ist, gilt:

$$R\Psi_{il} = R\Psi^P.$$

Wir können noch einen Schritt weitergehen und das folgende Diagramm betrachten.

$$X_{\eta} \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} Y.$$

Dann gilt:

$$i^* Rj_* = R_G R\Psi_{il}.$$

Wir bezeichnen mit K einen Komplex von $\mathcal{A}[\text{Gal}(\eta_{il}/\eta_0)]$ -Garben auf Y , der $R\Psi_{il}\mathcal{A}$ repräsentiert. Wenn T trivial auf den l -zahlen verschwindenden Zyklen $R^i\Psi_{il}\mathcal{A}$ operiert, so existiert die Steenbrinckspektralsequenz. Für eigentliches f konvergiert sie gegen die P -Invarianten der Kohomologie von $X_{\bar{\eta}}$.

$$(2.1) \quad E_1^{-r, q+r} = \bigoplus_{\substack{k \geq 0 \\ k \geq -r}} H^{q-r-2k}(Y, R^{r+2k+1}j_*\mathcal{A})(k+1) \Rightarrow H^q(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{A})^P.$$

(2.2) Wir sagen, daß $f: X \rightarrow S$ *normale Schnitte besitzt*, wenn

- (i) f von endlichem Typ ist,
- (ii) X regulär ist,
- (iii) X_{η} glatt über η ist,
- (iv) Y lokal in jedem Punkt x von X durch eine Gleichung der Form $t_1^{e_1} \dots t_r^{e_r} = 0$, $e_i \geq 0$ definiert ist, wobei $t_1, \dots, t_r$ ein lokales Parametersystem im Punkte x ist.

Wir machen die vereinfachende Annahme, daß Y die Vereinigung von glatten irreduziblen Divisoren Y_i ist.

$$Y = \sum_{i=1}^N e_i Y_i.$$

Schließlich setzen wir voraus, daß für die Paare (X, Y_i) die Puritätsvermutung richtig ist (SGA 7, I). Diese Vermutung ist in den folgenden Fällen bewiesen:

a) X ist geometrisch definiert. Das bedeutet, daß eine Kurve $C/\mathbb{F}_p$ existiert, so daß S die Henselisierung von C in einem abgeschlossenen Punkt ist, und ein Schema $Z \rightarrow C$ von endlichem Typ, so daß $f: X \rightarrow S$ durch Basiswechsel entsteht: $X = Z \times_C S$.

b) Wenn S charakteristikkgleich und exzcellent ist, so gilt Purität unter der Voraussetzung der Auflösbarkeit der Singularitäten (SGA 4, XIX).

c) Wenn die auftretenden Multiplizitäten e_i prim zur Restklassencharakteristik p von S sind. (2.21)

Aus SGA 7, I. Théoreme 3.3 erhält man unmittelbar:

2.3 Lemma. *Es sei $f: X \rightarrow S$ ein Morphismus, der die Voraussetzungen von 2.2 erfüllt. Wenn alle Multiplizitäten e_i prim zu l sind, so operiert T trivial auf den l -zahlen verschwindenden Zyklen $R^i \Psi_{l!} \Lambda$. Folglich existiert die Steenbrinckspektralsequenz.*

Unser nächstes Ziel ist die explizite Berechnung der Garben $i^* R^j j_* \Lambda$ und der Differentiale in der Spektralsequenz 2.1. Wir wissen nach 1.9, daß diese Differentiale eine Summe aus dem Cupprodukt mit θ und den Differentialen der Cartan-Leray Spektralsequenz für j sind. In der Charakteristik 0 ist wohlbekannt, daß letztere Differentiale verallgemeinerte Gysinmorphomorphismen sind. Wir übertragen diese Tatsache in die positive Charakteristik.

Es sei X ein reguläres Schema und $Y \subset X$ ein Divisor mit normalen Schnitten, der global die Vereinigung von glatten Divisoren ist.

$$Y = \bigcup_{i=1}^N Y_i.$$

Es sei:

$$Y_{i_1, \dots, i_r} = Y_{i_1} \cap \dots \cap Y_{i_r}, \quad Y^{(r)} = \coprod_{i_1 < \dots < i_r} Y_{i_1, \dots, i_r}.$$

Es bezeichne $a_r: Y^{(r)} \rightarrow Y$ die kanonische Projektion. Die Abbildung $\delta_j^r: Y^{(r+1)} \rightarrow Y^{(r)}$, $1 \leq j \leq r+1$ sei durch die folgenden Inklusionen induziert:

$$Y_{i_1, \dots, i_{r+1}} \hookrightarrow Y_{i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{r+1}}.$$

Es gilt $a_r \delta_j^r = a_{r+1}$. Wir haben Adjunktionsmorphismen

$$\delta_{j*}^r \delta_j^{r!} \rightarrow id, \quad \delta_{j*}^r R \delta_j^{r!} \rightarrow id.$$

Wenn Purität gilt, so ist der Gysinmorphomorphismus wie folgt definiert:

$$\delta_{j*}^r \Lambda(-1)[-2] \cong \delta_{j*}^r R \delta_j^{r!} \Lambda \rightarrow \Lambda.$$

Es sei F eine Garbe auf Y . Aus den Adjunktionsmorphismen erhalten wir Abbildungen

$$\partial_j: a_{r+1*} a_{r+1}^! F \rightarrow a_{r*} a_r^! F.$$

Wir definieren einen Komplex von Garben auf Y .

$$(a_{\bullet*} a_{\bullet}^! F, d = \sum (-1)^j \partial_j).$$

Die Abbildung $a_{1*} a_1^! F \rightarrow F$ induziert eine Augmentation.

$$(2.4.1) \quad a_{\bullet*} a_{\bullet}^! F \rightarrow F.$$

Allgemeiner sei (K, d) ein Komplex von Garben auf Y . Wir definieren einen Doppelkomplex:

$$C^{p, -r} = (a_{r*} a_r^! K^p, a_{r*} a_r^! d^p, \sum (-1)^j \partial_j).$$

Den assoziierten einfachen Komplex bezeichnen wir mit $sa_{\bullet*} a_{\bullet}^! K$. Man hat den Adjunktionsmorphimus:

$$(2.4.2) \quad sa_{\bullet*} a_{\bullet}^! K \rightarrow K.$$

2.5 Lemma. *Es sei K ein Komplex injektiver Garben auf Y . Dann ist (2.4.2) ein Quasiisomorphismus.*

Beweis. Offenbar genügt es zu beweisen, daß für eine injektive Garbe F (2.4.1) eine Auflösung ist.

Ganz allgemein sei X ein Schema und Y ein abgeschlossenes Unterschema. Es seien $\iota: Y \rightarrow X$ und $j: U = (X \setminus Y) \rightarrow X$ die Einbettungen. Dann hat jede injektive Garbe auf X die Form $j_* I_1 \oplus \iota_* I_2$, wobei I_1 eine injektive Garbe auf U und I_2 eine injektive Garbe auf Y ist.

Es sei

$$U_{i_1, \dots, i_r} = Y_{i_1, \dots, i_r} \setminus \bigcup_j \delta_j^r Y^{(r+1)}$$

und

$$\kappa_{i_1, \dots, i_r}: U_{i_1, \dots, i_r} \rightarrow Y$$

die Einbettung. Dann ist jede injektive Garbe auf Y von der Form

$$\bigoplus \kappa_{i_1, \dots, i_r} I_{i_1, \dots, i_r},$$

wobei $I_{i_1, \dots, i_r}$ eine injektive Garbe auf $U_{i_1, \dots, i_r}$ ist. Wir können deshalb voraussetzen, daß $F = \kappa_{i_1, \dots, i_r} I_{i_1, \dots, i_r}$. Dann gilt:

$$a_{i_1, \dots, i_n}^! F = \begin{cases} F, & \text{wenn } Y_{i_1, \dots, i_r} \subset Y_{i_1, \dots, i_n} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei bezeichnet $a_{i_1, \dots, i_n}: Y_{i_1, \dots, i_n} \rightarrow Y$ die abgeschlossene Einbettung. Daraus erhalten wir $a_{n*} a_n^! F = F^{(r)_n}$. Die Behauptung folgt, da der simpliziale Komplex des Standardsimplexes azyklisch ist.

Es sei I eine injektive Auflösung der konstanten Garbe auf X . Es sei $j: U = (X \setminus Y) \rightarrow X$ die offene Einbettung. Man hat eine exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \rightarrow \iota_* \iota^! I^\bullet \rightarrow I^\bullet \rightarrow j_* j^* I^\bullet \rightarrow 0.$$

Es sei $b_r = \iota \circ a_r$. Nach dem Lemma 2.5 finden wir eine Auflösung:

$$(2.6) \quad \dots \rightarrow a_{r*} b_r^! I^\bullet \rightarrow \dots \rightarrow a_{1*} b_1^! I^\bullet \rightarrow \iota^* I^\bullet \rightarrow \iota^* j_* j^* I^\bullet \rightarrow 0.$$

Wenn für die Divisoren Y_i auf X Purität gilt, so hat man in der derivierten Kategorie

$$a_{r*} b_r^! I^\bullet = a_{r*} R b_r^! \mathcal{A} = a_{r*} \mathcal{A}(-r)[-2r].$$

Die durch (2.6) induzierten Morphismen

$$a_{r+1*} \mathcal{A}(-r-1)[-2(r+1)] \rightarrow a_{r*} \mathcal{A}(-r)[-2r]$$

sind nach Definition die alternierende Summe über die Gysinmorphismen der Einbettungen

$$Y_{i_1, \dots, i_{r+1}} \rightarrow Y_{i_1, \dots, i_j, \dots, i_{r+1}}.$$

Wir betrachten den folgenden Doppelkomplex:

$$C^{p,q} = \begin{cases} a_{-q*} b_{-q}^! I^p, & \text{für } q \leq -1 \\ \iota^* I^p, & \text{für } q = 0. \end{cases}$$

Der zu C assoziierte einfache Komplex sC ist quasiisomorph zu $\iota^* j_* j^* I^\bullet$. Wir interessieren uns für seine Spektralsequenz der Hyperkohomologie bezüglich der kanonischen Filtration. Nach Purität ist C quasiisomorph zu dem folgenden Doppelkomplex $\bar{C}$.

$$\begin{array}{cccccc} C^{0,0} & C^{1,0} & C^{2,0} & C^{3,0} & C^{4,0} & C^{5,0} \\ 0 & 0 & C^{2,-1}/\text{Im } \partial' & C^{3,-1} & C^{4,-1} & C^{5,-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C^{4,-2}/\text{Im } \partial' & C^{5,-2}. \end{array}$$

Da $\bar{C}^{p,q} = 0$ für $p+2q < 0$, erhalten wir

$$\beta_r s \bar{C} \underset{\text{Def}}{=} \bigoplus_{q \geq -r} \bar{C}^{p,q} \supset \bigoplus_{p+q \leq r} \bar{C}^{p,q} \supset \tau_r s \bar{C}.$$

2.7 Lemma. $(sC, \tau_r) \rightarrow (sC, \beta_r)$ ist ein Quasiisomorphismus gefilterter Komplexe.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß ein Isomorphismus auf den E_1 -Termen der entsprechenden Spektralsequenzen induziert wird.

$$\begin{aligned} H^{p+q}(Gr_{-p}^\tau s \bar{C}) &= H^{p+q}(H^{-p}(s \bar{C})[p]) = H^{2p+q}(H^{-p}(s \bar{C})) \\ &= \begin{cases} H^{-p}(s \bar{C}), & \text{wenn } 2p+q=0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir nach Purität:

$$H^{p+q}(Gr_{-p}^\beta s C) = H^{p+q}(\bar{C}^{\bullet,p}[-p]) = H^q(\bar{C}^{\bullet,p}) = 0 \quad \text{für } 2p+q \neq 0.$$

Folglich degeneriert die Spektralsequenz und wir erhalten wie behauptet:

$$H^{p+q}(Gr_{-p}^\beta s \bar{C}) = H^{p+q}(s \bar{C}) = H^{-p}(s \bar{C}) \quad \text{für } 2p+q=0.$$

Nach den Überlegungen hinter 2.6 ist das Differential d_1 in der Spektralsequenz der Hyperkohomologie von (sC, β_r) eine alternierende Summe von Gysinmorphismen. Wir fassen die Betrachtungen zusammen.

2.8 Satz. Es sei X ein reguläres Schema und Y ein Divisor mit normalen Schnitten, der global die Vereinigung von regulären Divisoren ist. Wir setzen voraus, daß Purität gilt. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$(2.8.1) \quad \iota^* R^p j_* A = a_{p*} A(-p), \quad p \geq 1.$$

Es sei d'_1 das Differential im E_1 -Term der Spektralsequenz der Hyperkohomologie von $(\iota^* R j_* A, \tau)$.

$$d'_1: H^p(Y, \iota^* R^q j_* A) \rightarrow H^{p+2}(Y, \iota^* R^{q-1} j_* A).$$

Wenn $q > 1$, so erhält man nach 2.8.1 eine Abbildung

$$d'_1: H^p(Y^{(q)}, A(-q)) \rightarrow H^{p+2}(Y^{(q-1)}, A(-q+1))$$

die sich folgendermaßen berechnet.

Die Einbettungen $\delta_j: Y_{i_1, \dots, i_q} \rightarrow Y_{i_1, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_q}$ induzieren Gysinhomomorphismen δ_{j*} :

$$\delta_{j*}: H^p(Y^{(q)}, \Lambda(-q)) \rightarrow H^{p+2}(Y^{(q-1)}, \Lambda(-q+1)).$$

Es gilt $d'_1 = \sum (-1)^j \delta_{j*}$.

Wir nennen d'_1 den Čech-Gysinhomomorphismus. Wir haben das Resultat nur für $q > 1$ formuliert, da die Differentiale d'_1 für $q=1$ in der Steenbrinck-spektralsequenz nicht vorkommen. Um den E_1 -Term von 2.1 explizit hinschreiben zu können, müssen wir noch das Cupprodukt mit $\theta \in H^1(G, \Lambda(1)) = H^1(\eta, \Lambda(1))$ berechnen.

2.9 Satz. Es sei $a_{i_1, \dots, i_r}: Y_{i_1, \dots, i_r} \rightarrow Y$ die Einbettung. Das folgende Diagramm ist kommutativ.

$$(2.9.1) \quad \begin{array}{ccc} i^* R^q j_* \Lambda(q) & \xrightarrow{\theta} & i^* R^{q+1} j_* \Lambda(q+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{i_1 < \dots < i_q} a_{i_1, \dots, i_q}^* \Lambda & \longrightarrow & \bigoplus_{i_1 < \dots < i_{q+1}} a_{i_1, \dots, i_{q+1}}^* \Lambda \\ X_{i_1 \dots i_q} & \longmapsto & Y_{i_1 \dots i_{q+1}} = \sum (-1)^{r+1} e_{i_r} X_{i_1 \dots \hat{i}_r \dots i_{q+1}}. \end{array}$$

Beweis: Die Aufgabe ist lokal. Wir erinnern uns an die Konstruktion aus SGA 7, I 3.3. Es sei $\bar{x}$ ein geometrischer Punkt der speziellen Faser Y . Es sei $X_{(\bar{x})}$ die strikte Henselisierung im Punkt $\bar{x}$ und $U = X_{(\bar{x})} \setminus X_{(\bar{x}), s}$. Es seien $Y_{i_1}, \dots, Y_{i_r}$ die Komponenten von Y , die durch den Punkt $\bar{x}$ gehen und $t_{i_1}, \dots, t_{i_r}$ ihre lokalen Parameter. Dann ist $t = t_{i_1}^{e_{i_1}} \dots t_{i_r}^{e_{i_r}} = 0$ eine definierende Gleichung für Y .

Es sei

$$X_n = X_{(\bar{x})} [t_{i_k}^{1/l^n}]_{k=1, \dots, r}, \quad U_n = X_n \setminus X_{n, s}.$$

Schließlich sei $\tilde{U} = \varprojlim_n U_n$. Nach SGA 7 liefert die Hochschild-Serre Sequenz einen kanonischen Isomorphismus

$$H^q(\text{Gal}(\tilde{U}/U), \Lambda) \cong H^q(U, \Lambda) = R^q j_* \Lambda_{(\bar{x})}.$$

Wir fixieren eine Erzeugende von $Z_l(1)$, d.h. ein projektives System von Einheitswurzeln (ζ_{l^n}) . Wir definieren $\sigma_k \in \text{Gal}(\tilde{U}/U)$, $k=1, \dots, r$ durch die Gleichungen

$$\sigma_k(t_{i_k}^{1/l^n}) = \zeta_{l^n} t_{i_k}^{1/l^n}, \quad \sigma_k(t_{i_j}^{1/l^n}) = t_{i_j}^{1/l^n} \quad \text{für } j \neq k.$$

Die σ_k sind eine Basis der Galoisgruppe

$$\text{Gal}(\tilde{U}/U) \cong Z_l(1)^r.$$

Es bezeichne τ die gewählte Erzeugende von $Z_l(1)$. Es sei $\theta_{i_k} \in H^1(\text{Gal}(\tilde{U}/U), \Lambda(1))$ die duale Basis zu σ_{i_k} .

$$\theta_{i_k}(\sigma_{i_k}) = 1 \otimes \tau, \quad \theta_{i_k}(\sigma_{i_j}) = 0 \quad \text{für } k \neq j.$$

Offensichtlich hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^1(\eta, A(1)) & \longrightarrow & H^1(U, A(1)) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ H^1(\text{Gal}(\eta_{il}/\eta), A(1)) & \longrightarrow & H^1(\text{Gal}(\tilde{U}/U), A(1)) \\ & \theta \longmapsto \sum e_{i_k} \theta_{i_k}. & \end{array}$$

Wir bemerken, daß der Isomorphismus (2.8.1) die Kohomologieklassse von Y_{i_k} auf θ_{i_k} abbildet:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus a_{i_k} * A \cong \bigoplus H^1(X_{(\bar{x})} \setminus Y_{i_k}, A(1)) & \xrightarrow{\Sigma} & H^1(U, A(1)) = R^1 j_* A_{\bar{x}}(1) \\ \bigoplus x_{i_k} \bigoplus x_{i_k} c/s Y_{i_k} & \longmapsto & \sum x_{i_k} \theta_{i_k}. \end{array}$$

Da die Kohomologieklassse von $Y_{i_1, \dots, i_q}$ nach Definition das Cupprodukt der Kohomologieklassen der Y_{i_k} ist, erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus a_{i_1 \dots i_q} * A_{\bar{x}} & \xrightarrow{\sim} & R^q j_* A(q)_{\bar{x}} \cong H^q(\text{Gal}(\tilde{U}/U), A(q)) \cong \wedge^q H^1(U, A(1)) \\ \bigoplus x_{i_1 \dots i_q} & \longmapsto & \sum x_{i_1 \dots i_q} \theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \theta_{i_q}. \end{array}$$

Die Behauptung ist jetzt offensichtlich.

Den durch (2.9.1) in der Kohomologie induzierten Morphismus nennen wir den *gewichteten Čechmorphismus*.

$$(2.9.2) \quad H^p(Y^{(q)}, A) \rightarrow H^p(Y^{(q+1)}, A).$$

Wir formulieren unsere Erkenntnisse über die Steenbrinckspektralsequenz für l -adische Kohomologie.

2.10 Satz. *Es sei $f_0: X_0 \rightarrow S_0$ ein eigentlicher Morphismus, der den Voraussetzungen von 2.2 genügt. Dann existiert eine $\text{Gal}(s/s_0)$ -äquivalente Spektralsequenz*

$$E_1^{-r, q+r} = \bigoplus_{\substack{k \geq 0 \\ k \geq -r}} H^{q-r-2k}(Y^{(r+2k+1)}, Q_l(-r-k)) \Rightarrow H^q(X_{\bar{\eta}}, Q_l)^P.$$

$E_1^{-r, q+r}$ ist ein reiner Galoismodul vom Gewicht $q+r$. Die Spektralsequenz degeneriert im E_2 -Term.

$$E_2 = E_{\infty}.$$

Das Differential des E_1 -Terms ist von der Form

$$d_1 = \sum_k ((-1)^k d'_1 \oplus (-1)^{r+k} \theta).$$

Dabei ist d'_1 der Čech-Gysinmorphismus 2.8.1

$$d'_1: H^{q-r-2k}(Y^{(r+2k+1)}, Q_l(-r-k)) \rightarrow H^{q+2-r-2k}(Y^{(r+2k)}, Q_l(-r+1-k))$$

und θ der gewichtete Čechmorphismus (2.9.2)

$$\theta: H^{q-r-2k}(Y^{(r+2k+1)}, Q_l(-r-k)) \rightarrow H^{q-r-2k}(Y^{(r+2k+2)}, Q_l(-r-k)).$$

Über die Wirkung der Monodromie $(T-1)$ gelten wörtlich die Aussagen unter 1.11.

Beweis. Aus der Weilschen Vermutung folgt, daß $E_1^{-r, q+r}$ ein reiner Galoismodul vom Gewicht $q+r$ ist. Die Degenerierung erhält man wie üblich, da ein Morphismus zwischen reinen Galoismoduln von verschiedenem Gewicht 0 ist. Alle übrigen Aussagen von 2.10 sind bereits bewiesen worden.

Man vermutet im allgemeinen, daß der Morphismus v' unter 1.11 einen Isomorphismus auf dem Ende der Spektralsequenz induziert.

$$(2.11) \quad (T-1)^r: Gr_W^{-r} H^q(X, Q_l)^P \rightarrow Gr_W^r H^q(X, Q_l)^P.$$

Nach 2.10 wissen wir, daß $Gr_W^{-r} H^q$ ein reiner Galoismodul vom Gewicht $q+r$ ist. Wir sagen dafür, daß die Filtration W rein ist. Es ist wohlbekannt und leicht einzusehen, daß es genau eine Filtration W gibt, für die (2.11) ein Isomorphismus ist. Wir nennen sie die *Monodromiefiltration*. Man kann die obige Vermutung deshalb auch so formulieren: *Die Monodromiefiltration ist rein.*

Allgemeiner betrachte man ein glattes, eigentliches Schema Z_0 über η_0 . Nach Grothendieck weiß man, daß T auf $H^i(Z_{\bar{\eta}}, Q_l)$ quasiunipotent operiert. Wir wählen ein m , so daß $T^m - 1$ nilpotent ist. Die entsprechende Monodromiefiltration ist unabhängig von der Wahl von m . Man vermutet wieder, daß sie rein ist. Deligne [9] hat das bewiesen, wenn Z_0 geometrisch definiert ist (2.2a). Im allgemeinen folgt aus der Existenz des Néronmodells:

2.12 Satz. *Die Monodromiefiltration auf $H^1(Z_{\bar{\eta}}, Q_l)$ ist rein. Sie hat die Form: $H^1 = W^{-1} \supset W^0 \supset W^1 \supset W^2 = 0$, wobei $W^1 = \text{Im}(T-1)$ und $W^0 = \text{Ker}(T-1)$.*

Der Beweis von 2.12 ist identisch mit dem von SGA 7, I, Theorem 6.1.

2.13 Satz. *Es sei $f_0: X_0 \rightarrow S_0$ ein eigentlicher Morphismus der relativen Dimension 2, der den Voraussetzungen von 2.2 genügt. Es sei l eine Primzahl, die prim zu allen auftretenden Multiplizitäten e_i ist. Dann konvergiert die Steenbrinckspektralsequenz gegen die Monodromiefiltration, d.h. (2.11) ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Explizit sieht der E_1 -Term der Steenbrinckspektralsequenz im Fall der relativen Dimension 2 wie folgt aus. Wir lassen die Koeffizienten Q_l zur Abkürzung weg.

$$\begin{aligned} H^0(Y^{(3)})(-2) &\xrightarrow{d_1^4} H^2(Y^{(2)})(-1) \xrightarrow{d_2^4} H^4(Y^{(1)}) \\ H^1(Y^{(2)})(-1) &\xrightarrow{d_3^3} H^3(Y^{(1)}) \\ H^0(Y^{(2)})(-1) &\xrightarrow{d_1^4} H^0(Y^{(3)})(-1) \oplus H^2(Y^{(1)}) \xrightarrow{d_2^2} H^2(Y^{(2)}) \\ &\quad H^1(Y^{(1)}) \xrightarrow{d_1^1} H^1(Y^{(2)}) \\ &\quad H^0(Y^{(1)}) \xrightarrow{d_1^0} H^0(Y^{(2)}) \xrightarrow{d_2^0} H^0(Y^{(3)}). \end{aligned}$$

Da die Gewichte beim Beweis keine Rolle spielen, identifizieren wir $Q_l(1)$ mit Q_l . Die Abbildung

$$v': E_1^{-r, q+r} \rightarrow E_1^{r, q+r}$$

ist dann bis auf das Vorzeichen die Identität. Wir müssen beweisen, daß v' auf dem E_2 -Term einen Isomorphismus induziert.

Für die Abbildung

$$v: E_1^{-1,2} = H^0(Y^{(2)}) \rightarrow E_1^{1,0} = H^0(Y^{(2)})$$

folgt die Behauptung aus 2.12. Wegen der Poincarédualität erhalten wir das gleiche Resultat für

$$v: E_1^{-1,4} = H^2(Y^{(2)}) \rightarrow E_1^{1,2} = H^2(Y^{(2)}).$$

Wir betrachten die folgenden nichtausgearteten Paarungen, die den Čech-Gysinhomomorphismus und den gewichteten Čechmorphismus in Dualität setzen.

$$\begin{aligned} H^q(Y^{(1)}) \times H^{4-q}(Y^{(1)}) &\xrightarrow{B} Q_t, \\ B(c_i, d_i) &= \sum 1/e_i \int c_i \cup d_i \\ H^q(Y^{(2)}) \times H^{2-q}(Y^{(2)}) &\xrightarrow{B} Q_t, \\ B(c_{ij}, d_{ij}) &= \sum 1/e_i e_j \int c_{ij} \cup d_{ij} \\ H^0(Y^{(3)}) \times H^0(Y^{(3)}) &\xrightarrow{B} Q_t, \\ B(c_{ijk}, d_{ijk}) &= \sum 1/e_i e_j e_k \int c_{ijk} \cup d_{ijk}. \end{aligned}$$

Dabei ist $c_i \in H^q(Y_i)$ usw.

Wir behandeln jetzt die Abbildung

$$v: E_1^{-1,3} = H^1(Y^{(2)}) \rightarrow E_1^{1,1} = H^1(Y^{(2)}).$$

Da d^1 und d^3 duale Abbildungen bezüglich B sind, induziert v genau dann einen Isomorphismus auf dem E_2 -Term, wenn B nichtausgeartet auf dem Bild von $d^1: H^1(Y^{(1)}) \rightarrow H^1(Y^{(2)})$ ist. Die Abbildung d^1 wird durch die folgende Abbildung von Picardmannigfaltigkeiten induziert

$$\begin{aligned} \bigtimes_i \text{Pic}^0 Y_i &\rightarrow \bigtimes_{i < j} \text{Pic}^0 Y_{ij} \\ (x_i) &\mapsto (e_j \delta_1^* x_i - e_i \delta_2^* x_j). \end{aligned}$$

Man weiß nach SGA 4 1/2, daß das Cupprodukt auf $H^1(Y_{ij}) = T_i(\text{Pic}^0 Y_{ij})$ durch die Hauptpolarisierung auf $\text{Pic}^0 Y_{ij}$ induziert wird. Daraus folgt, daß ein Vielfaches von B durch ein amples Linienbündel auf $\text{Pic}^0 Y_{ij}$ induziert wird. Folglich ist die Form B nichtausgeartet, wenn wir sie auf den Tatemodul einer beliebigen abelschen Untermannigfaltigkeit einschränken. Das zeigt die Behauptung in diesem Fall.

Schließlich betrachten wir

$$v^2: E_1^{-2,4} = H^0(Y^{(3)}) \rightarrow E_1^{2,0} = H^0(Y^{(3)}).$$

Wir müssen wieder zeigen, daß B auf dem Bild von d_2^0 nichtausgeartet ist. Die Abbildung d_2^0 und die Paarung B auf $H^0(Y^{(3)})$ sind offenbar über Q definiert. Es sei $d_{2,\mathbb{C}}^0$ die Abbildung die durch Erweiterung der Skalare von Q nach $\mathbb{C}$

entsteht. Sie kommutiert mit der komplexen Konjugation $\xi \mapsto \bar{\xi}$. Offenbar gilt:

$$B(\xi, \bar{\xi}) > 0, \quad \text{für } \xi \in H^0(Y^{(3)}, \mathbb{C}), \quad \xi \neq 0.$$

Deshalb ist B auf dem Bild von $d_{2, \mathbb{C}}^0$ nichtausgeartet. Q.E.D.

Wir beenden den Paragraphen mit der Rechtfertigung der Behauptung 2.2c. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} D_0 & \xleftarrow{\kappa_0} & X_0 \\ \downarrow \bar{i} & & \downarrow i \\ D & \xleftarrow{\kappa} & X. \end{array}$$

Wir setzen voraus, daß κ und κ_0 abgeschlossene Einbettungen sind. Aus der Adjungiertheit der Funktoren κ_* und $\kappa^!$ bzw. κ_{0*} und $\kappa_0^!$ erhält man einen kanonischen Morphismus

$$(2.14.1) \quad \bar{i}_* \kappa_0^! \rightarrow \kappa^! i_*.$$

Man kann zu den derivierten Funktoren übergehen.

$$(2.14.2) \quad R \bar{i}_* R \kappa_0^! \rightarrow R \kappa^! R i_*.$$

Wenn $D_0 = D \times_X X_0$, so sind 2.14.1 und 2.14.2 Isomorphismen. Man erhält:

$$\kappa^! \rightarrow \kappa^! i_* i^* \xleftarrow{\sim} \bar{i}_* \kappa_0^! i^*$$

und damit Basiswechsel-homomorphismen

$$(2.15.1) \quad \bar{i}^* \kappa^! \rightarrow \kappa_0^! i^*$$

$$(2.15.2) \quad \bar{i}^* R \kappa^! \rightarrow R \kappa_0^! i^*.$$

Es sei T ein Schema und $\iota: T_0 \rightarrow T$ ein abgeschlossenes Unterschema. Für ein Schema $f: X \rightarrow T$ sei $X_0 = X \times_T T_0$ und $\iota_X: X_0 \rightarrow X$ die Einbettung. Der Index 0 bezeichnet im folgenden stets Basiswechsel nach T_0 . Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, schreiben wir für ι_X auch einfach ι . Es sei $\kappa: D \rightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung. Wir nennen (X, D) ein T -Paar.

2.16 Definition. Wir nennen (X, D) ein kohomologisch eigentliches Paar relativ zu $\iota: T_0 \rightarrow T$, wenn der Basiswechselhomomorphismus

$$(2.16.1) \quad \iota_D^* R \kappa^! \mathcal{A} \rightarrow R \kappa_0^! \iota_X^* \mathcal{A}$$

ein Isomorphismus ist.

Bemerkung. Die Bedingung ist offenbar lokal für die Etaletopologie auf X . Deshalb ist eine äquivalente Forderung, daß (2.16.1) für jeden lokal konstanten $\mathcal{A}$ -Modul auf X ein Isomorphismus ist. Offensichtlich ist 2.16.1 für jeden $\mathcal{A}$ -Modul mit Träger in $X_0 \cup D$ stets ein Isomorphismus. Zusammenfassend sei K ein Komplex von $\mathcal{A}$ -Moduln auf X , so daß $H^i(K)$ auf $U = X \setminus (X_0 \cup D)$ lokal konstant und unverzweigt längs $X_0 \cup D$ ist und so daß $H^i(K) = 0$ für $i \ll 0$.

Dann ist der Basiswechselhomomorphismus

$$(2.16.2) \quad i_D^* R\kappa^! K \rightarrow R\kappa_0^! i_X^* K$$

für ein kohomologisch eigentliches Paar ein Isomorphismus.

2.17 Lemma.

a) Es sei Z ein T -Schema und (X, D) ein glattes Z -Paar. Dann ist (X, D) ein kohomologisch eigentliches T -Paar.

b) Unter den Voraussetzungen von a) sei (D, E) ein kohomologisch eigentliches T -Paar. Dann ist auch (X, E) ein kohomologisch eigentliches T -Paar.

c) Es seien (X, D_1) , (X, D_2) und $(X, D_1 \cap D_2)$ kohomologisch eigentliche T -Paare. Dann ist auch $(X, D_1 \cup D_2)$ ein solches.

d) Es sei (X, D) ein kohomologisch eigentliches T -Paar. Es sei $u: Y \rightarrow X$ ein glatter Morphismus und $E = Y \times_X D$. Dann ist (Y, E) ein kohomologisch eigentliches T -Paar.

Beweis. Man erhält a) aus der Purität für glatte Z -Paare. In diesem Fall weiß man sogar, daß $R^i \kappa^! \mathcal{A}$ lokal konstante Garben auf D sind. Daraus folgt b). Die Behauptung c) erhält man aus der Mayer-Vietorissequenz. Um d) zu beweisen, betrachte man das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Y \setminus E & \xrightarrow{\tilde{j}} & Y & \xleftarrow{\tilde{\kappa}} & E \\ \downarrow v & & \downarrow u & & \downarrow w \\ X \setminus D & \xrightarrow{j} & X & \xleftarrow{\kappa} & D. \end{array}$$

Nach Basiswechsel mit glatten Morphismen folgt $u^* Rj_* \mathcal{A} = R\tilde{j}_* \mathcal{A}$. Aus der lokalen Kohomologiesequenz erhält man $w^* R\kappa^! \mathcal{A} = R\tilde{\kappa}^! \mathcal{A}$. Die Behauptung ist jetzt klar.

2.18 Lemma. Es sei X ein eigentliches T -Schema und (X, D) kohomologisch eigentlich. Es sei $V = X \setminus D$. Wir betrachten das kartesische Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} V_0 & \xrightarrow{i} & V \\ g_0 \downarrow & & \downarrow g \\ T_0 & \xrightarrow{i} & T. \end{array}$$

Dann ist der Basiswechselhomomorphismus

$$i^* Rg_* \mathcal{A} \rightarrow Rg_{0*} \mathcal{A}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es sei $j: V \rightarrow X$ die Einbettung. Wir haben ein Dreieck

$$0 \rightarrow \kappa_* R\kappa^! \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow Rj_* \mathcal{A} \rightarrow 0.$$

Man erhält ein kommutatives Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \iota^* Rf_* \kappa_* R\kappa^! \Lambda \rightarrow \iota^* Rf_* \Lambda \rightarrow \iota^* Rg_* \Lambda \rightarrow 0 \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 0 \rightarrow Rf_{0*} \kappa_{0*} R\kappa_0^! \Lambda \rightarrow Rf_{0*} \Lambda \rightarrow Rg_{0*} \Lambda \rightarrow 0. \end{array}$$

Der linke vertikale Pfeil ist ein Isomorphismus nach Basiswechsel für eigentliche Morphismen und 2.16. Da der mittlere Pfeil ebenfalls ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung.

Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen kommen wir jetzt zur Hauptsache. Es sei $a \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ ein Schnitt, dessen Nullstellenmenge in T_0 liegt. Es seien r, s, m, n natürliche Zahlen und $\mathbf{r} = (e_1, \dots, e_r)$, $\mathbf{s} = (f_1, \dots, f_s)$ Vektoren natürlicher Zahlen, so daß $e_i, f_i > 0$ und e_i und f_i prim zu den Restklassencharakteristiken von $T \setminus T_0$ sind. Wir betrachten das folgende T -Schema.

$$X_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, m, n} = T[x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n] / x_1^{e_1} \dots x_r^{e_r} - a y_1^{f_1} \dots y_s^{f_s}.$$

Es sei $D_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, m, n}$ der Divisor $y_1 \dots y_s v_1 \dots v_n = 0$.

2.19 Satz. $(X_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, m, n}, D_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, m, n})$ ist ein kohomologisch eigentliches T -Paar.

Beweis. Beh(r, s, m, n) bezeichne die Behauptung des Satzes für fixiertes r, s, m, n . Nach 2.17d) gilt: Beh($r, s, 0, n$) $\Rightarrow$ Beh(r, s, m, n). Wir zeigen: Beh($r, s, 0, 0$) $\Rightarrow$ Beh($r, s, 0, n$). Dazu betrachten wir die folgende Überdeckung von $D_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, 0, n}$

$$Y_i = \{v_i = 0\}, \quad Y = \{y_1 \dots y_s = 0\}.$$

Nach 2.18 c) genügt es zu beweisen, daß alle möglichen Durchschnitte kohomologisch eigentlich sind. Es sei z.B. $W = \{v_1 = \dots = v_k = 0\}$. Wir betrachten das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} W \cap Y & \longrightarrow & W & \longrightarrow & X_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, 0, n} \\ & & \searrow & \swarrow & \\ & & X_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, 0, 0} & & \end{array}$$

Offenbar ist $(X_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, 0, n}, W)$ ein glattes Paar über $X_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, 0, 0}$. Da nach Beh($r, s, m-k, 0$) das Paar $(W, W \cap Y)$ kohomologisch eigentlich ist, folgt nach 2.17 b) dasselbe für das Paar $(X_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, 0, n}, W \cap Y)$.

Wir zeigen die Behauptung Beh($r, s, 0, 0$) durch Induktion nach $r+s$. Wenn r oder s gleich 0 ist, so ist die Behauptung trivial. Wir setzen im folgenden $X = X_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, 0, 0}$ und $D = D_{\mathbf{r}, \mathbf{s}, 0, 0}$ für fixiertes $r, s \geq 1$. Vor dem Induktionsschritt machen wir noch zwei Reduktionen.

Als erstes zeigen wir, daß man annehmen darf, daß eine beliebige vorgegebene Einheitswurzel, deren Ordnung prim zu den Restklassencharakteristiken von $T \setminus T_0$ ist, in $\mathcal{O}_{T \setminus T_0}$ liegt. Es sei $\tilde{T} \rightarrow T$ ein Morphismus und $\tilde{T}_0 = \tilde{T} \times_T T_0$. Dann ist $(\tilde{X}, \tilde{D}) = (X \times_T \tilde{T}, D \times_T \tilde{T})$ ein Paar vom Typ $(\mathbf{r}, \mathbf{s}, 0, 0)$ relativ zu $\tilde{T}$ und $\tilde{T}_0$. Es sei jetzt $\tilde{T} \rightarrow T$ ein endlicher Morphismus, der über $T \setminus T_0$ eine etale Galoisüberlagerung mit der Gruppe Γ ist. Wir zeigen, daß aus der kohomologischen Eigentlichkeit von $(\tilde{X}, \tilde{D})$ die von (X, D) folgt.

Zum Beweis betrachte man das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{X} & \xleftarrow{\tilde{\kappa}} & \tilde{D} & \xleftarrow{\tilde{t}} & \tilde{D}_0 \\ \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow h_0 \\ X & \xleftarrow{\kappa} & D & \xleftarrow{t} & D_0. \end{array}$$

Es sei $V = X \setminus X_0$ und $\tilde{V} = \tilde{X} \setminus \tilde{X}_0$. Dann ist $\tilde{g}: \tilde{V} \rightarrow V$ eine etale Galoisüberlagerung mit der Gruppe Γ . Es sei F eine Λ -Garbe auf V , deren Urbild auf $\tilde{V}$ konstant ist. Diese Garben bilden eine abelsche Kategorie. Wir zeigen, daß für irgendeine und folglich für jede Fortsetzung F' der Garbe F auf ganz X der Basiswechselhomomorphismus 2.16.1 ein Isomorphismus ist.

Es sei zunächst F von der Form $\tilde{g}_* G$ für eine konstante Garbe G auf $\tilde{V}$. Es sei G' die konstante Garbe auf $\tilde{X}$ die G fortsetzt. Da 2.16.1 für G' ein Isomorphismus ist, folgt

$$\begin{aligned} i^* R\kappa^! g_* G' &\cong i^* h_* R\tilde{\kappa}^! G' \cong h_{0*} \tilde{i}^* R\tilde{\kappa}^! G' \\ &\cong h_{0*} R\tilde{\kappa}_0^! \tilde{i}^* G' \cong R\kappa_0^! i^* g_* G'. \end{aligned}$$

Es sei $j: V \rightarrow X$ die Einbettung. Die allgemeine Behauptung erhält man durch ein Standardinduktionsargument ähnlich SGA 4 1/2, Dualité 2.5. aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow j_! F \rightarrow j_! \tilde{g}_* \tilde{g}^* F \rightarrow j_! C \rightarrow 0.$$

Als nächstes beweisen wir, daß man $e_1 = f_1$ voraussetzen darf. Dazu betrachten wir den endlichen Morphismus:

$$p: \tilde{X} = T[\tilde{x}_1, x_2, \dots, x_r, \tilde{y}_1, y_2, \dots, y_s] / \tilde{x}_1^{e_1 f_1} x_2^{e_2} \dots x_r^{e_r} - a \tilde{y}_1^{f_1} y_2^{f_2} \dots y_s^{f_s} \rightarrow X$$

der durch $\tilde{x}_1^{f_1} = x_1$ und $\tilde{y}_1^{e_1} = y_1$ definiert wird. Es sei $\tilde{D} = \tilde{X} \times_X D$. Wir zeigen, daß (X, D) kohomologisch eigentlich ist, wenn $(\tilde{X}, \tilde{D})$ es ist.

Nach der Voraussetzung über a gilt $\{x_1 y_1 = 0\} \subset X_0 \cup D$. Deshalb ist die Einschränkung q von p auf $\tilde{U} = \tilde{X} \setminus (\tilde{X}_0 \cup \tilde{D})$ etale.

$$q: \tilde{U} \rightarrow U.$$

Nach der ersten Reduktion dürfen wir $\mu_{e_1 f_1} \subset \mathcal{O}_U$ voraussetzen. Dann ist q eine Galoisüberlagerung. Wir können daher das Argument aus der ersten Reduktion anwenden.

Wir führen jetzt den Induktionsschritt durch. Es sei $e_1 = f_1 = d$. Wir betrachten die Aufblasung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ von X in dem Unterschema $C = \{x_1 = y_1 = 0\}$. Man hat eine affine Überdeckung $\tilde{X} = U_1 \cup U_2$, wobei

$$\begin{aligned} U_1 &= T[x_2, \dots, x_r, y_1/x_1, y_2, \dots, y_s, x_1] / x_2^{e_2} \dots x_r^{e_r} - a(y_1/x_1)^d y_2^{f_2} \dots y_s^{f_s} \\ U_2 &= T[x_1/y_1, x_2, \dots, x_r, y_2, \dots, y_s, y_1] / (x_1/y_1)^d x_2^{e_2} \dots x_r^{e_r} - a y_2^{f_2} \dots y_s^{f_s}. \end{aligned}$$

$\tilde{D} = p^{-1}(D)$ ist auf U_1 durch die Gleichung $x_1(y_1/x_1) y_2 \dots y_s = 0$ und auf U_2 durch die Gleichung $y_1 \dots y_s = 0$ definiert. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(\tilde{X}, \tilde{D})$ deshalb ein kohomologisch eigentliches Paar.

Da die geometrischen Fasern von p zusammenhängend sind und da p außerhalb von C ein Isomorphismus ist, folgt

$$R^0 p_* \mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad \text{Supp } R^i p_* \mathcal{A} \subset C \subset D \quad \text{für } i \geq 1.$$

Wir betrachten ein Dreieck

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow R p_* \mathcal{A} \rightarrow K \rightarrow 0.$$

Da die Kohomologiegarben von K Träger in $X_0 \cup D$ haben, ist (2.16.1) für K ein Isomorphismus. Es genügt deshalb zu zeigen, daß (2.16.1) für $R p_* \mathcal{A}$ ein Isomorphismus ist. In der Tat erhalten wir unter Benutzung von Basiswechsel für p :

$$\begin{aligned} \iota^* R \kappa^! R p_* \mathcal{A} &= \iota^* R p_* R \tilde{\kappa}^! \mathcal{A} = R p_{0*} \iota^* R \tilde{\kappa}^! \mathcal{A} \\ &= R p_{0*} R \tilde{\kappa}_0^! \mathcal{A} = R \kappa_0^! R p_{0*} \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Damit ist 2.19 bewiesen.

2.20 Satz. *Es sei $X = T[x_1, \dots, x_n]/x_1^{e_1} \dots x_n^{e_n} - a$, wobei $a \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$, so daß $\{a=0\} \subset T_0$. Dann ist der Basiswechselhomomorphismus*

$$\iota^* R f_* \mathcal{A} \rightarrow R f_{0*} \mathcal{A}$$

ein Isomorphismus, wenn die e_i prim zu den Restklassencharakteristiken von $T \setminus T_0$ sind.

Beweis. Wir betrachten die offene Einbettung

$$\begin{aligned} X &\hookrightarrow \mathbb{P}_T^1 \times \dots \times \mathbb{P}_T^1. \\ x_1, \dots, x_n &\mapsto (x_1 : 1) \dots (x_n : 1). \end{aligned}$$

Es seien $(u_i : v_i)$ homogene Koordinaten auf dem i -ten Exemplar von $\mathbb{P}_T^1$. Der Abschluß Z von X wird durch die folgende multihomogene Gleichung definiert

$$u_1^{e_1} \dots u_n^{e_n} - a v_1^{e_1} \dots v_n^{e_n} = 0.$$

Das Komplement $D = Z \setminus X$ ist der Divisor $v_1 \dots v_n = 0$. Wenn man zu den affinen Karten übergeht, so folgt aus 2.19, daß (Z, D) kohomologisch eigentlich ist. Wir erhalten das Resultat aus 2.18.

2.21 Satz. *Es sei $f: X \rightarrow S$ ein Morphismus, der den Bedingungen (i)–(iv) von 2.2 genügt. Wir nehmen an, daß die auftretenden Multiplizitäten prim zur Restklassencharakteristik p von S sind.*

$$X_s = \sum e_i Y_i, \quad \text{ggT}(e_i, p) = 1, \quad Y_i \text{ glatt}$$

Dann gilt:

$$\mathcal{H}_{Y_i}^q(X, \mathcal{A}) = \begin{cases} 0, & \text{für } q \neq 2 \\ \mathcal{A}(-1), & \text{für } q = 2. \end{cases}$$

Beweis. Für $p=0, 1, 2$ folgt das aus SGA 4 1/2, Cycle 2.1.4. Die Frage ist daher lokal. Wir betrachten einen abgeschlossenen Punkt x der speziellen Faser X_s . Es seien $t_1, \dots, t_n$ lokale Parameter von X im Punkt x . Wenn π eine Uniformi-

sierende von S bezeichnet, so gilt:

$$t_1^{e_1} \dots t_n^{e_n} = \pi b, \quad \text{wobei } b \in \mathcal{O}_{X,x}^*.$$

Es sei $e_1 > 0$. Da e_1 prim zu p ist, können wir aus b in einer Etaleumgebung die e_1 -te Wurzel ziehen. Deshalb dürfen wir annehmen, daß

$$X = S[x_1, \dots, x_n] / x_1^{e_1} \dots x_n^{e_n} - \pi.$$

Mit Hilfe von Basiswechsel mit glatten Morphismen beschränkt man sich auf den Fall, wo $e_i > 0$. Es sei $Y = \{x_1 = 0\}$, $V = X \setminus Y$ und $g: V \rightarrow S$ der Strukturmorphismus.

2.22 Lemma. *Es sei $n \geq 2$ und $e_i > 0$. Dann gilt*

$$(Rg_* \mathcal{A})_s = Rg_{s*} \mathcal{A}.$$

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V = S[x_1, x_1^{-1}, x_2, \dots, x_n] / x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n} - \pi x_1^{-e_1} & & \\ \swarrow g & & \searrow h \\ S & \xleftarrow{u} & S[x_1, x_1^{-1}] = \mathbb{G}_{m,S}. \end{array}$$

Nach 2.20 wissen wir:

$$Rh_* \mathcal{A}|_{\mathbb{G}_{m,S}} = Rh_{s*} \mathcal{A}.$$

Es genügt daher zu zeigen, daß

$$(Ru_* Rh_* \mathcal{A})_s = Ru_{s*} (Rh_* \mathcal{A}|_{\mathbb{G}_{m,S}}).$$

Es sei $d = \text{gg} T(e_2, \dots, e_n)$ und $S' = S[\mu_d, \pi^{1/d}]$. Wir betrachten die folgende Galoisüberlagerung, die über $\mathbb{G}_{m,\eta}$ etale ist.

$$q: \mathbb{G}_{m,S'} \rightarrow \mathbb{G}_{m,S} \rightarrow \mathbb{G}_{m,S}.$$

Dabei ist der zweite Morphismus die Erhebung in die e_2 -te Potenz. Durch Basiswechsel mit q erhält man:

$$\begin{array}{ccc} V' & \longrightarrow & V \\ h' \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbb{G}_{m,S'} & \xrightarrow{q} & \mathbb{G}_{m,S} \end{array}$$

$$V' = S'[x_1, x_1^{-1}, x_2, \dots, x_n] / x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n} - \pi \xrightarrow{h'} S'[x_1, x_1^{-1}]$$

$$V'_{\eta'} = \mathbb{G}_{m,\eta'} \times (\mathbb{G}_{m,\eta'})^{n-2} \times Z/dZ \xrightarrow{p r_1 = h'_{\eta'}} \mathbb{G}_{m,\eta'}.$$

Folglich ist $q_{\eta'}^*(Rh_* \mathcal{A})_{\eta'} = R^i h'_{\eta'}^* \mathcal{A}$ eine konstante Garbe auf $\mathbb{G}_{m,\eta'}$. Es genügt daher zu beweisen, daß für jede Garbe F auf $\mathbb{G}_{m,S}$, für die $q^* F$ auf $\mathbb{G}_{m,\eta'}$ konstant ist

$$(Ru_* F)_s = Ru_{s*} F_s.$$

Das folgt wie im ersten Reduktionsschritt des Beweises von 2.19.

Wir können jetzt den Beweis des Satzes 2.21 beenden. Es ist nützlich das folgende Diagramm zu betrachten:

$$\begin{array}{ccccc}
 & Y & \xrightarrow{\kappa} & X & \xleftarrow{\alpha} & V \\
 & \downarrow & & \downarrow f & \nearrow g & \\
 x \curvearrowright & S & \xrightarrow{\iota} & S. & &
 \end{array}$$

Dabei ist x der Schnitt, der dem Punkt $x_2 = \dots = x_n = 0$ von Y entspricht. Wir haben ein Dreieck

$$0 \rightarrow \kappa_* R\kappa^! A \rightarrow A \rightarrow R\alpha_* A \rightarrow 0.$$

Durch Induktion über n dürfen wir annehmen, daß $\kappa_* R^i \kappa^! A$ für $i \neq 2$ in x konzentriert ist. Wenn wir Rf_* anwenden und auf die spezielle Faser einschränken, so erhalten wir

$$0 \rightarrow x^* \kappa_* R\kappa^! A \rightarrow (Rf_* A)_s \rightarrow (Rg_* A)_s \rightarrow 0.$$

Da X_s auf einen Punkt kontrahierbar ist und V_s auf $\mathbb{G}_{m,s}$, folgt nach dem Lemma 2.22 und SGA 7 II, exp. XV, 2.1.

$$(R^i f_* A)_s = R^i f_{s*} A = 0 \quad \text{für } i \geq 1$$

$$(R^i g_* A)_s = R^i g_{s*} A = 0 \quad \text{für } i \geq 2.$$

Wir erhalten $x^* \kappa_* R^i \kappa^! A = 0$ für $i \geq 3$. Q.E.D.

2.23 Satz. *Unter den Voraussetzungen von 2.21 stimmen die Garben der verschwindenden Zyklen mit den Garben der zahmen verschwindenden Zyklen (SGA 7, I) überein. Anders ausgedrückt operiert die wilde Verzweigungsgruppe $P_w \subset \text{Gal}(\bar{\eta}/\eta)$ trivial auf $R^i \Psi A$.*

Beweis. Offenbar kann man sich wieder auf den Fall beschränken, wo

$$X = S[x_1, \dots, x_n] / x_1^{e_1} \dots x_n^{e_n} - \pi, \quad ggT(e_i, p) = 1.$$

Dann gilt:

2.24 Lemma.

$$H^i(X_s, R\Psi A) \cong H^i(X_{\bar{\eta}}, A).$$

Beweis. Es sei $\bar{S}$ der ganze Abschluß von S in $\bar{\eta}$ und $\bar{X} = X \times_S \bar{S}$. Es sei $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ der Strukturmorphismus. Nach SGA 7, I genügt es zu zeigen:

$$(R\bar{f}_* A)_s = R\bar{f}_{s*} A.$$

Das folgt durch Übergang zum Limes aus 2.20.

Wir fahren mit dem Beweis von 2.23 fort. Es sei

$$R\Psi_l A = (R\Psi A)^{P_w}.$$

Wir betrachten das Dreieck

$$0 \rightarrow R\Psi_l A \rightarrow R\Psi A \rightarrow K \rightarrow 0.$$

Nach Induktion können wir annehmen, daß die Kohomologie von K im Punkt $x \in X_s$, $x_1 = \dots = x_n = 0$ konzentriert sind. Dann gilt

$$\mathbb{H}^i(X_s, K) = \mathcal{H}^i(K)_x.$$

Es sei $d = \text{gg } T(e_1, \dots, e_n)$. Man sieht leicht $X_\eta = \mathbb{G}_{m, \eta}^{n-1} \times_\eta \eta[\pi^{1/d}]$. Da $\eta[\pi^{1/d}]$ eine zahmverzweigte Erweiterung von η ist, operiert P_w trivial auf $H^i(X_\eta, A)$. Nach 2.24 folgt

$$\mathbb{H}^i(X_s, R\Psi_* A) = H^i(X_\eta, A)^{P_w} = H^i(X_\eta, A) = \mathbb{H}^i(X_s, R\Psi_* A)$$

und damit $\mathcal{H}^i(K)_x = \mathbb{H}^i(X_s, K) = 0$. Q.E.D.

2.25 Korollar. *Wenn unter den Voraussetzungen von 2.23 alle Multiplizitäten e_i gleich 1 sind, so operiert I trivial auf $R^i\Psi_* A$.*

Beweis. Das folgt aus SGA 7, I, Theorem 3.3.

§ 3. Berechnung der verschwindenden Zyklen für Produkte gewöhnlicher Doppelpunkte

Wir verwenden die Bezeichnungen von 1.10. Es sei π ein uniformisierender Parameter.

3.1 Definition. *Es sei $f: X \rightarrow S$ ein Morphismus von endlichem Typ. Wir sagen, daß f lokal ein Produkt von gewöhnlichen Doppelpunkten ist, wenn X_η glatt ist und wenn für jeden Punkt $x \in X_s$ ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_S$ -algebren existiert*

$$\hat{\mathcal{O}}_{X, x} = A/(a_1^{(0)} \cdot a_1^{(1)} - \pi, \dots, a_r^{(0)} \cdot a_r^{(1)} - \pi),$$

wobei A eine reguläre lokale $\mathcal{O}_S$ -algebra ist und $a_i^{(0)}, a_i^{(1)}, \pi$ Teil eines regulären Parametersystems von A .

Wir wollen im weiteren voraussetzen, daß S exzellent ist. Dann findet man nach dem Approximationssatz von Artin für jeden Punkt $x \in X_s$ eine Etaleumgebung U und einen Etalemorphismus

$$(3.1.1) \quad \mu: U \rightarrow X_1 \times_S \dots \times_S X_n,$$

wobei $X_i = S[X_i^{(0)}, X_i^{(1)}]/X_i^{(0)}X_i^{(1)} - \pi$ für $i = 1, \dots, r$ und $X_i = S[X_i]$ für $i = r+1, \dots, n$.

Es sei $X_{i, s} = Y_i = Y_i^0 \cup Y_i^1$ die Zerlegung der speziellen Faser in irreduzible Komponenten für $i = 1, \dots, r$ und $Y_i = Y_i^0$ die spezielle Faser für $i = r+1, \dots, n$. Wir setzen $Y_i^1 = \emptyset$ für $i = r+1, \dots, n$.

Wir betrachten im folgenden Morphismen, die der folgenden Bedingung genügen.

3.2(PgD) *$f: X \rightarrow S$ ist lokal ein Produkt von gewöhnlichen Doppelpunkten. Die spezielle Faser $Y = X_s$ besitzt eine Überdeckung durch abgeschlossene Unterschemata*

$$Y = \bigcup Y^{i_1, \dots, i_n}, \quad i_k = 0, 1.$$

Der Morphismus μ kann für jeden Punkt $x \in Y$ so gewählt werden, daß

$$Y^{i_1, \dots, i_n} = \mu^{-1}(Y_1^{i_1} \times \dots \times Y_n^{i_n}).$$

Wir beginnen mit der Berechnung der verschwindenden Zyklen in dem Fall, wo

$$(3.3) \quad X = S[X_1^{(0)}, X_1^{(1)}, \dots, X_r^{(0)}, X_r^{(1)}, X_{r+1}, \dots, X_n] / X_1^{(0)} X_1^{(1)} = \dots = X_r^{(0)} X_r^{(1)} = \pi.$$

$X = X_1 \times_S \dots \times_S X_n$ genügt offenbar der Bedingung (PgD).

Es sei $\bar{S}$ der algebraische Abschluß von S in $\bar{\eta}$. Man bezeichne durch einen Querstrich alle durch Basiswechsel nach $\bar{S}$ entstehenden Objekte. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X_{\bar{\eta}} = \bar{U} = \bar{U}_1 \times_{\bar{\eta}} \dots \times_{\bar{\eta}} \bar{U}_n & \xrightarrow{\bar{j}} & \bar{X} & \xleftarrow{\quad} & Y_1 \times \dots \times Y_n \\ \downarrow \bar{p}'_i & & \downarrow p_i & & \downarrow q_i \\ X_{i, \bar{\eta}} = \bar{U}_i & \xrightarrow{\bar{j}_i} & \bar{X}_i & \xleftarrow{i_i} & Y_i. \end{array}$$

Für $K \in D^+(\bar{U}_i, A)$ ist der Basiswechselhomomorphismus definiert

$$\bar{p}_i^* R j_{i*} K \rightarrow R \bar{j}_* \bar{p}'_i^* K.$$

Daraus erhält man den Morphismus

$$q_i^* R \Psi_i A \rightarrow R \Psi A,$$

wobei $R \Psi_i$ den Funktor der verschwindenden Zykeln für X_i und $R \Psi$ den entsprechenden Funktor für X bezeichnet. Nach SGA 4, XVII, 5.4.1.4 hat man den Künnethmorphismus

$$(3.3.1) \quad \bigotimes^{\mathbb{L}} q_i^* R \Psi_i \rightarrow R \Psi.$$

Es sei $x_i \in Y_i$, $i = 1, \dots, r$ der Doppelpunkt und $a_i: x_i \rightarrow Y_i$ die Einbettung. Dann gilt

$$R_G R \Psi_i A = a_i^* R j_{i*} A.$$

Da wir wissen, daß G trivial auf den Garben $R^s \Psi_i A$ operiert, folgt

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^1(G, R^0 \Psi A(1)) & \rightarrow & R^1 j_* A(1) & \rightarrow & R^1 \Psi_i A(1) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \\ 0 \longrightarrow A & \longrightarrow & A_{Y_i^0} \oplus A_{Y_i^1} & \longrightarrow & R^1 \Psi_i A(1) & \rightarrow & 0 \\ & & \theta \longrightarrow & & \text{cls } Y_i^0 \oplus \text{cls } Y_i^1. & & \end{array}$$

Das Bild von θ hatten wir bereits im Beweis von 2.9 berechnet. Wir finden einen bis auf das Vorzeichen kanonischen Isomorphismus

$$(3.4) \quad a_{i*} A \xrightarrow{\sim} R^1 \Psi_i A(1).$$

Dabei haben wir die Wahl, ob wir 1 auf das Bild der kanonischen Klasse von Y_i^0 oder auf das Bild der kanonischen Klasse von Y_i^1 abbilden.

3.5 Satz. *Der Künnethmorphismus 3.3.1 induziert einen Isomorphismus*

$$(3.5.1) \quad \bigoplus_{i_1 < \dots < i_s \leq r} (q_{i_1}^* a_{i_1*} \Lambda(-1) \otimes \dots \otimes q_{i_s}^* a_{i_s*} \Lambda(-1)) \rightarrow R^s \Psi \Lambda.$$

Wir zeigen zunächst

3.6 Lemma. *Die Restriktionen*

$$H^i(\bar{X}, \Lambda) \rightarrow H^i(X_s, \Lambda), \quad H^i(X, \Lambda) \rightarrow H^i(X_s, \Lambda)$$

sind Isomorphismen.

Beweis. Wir betrachten den allgemeinen Fall, wo π in der Definition von X nicht notwendig ein Primelement ist. Die erste Aussage folgt dann aus der zweiten durch Übergang zum Limes.

Man betrachte die Einbettung

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^2 \times \dots \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1 \\ (X_1^{(0)}: X_1^{(1)}: 1) \times \dots \times (X_r^{(0)}: X_r^{(1)}: 1) \times (X_{r+1}: 1) \times \dots \times (X_n: 1).$$

Es sei Z der Abschluß von X und $D = Z - X$. Eine affine Umgebung eines Punktes von D auf Z sieht wie folgt aus

$$S[W_1, \dots, W_k, U_{k+1} V_{k+1}, \dots, U_n, V_n] / (U_i V_i - \pi).$$

Dabei wird D durch eine Gleichung der Form $W_1 = \dots = W_j = 0$ definiert. Aus 2.17 folgt, daß (Z, D) kohomologisch eigentlich ist. Wir erhalten die Behauptung aus 2.18.

Beweis von 3.5. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen bemerken wir, daß man nach Basiswechsel mit glatten Morphismen $r = n$ annehmen darf. Wir wissen nach 3.6, daß für X die Spektralsequenz der verschwindenden Zyklen gegen die Kohomologie von $X_{\bar{\eta}}$ konvergiert.

$$H^a(Y, R^s \Psi \Lambda) \Rightarrow H^{a+s}(X_{\bar{\eta}}, \Lambda).$$

Wir zeigen, daß $H^a(Y, R^s \Psi \Lambda) = 0$ für $a > 0$. Nach Induktion dürfen wir annehmen, daß der Künnethmorphismus außerhalb von $x = x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ ein Isomorphismus ist.

$$F^s = \bigoplus_{i_1 < \dots < i_s} (q_{i_1}^* a_{i_1*} \Lambda(-1) \otimes \dots \otimes q_{i_s}^* a_{i_s*} \Lambda(-1)) \rightarrow R^s \Psi \Lambda.$$

Folglich hat $R^n \Psi \Lambda$ Träger in x und es gilt

$$H^a(Y, R^n \Psi \Lambda) = 0 \quad \text{für } a > 0.$$

Es sei jetzt $s < n$. Wir bemerken, daß die direkten Summanden von F^s konstante Garben über ihren Trägern $Y_{j_1} \times \dots \times Y_{j_{n-s}}$ sind. Weil diese Träger

auf einen Punkt kontrahierbar sind, folgt

$$H^a(Y, F^s) = 0 \quad \text{und} \quad H_x^0(X, F^s) = 0.$$

Aus der letzten Tatsache folgt, daß der Künnethmorphismus injektiv ist.

$$0 \rightarrow F^s \rightarrow R^s \Psi A \rightarrow K \rightarrow 0.$$

Da K Träger in x hat, verschwinden die fraglichen Kohomologiegruppen auch in diesem Fall. Die Spektralsequenz der verschwindenden Zyklen degeneriert also:

$$H^0(Y, R^s \Psi A) \simeq H^s(X_{\bar{\eta}}, A).$$

Aus dem Decompositionssatz (Artin [1] Chapt. III 2.5) folgt

$$H^0(Y, R^s \Psi A) = (R^s \Psi A)_x.$$

Wir finden ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i_1 < \dots < i_s} H^1(X_{i_1, \bar{\eta}}) \otimes \dots \otimes H^1(X_{i_s, \bar{\eta}}) & \longrightarrow & H^s(X_{\bar{\eta}}, A) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \bigoplus_{i_1 < \dots < i_s} (q_{i_1}^* R^1 \Psi_{i_1} A)_x \otimes \dots \otimes (q_{i_s}^* R^1 \Psi_{i_s} A)_x & \longrightarrow & (R^s \Psi A)_x. \end{array}$$

Es bleibt zu beweisen, daß der obere horizontale Pfeil ein Isomorphismus ist. Das folgt aus dem Basiswechselsatz mit glatten Morphismen, genauso wie die Künnethsche Formel für Kohomologie mit kompakten Trägern. (Vgl. SGA 4, XVII, 5.4.3.5 bzw. SGA 4 1/2, Th. Finitude 1.11.).

3.7 Korollar. *Es sei $f: X \rightarrow S$ lokal ein Produkt von gewöhnlichen Doppelpunkten. Dann definiert das Cupprodukt einen Isomorphismus*

$$\bigwedge^s R^1 \Psi A \rightarrow R^s \Psi A.$$

Wir berechnen $R^1 \Psi A$ für einen Morphismus mit der Eigenschaft (PgD). Dazu betrachten wir zunächst noch einmal den Fall, wo X von der Form 3.3 ist. Man hat den Künnethmorphismus

$$(3.8) \quad \bigoplus_{i=1}^n q_i^* R^1 j_{i*} A(1) \rightarrow R^1 j_* A(1).$$

Es sei c_i^k , $i=1, \dots, r$, $k=0, 1$ das Bild der kanonischen Klasse von Y_i^k bei dem Morphismus

$$H^0(Y_i, R^1 j_{i*} A(1)) \rightarrow H^0(Y, R^1 j_* A(1)).$$

Entsprechend bezeichne c_i , $i=r+1, \dots, n$ das Bild der kanonischen Klasse von Y_i .

3.9 Lemma. *Der Kern von 3.8 wird in jedem Punkt durch die folgenden Relationen erzeugt*

$$c_1^0 + c_1^1 = c_2^0 + c_2^1 = \dots = c_r^0 + c_r^1 = c_{r+1} = \dots = c_n.$$

Man hat eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Lambda^{n-1} \rightarrow \bigoplus q_i^* R^1 j_{i*} \Lambda(1) \rightarrow R^1 j_* \Lambda(1) \rightarrow 0.$$

Beweis. Aus dem Fall eines einfachen Doppelpunktes wissen wir, daß jeder Term der oberen Gleichungskette gleich dem Bild von $\theta \in H^1(\eta, \Lambda(1))$ in $R^1 j_* \Lambda(1)$ ist. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus q_i^* R^1 j_{i*} \Lambda(1) & \longrightarrow & R^1 j_* \Lambda(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus q_i^* R^1 \Psi_i \Lambda(1) & \xrightarrow{\sim} & R^1 \Psi \Lambda(1). \end{array}$$

Die Behauptung folgt, da der Kern von

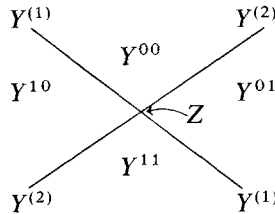
$$R^1 j_* \Lambda(1) \rightarrow R^1 \Psi \Lambda(1)$$

von θ erzeugt wird.

Es sei Z der singuläre Ort von X . Das sind die Punkte von Y , die auf mehr als zwei irreduziblen Komponenten liegen. Es sei

$$Y^{(k)} = \bigcup_{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_n} (Y^{i_1 \dots 0 \dots i_n} \cap Y^{i_1 \dots 1 \dots i_n}) = q_k^{-1}(X_k).$$

Die folgende Abbildung verdeutlicht die Bezeichnungen für $r=n=2$



In einem Punkt $x \notin Z$ sind die Fundamentalklassen definiert

$$cls Y^{i_1 \dots i_n}(x) \in (R^1 j_* \Lambda(1))_x.$$

Zur Vereinfachung der Bezeichnungen wollen wir $r=n$ voraussetzen. Aus dem Fall eines einfachen Doppelpunktes wissen wir

$$\bar{c}_k^l(x) = \sum_{i_k=l} cls Y^{i_1 \dots i_n}(x) \quad x \notin Z.$$

Der Querstrich bezeichnet das Bild von $\bar{c}_k^l$ in $R^1 j_* \Lambda(1)$.

Nach Definition von Z enthält die Summe höchstens zwei von 0 verschiedene Terme.

Es sei $z \in Y^{i_1 \dots i_n}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Schnitt γ von $R^1 j_* \Lambda(1)$ in einer Umgebung von z , so daß

$$\gamma(x) = cls Y^{i_1 \dots i_n}(x), \quad \text{für } x \in Y^{i_1 \dots i_n} - Z.$$

In der Tat, es sei z.B. $Y^{i_1 \dots i_n} = Y^{0 \dots 0}$. Dann gilt

$$\gamma = \bar{c}_1^0 - \bar{c}_2^1 \dots - \bar{c}_n^1.$$

Durch Lokalisierung sieht man, daß die Definition von γ für beliebige Morphismen $f: X \rightarrow S$, die der Bedingung (PgD) genügen, sinnvoll ist.

3.10 Definition.

$$\text{cls } Y^{i_1 \dots i_n}(z) = \gamma(z) \in R^1 j_* \Lambda(1), \quad z \in Y^{i_1 \dots i_n}$$

nennen wir die Fundamentalklasse von $Y^{i_1 \dots i_n}$ im Punkte z .

Wir betrachten die Einbettung $v_k: Y^{(k)} \setminus Z \rightarrow Y$. Es sei

$$\mathcal{F}_k = \text{Im}(R^1 \Psi \Lambda \rightarrow v_{k*} v_k^* R^1 \Psi \Lambda).$$

Wenn X von der Form 3.3 ist, so gilt $\mathcal{F}_k = q_k^* R^1 \Psi_k \Lambda$.

3.11 Satz. Es sei $f: X \rightarrow S$ ein Morphismus, der der Bedingung (PgD) genügt. Dann ist $\mathcal{F}_k$ isomorph zur konstanten Garbe $\Lambda(-1)_{|Y^{(k)}}$. Die kanonische Abbildung

$$R^1 \Psi \Lambda \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{F}_i$$

ist ein Isomorphismus. Es sei $x \in Y^{i_1 \dots i_n}$. Wir bezeichnen mit $\lambda_k^{i_1 \dots i_n}(x)$ das Bild von $\text{cls } Y^{i_1 \dots i_n}(x)$ bei der kanonischen Abbildung

$$R^1 j_* \Lambda(1) \rightarrow R^1 \Psi \Lambda(1) \xrightarrow{pr} \mathcal{F}_k(1).$$

Dann ist $\lambda_k^{i_1 \dots i_n}(x)$ ein Erzeugendes von $\mathcal{F}_{k,x}(1)$. Wenn $x \in Y^{i_1 \dots i_n} \cap Y^{j_1 \dots j_n}$ so gilt

$$\begin{aligned} \lambda_k^{i_1 \dots i_n}(x) &= \lambda_k^{j_1 \dots j_n}(x) \quad \text{für } i_k = j_k \\ \lambda_k^{i_1 \dots i_n}(x) &= -\lambda_k^{j_1 \dots j_n}(x) \quad \text{für } i_k \neq j_k. \end{aligned}$$

Beweis. Nach 3.5 wissen wir bereits, daß $\mathcal{F}_k(1)$ lokal konstant ist und daß

$$R^1 \Psi \Lambda(1) \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{F}_i(1)$$

ein Isomorphismus ist. Wenn wir die letzte Aussage bewiesen hätten, folgte, daß $\mathcal{F}_k(1)$ konstant ist. Da das Problem lokal ist, dürfen wir voraussetzen, daß X von der Form 3.3 ist.

Es sei $i'_k \in \{0, 1\}$, so daß $i_k + i'_k = 1$. Dann ist $\lambda_k^{i_1 \dots i_n}$ das Bild von

$$\bar{c}_k^{i_k} - \sum_{l \neq k} \bar{c}_l^{i'_l} \in R^1 j_* \Lambda(1)$$

bei der Projektion auf $\mathcal{F}_k(1)$. Die Behauptung folgt, da $c_l^{i'_l}$ bei der Projektion auf Null abgebildet wird, genauso wie

$$\bar{c}_k^{i_k} + \bar{c}_k^{i'_k} = \theta.$$

§ 4. Beschreibung der Shimuravarietäten

In diesem Paragraphen beschreiben wir die beiden Klassen von Shimuravarietäten der Dimension 2 mit schlechter Reduktion, deren Kohomologie wir berechnen wollen. Es sei p eine Primzahl. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_m \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \quad \hat{\mathbb{Z}}^p = \varprojlim_{(m,p)=1} \mathbb{Z}/m$$

$\mathbb{A}$ = der Adèlering von Q

$$\mathbb{A}_f = \hat{\mathbb{Z}} \otimes Q, \quad \mathbb{A}_f^p = \hat{\mathbb{Z}}^p \otimes Q.$$

$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_m)$ Weilrestriktion der multiplikativen Gruppe.

$\mathbb{Z}_{(p)}$ = Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ im Primideal $p\mathbb{Z}$.

Klasse A (Bzgl. der Einzelheiten und Beweise müssen wir auf die Niederschrift von [30] vertrauen.)

Es sei K eine imaginär-quadratische Erweiterung von Q , in der p in das Produkt von zwei verschiedenen Primidealen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ zerfällt. Es sei D eine zentrale Divisionsalgebra vom Grad 3^2 über K , so daß $D \otimes_{Q,p} = D_{\mathfrak{p}_1} \times D_{\mathfrak{p}_2}$, wobei $D_{\mathfrak{p}_i}$ zentrale Divisionsalgebren über $K_{\mathfrak{p}_i}$ mit den Invarianten $i \bmod 3$ sind. Es sei $*$ eine positive Involution auf D ; sie ist notwendigerweise 2. Art, d.h. induziert den nichttrivialen Automorphismus $k \rightarrow \bar{k}$ von K . Es sei V ein freier D^{opp} -Linksmodul vom Rang 1 und ψ eine nichtausgeartete alternierende Bilinearform mit Werten in Q auf V , so daß $\psi(d \cdot x, y) = \psi(x, d^* y)$. Wir fassen die entsprechende Gruppe unitärer Ähnlichkeiten als algebraische Gruppe über Q auf:

$$G(Q) = \{g \in GL_D(V) \mid \psi(g \cdot x, g \cdot y) = \mu(g) \cdot \psi(x, y), \mu(g) \in Q\}.$$

Die Wahl eines erzeugenden Elements des D^{opp} -Moduls V identifiziert $GL_D(V)$ mit D^* , von rechts auf D operierend und wir können ψ in der Form

$$\psi(x, y) = \text{Tr}_{K/Q} \text{Tr}_D^0(J^{-1} \cdot x^* \cdot y), \quad x, y \in D$$

für ein $J \in D^*$ mit $J^* = -J$ schreiben. Falls wir die nicht notwendig positive Involution 2. Art $d^{\tau} = J^{-1} \cdot d^* J$ auf D einführen, wird

$$G(Q) = \{d \in D^* \mid d \cdot d^{\tau} = \mu(d) \in Q^{\times}\}.$$

Wir fixieren eine Einbettung $\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}$. Wir finden einen Isomorphismus von $D \otimes_{K,\sigma} \mathbb{C}$ mit $M_3(\mathbb{C})$, so daß $*$ zur Standardinvolution $X \rightarrow {}^t \bar{X}$ wird, und eine solche Erzeugende von $V \otimes_{K,\sigma} \mathbb{C}$, daß die antihermitesche Matrix J gleich

$$J = \begin{pmatrix} i \cdot I_r & 0 \\ 0 & -i \cdot I_{(3-r)} \end{pmatrix}$$

wird. Die Zahl r hängt lediglich von σ ab. Wir setzen voraus, daß $r=1$ ist. Somit ist $G \otimes \mathbb{R}$ die Gruppe der unitären Ähnlichkeiten $GU(2,1)$ und wir

definieren

$$h_0: \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \rightarrow G_{\mathbb{R}}$$

$$a + b \cdot \sqrt{-1} \mapsto \begin{pmatrix} a + b \cdot \sqrt{-1} & & 0 \\ & a - b \cdot \sqrt{-1} & \\ 0 & & a - b \cdot \sqrt{-1} \end{pmatrix}.$$

Die Konjugationsklasse von h_0 hängt nur von σ , nicht von der gewählten Normalisierung von $(D, *, V) \otimes_{K, \sigma} \mathbb{C}$ ab. Nach Deligne [7] gehört zu dem Paar (G, h_0) eine Shimuravarietät M_G . Genauer sei $C_{\infty} \subset G(\mathbb{R})$ der Zentralisator von h_0 und $C \subset G(\mathbb{A}_f)$ eine offene kompakte Untergruppe. Der Quotient $M_{G,C} = G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / C_{\infty} \cdot C$ besitzt die Struktur einer projektiven algebraischen Varietät über $\mathbb{C}$ und die Gruppe $G(\mathbb{A}_f)$ wirkt von rechts auf dem projektiven System $M_G = \varprojlim_C M_{G,C}$. Wegen der von uns gemachten Voraussetzungen über D ist die

Gruppe $G(\mathbb{Q}_p)$ kompakt modulo dem Zentrum. Wir betrachten nur offene kompakte Untergruppen $C \subset G(\mathbb{A}_f)$ von der Form $C = C^p \cdot C_p$, wobei $C_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ die maximale kompakte Untergruppe ist und $C^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$.

Es sei O_K der Ring der ganzen Zahlen in K und $O_{K(p)} = O_K \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. Wir suchen ein Modell von $M_{D,C}$ über $\text{Spec}(O_{K(p)})$. Es sei O_D eine Ordnung in D , die O_K umfaßt, und die in $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ maximal ist. Es sei, in leichter Abänderung der vorhergehenden Bezeichnungen, $V = O_D$ aufgefaßt als $O_{D^{\text{opp}}}$ -Linksmodul. Wir fordern, daß die Bilinearform ψ auf O_D ganze Werte nimmt und daß $\psi \otimes \mathbb{Z}_p$ eine perfekte Bilinearform auf $V \otimes \mathbb{Z}_p$ mit Werten in $\mathbb{Z}_p$ ist. Die Untergruppe $C^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ möge $V \otimes \hat{\mathbb{Z}}^p$ in sich überführen.

Wir betrachten folgendes Modulproblem $\mathcal{M}_C$ über $(\text{Sch}/\text{Spec}(O_{K(p)}))$. Ein Punkt des Funktors $\mathcal{M}_C$ über einem $O_{K(p)}$ -Schema T besteht aus:

a) einem abelschen Schema A über T bis auf zu p prime Isogenie und einer Einbettung

$$\iota: O_{D^{\text{opp}}} \rightarrow \text{End}(A),$$

so daß

$$\text{Tr}_{\mathcal{O}_T}(\iota(d) | \text{Lie}(A)) = \text{Tr}_D^0(d) + 2 \cdot \overline{\text{Tr}_D^0(d)} \quad \text{für } d \in O_{D^{\text{opp}}}.$$

b) einer homogenen Polarisierung $\bar{\lambda}$, die auf $\iota(D^{\text{opp}}) \subset \text{End}^0(A)$ die Involution $*$ induziert und die p -prinzipal ist (d.h. $\bar{\lambda} \in \text{NS}(A) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Q}^{\times}$ ist die Klasse einer zu p primen Isogenie $A \rightarrow A^*$).

c) einer Äquivalenzklasse von $O_{D^{\text{opp}}}$ -Modulisomorphismen

$$\bar{\eta}: \hat{V}^p(A) \simeq V \otimes \mathbb{A}_f^p \text{ mod } C^p,$$

die die Bilinearform $\psi \otimes \mathbb{A}_f^p$ der rechten Seite und die von (einem Repräsentanten von) $\bar{\lambda}$ auf der linken Seite definierte Bilinearform bis auf einen Faktor erhält. Hier bezeichnet $\hat{V}^p(A)$ das eingeschränkte Produkt über die Tate-moduln $\hat{V}^p(A) = (\prod_{i \neq p} T_i(A)) \otimes \mathbb{Q}$. (Eigentlich nimmt die letztere Bilinearform kanonisch Werte in $\mathbb{A}_f^p(1)$ und nicht in $\mathbb{A}_f^p$, dennoch ist die Bedingung sinnvoll).

4.1 Satz. Der Funktor $\mathcal{M}_C$ ist durch ein Schema $\mathcal{M}_C$ darstellbar, das projektiv und flach über $O_{K(p)}$ ist. Es ist $\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K(p)}, \sigma} \mathbb{C} \simeq M_{G, \mathbb{C}}$ und die Aktion von $G(\mathbb{A}_f^p)$ auf $\varprojlim_{C^p} M_{G, \mathbb{C}}$ erweitert sich auf $\varprojlim_{C^p} \mathcal{M}_C$.

Offenbar hängt $\mathcal{M}_C$ nicht von der Wahl von O_D ab. Es sei $K'_{\#1}$ die unverzweigte kubische Erweiterung von $K_{\#1}$. Der folgende Satz beschreibt das Schema $\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K(p)}} O_{K_{\#2}}$.

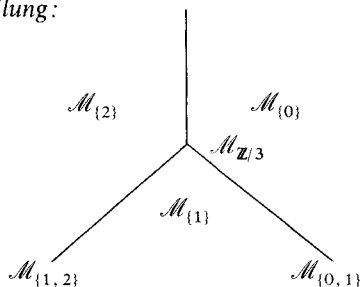
4.2 Satz. (i) Eine nichtleere Untermenge $S \subset \mathbb{Z}/3$ möge zulässig heißen. (Die zulässigen Mengen klassifizieren die Darstellungen von $O_D \otimes_{O_K} O_{K'_{\#2}}/p \cdot O_{K'_{\#2}}$ auf $\text{Lie}(A) \otimes_{O_{K(p)}} O_{K'_{\#2}}/p \cdot O_{K'_{\#2}}$.) Einer zulässigen Menge S entspricht ein glattes abgeschlossenes Unterschema $\mathcal{M}_{C, S} \subset \mathcal{M}_C \otimes_{O_{K(p)}} O_{K'_{\#2}}/p \cdot O_{K'_{\#2}}$ der Dimension 3-card S .

Das Schema $\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K(p)}} O_{K_{\#2}}$ ist regulär und die Unterschemata $\mathcal{M}_{C, \{i\}}$ ($i \in \mathbb{Z}/3$) bilden einen Divisor mit normalen Kreuzungen und

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{C, S} &\subset \mathcal{M}_{C, S'} \Leftrightarrow S' \subset S \\ \mathcal{M}_{C, S} \cap \mathcal{M}_{C, S'} &= \mathcal{M}_{C, S \cup S'} \\ \mathcal{M}_C \otimes_{O_{K(p)}} O_{K'_{\#2}}/p \cdot O_{K'_{\#2}} &= \bigcup \mathcal{M}_{C, S}. \end{aligned}$$

Das Frobeniuselement aus $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^3}/\mathbb{F}_p)$ führt $\mathcal{M}_{C, S}$ in $\mathcal{M}_{C, S+1}$ über.

Schematische Darstellung:



(ii) Es gibt Morphismen $\pi: \mathcal{M}_{C, \{i\}} \rightarrow \mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}$, deren allgemeine Faser glatt ist und deren reduzierte geometrische Fasern singularitätenfreie rationale Kurven sind. Die Einschränkung von π auf $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}$ ist ein Isomorphismus und die Einschränkung von π auf $\mathcal{M}_{C, \{i-1, i\}}$ ist rein inseparabel vom Grad p .

(iii) In jeder geometrischen Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_C \otimes_{O_{(p)}} O_{K_{p_2}}/p \cdot O_{K_{p_2}}$ liegt genau eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_{C, \{i\}}$ und genau eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}$ ($i \in \mathbb{Z}/3$).

(iv) Die Menge der geometrischen Zusammenhangskomponenten ist

$$\pi_0(\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K_{\#2}}} O_{K_{\#2}}/p \cdot O_{K_{\#2}}) = K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C),$$

wobei $\kappa: G \rightarrow R_{K/Q}(\mathbb{G}_m)$ gleich $\mu^{-1} \cdot \det$ ist. Der Operation des Frobeniuselements auf der linken Seite entspricht auf der rechten Seite die Multiplikation mit der endlichen Idele, die außerhalb $\#_2$ gleich 1 und in $\#_2$ eine Uniformisierende ist. Die Steinfaktorisierung des Morphismus $\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K_{\#2}}} \rightarrow \text{Spec}(O_{K_{\#2}})$ ist étale. Insbesondere sind alle geometrischen Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{M}_C \otimes K_{\#2}$ über

derselben unverzweigten Erweiterung, K'' , von $K_{\#_2}$ definiert und jede geometrische Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K_{\#_2}}/p} O_{K_{\#_2}}$ ist die Reduktion modulo p eines wohlbestimmten Unterschemas $\mathcal{M}_C^0 \subset \mathcal{M}_C \otimes_{O_{K''}}$ über $\text{Spec}(O_{K''})$, dessen allgemeine Faser eine geometrische Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_C \otimes_{K_{\#_2}}$ ist.

(v) Es sei G_- die innere Verschränkung von G , die in der archimedischen Stelle kompakt modulo dem Zentrum ist und in allen übrigen Stellen gleich G ist. Wir fixieren einen Isomorphismus $\varphi: G_-(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{A}_f)$ und definieren $C_-^p = \varphi^{-1}(C^p)$, $C_{-p} = \varphi^{-1}(C_p)$ und $C_- = C_-^p \cdot C_{-p}$. Es gibt eine Bijektion

$$\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/3}(\overline{\mathbb{F}}_p) \xrightarrow{\sim} G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f) / C_-;$$

für variables C^p ist das eine Bijektion von projektiven Systemen, die die Aktion von $G_-(\mathbb{A}_f^p) = G(\mathbb{A}_f^p)$ auf beiden Seiten respektiert. Der Aktion des Frobeniuselements auf der linken Seite entspricht auf der rechten Seite die Multiplikationswirkung eines beliebigen Elements Φ aus $G_-(Q_p)$, das unter

$$\kappa: G_-(Q_p) \rightarrow K_p^\times = K_{\#_1}^\times \times K_{\#_2}^\times$$

in ein Element abgebildet wird, dessen Bewertung $(\text{ord}_{\#_1}, \text{ord}_{\#_2})$ gleich $(0, 1)$ ist. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/3}(\overline{\mathbb{F}}_p) &\rightarrow \pi_0(\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K_{\#_2}}/p} O_{K_{\#_2}}) \\ x &\mapsto \text{Zusammenhangskomponente, die } x \text{ enthält} \end{aligned}$$

ist folgendermaßen gegeben

$$\kappa: G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f) / C_- \rightarrow K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f) / \kappa(C).$$

In jeder geometrischen Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K_{\#_2}}/p} O_{K_{\#_2}}$ liegt mindestens ein Punkt von $\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/3}$

Das Schema $\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K(p)}} O_{K_{\#_1}}$ besitzt eine p -adische Uniformisierung im folgenden Sinn. Es sei $\hat{\Omega}^3$ der p -adische obere Halbraum über $\mathbb{Z}_p$ [11]. Das ist ein formales Schema über $\mathbb{Z}_p$, dessen „allgemeine Faser“ man als eine projektive Ebene interpretieren kann, aus der alle über Q_p rationalen Geraden entfernt sind. Es sei G_- diejenige Verschränkung von G über Q , die in der archimedischen Stelle von Q kompakt modulo dem Zentrum ist, die in p zerfallend (modulo dem Zentrum) ist, und die in allen übrigen Stellen isomorph zu G ist. Wir fixieren Isomorphismen $G_-(\mathbb{A}_f^p) \simeq G(\mathbb{A}_f^p)$ und $G_{-ad}(Q_p) \simeq PGL(3, Q_p)$. Dann erhält man einen Isomorphismus von formalen Schemata über $O_{K_{\#_1}}$:

$$(\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K(p)}} O_{K_{\#_1}})^\wedge = G_-(Q) \backslash \hat{\Omega}_{O_{K_{\#_1}}}^3 \times G_-(\mathbb{A}_f^p) / C^p.$$

Hierbei operiert $G_-(Q)$ auf $\hat{\Omega}^3$ über die Projektion $G_-(Q) \rightarrow PGL(3, Q_p)$. Für unsere Rechnungen genügen die Informationen, die im folgenden Satz enthalten sind.

4.3 Satz. (i) genauso wie in 4.4. (i) (falls dort der Index $\#_2$ überall durch den Index $\#_1$ ersetzt wird).

(ii) genauso wie in 4.4. (iv).

Es sei G_- die eben beschriebene innere Verschränkung von G . Wir fixieren Isomorphismen $\varphi: G_-(\mathbb{A}_f^p) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{A}_f^p)$ und $G_{-ad}(Q_p) \simeq PGL(3, Q_p)$. Es sei C_-^p

$= \varphi^{-1}(C^p)$. Es sei $\mathcal{X}$ das Bruhat-Titsgebäude von $SL(3, \mathbb{Q}_p)$ und $\Delta = \{p_0, p_1, p_2\}$ eine Kammer in $\mathcal{X}$. Es sei, für zulässiges S , C_{-p}^S die maximale kompakte Untergruppe des Stabilisators des Simplex $\{p_i\}_{i \in S}$ in $G_{-}(\mathbb{Q}_p)$. Es sei $\Phi \in G_{-}(\mathbb{Q}_p)$ ein Element, das Δ stabilisiert und p_i in p_{i+1} überführt, und das unter $\kappa: G_{-}(\mathbb{Q}_p) \rightarrow K_{\#1}^{\times} = K_{\#1}^{\times} \times K_{\#2}^{\times}$ in ein Element abgebildet wird, dessen Bewertung $(\text{ord}_{\#1}, \text{ord}_{\#2})$ gleich $(1, 0)$ ist.

(iii) $\mathcal{M}_{C, \{i\}}$ ist die disjunkte Vereinigung von Aufblasungen der projektiven Ebene in allen über $\mathbb{F}_p$ rationalen Punkten. Die Menge der irreduziblen Komponenten von $\mathcal{M}_{C, \{i\}}$ ist bijektiv zu $G_{-}(\mathbb{Q}) \backslash G_{-}(\mathbb{A}_f) / C_{-p}^p \cdot C_{-p}^i$. Für variables C ist das eine Bijektion von projektiven Systemen, die die Aktion von $G_{-}(\mathbb{A}_f^p) = G(\mathbb{A}_f^p)$ respektiert. Der Aktion des Frobeniuselements aus $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_{p^3})$ auf $\pi_0(\mathcal{M}_{C, \{i\}})$ entspricht rechts die Multiplikationswirkung von Φ^3 . Die Abbildung $\pi_0(\mathcal{M}_{C, \{i\}}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K_{\#1}}} / O_{K_{\#1}})$ ist gegeben durch

$$\kappa: G_{-}(\mathbb{Q}) \backslash G_{-}(\mathbb{A}_f) / C_{-p}^p \cdot C_{-p}^i \rightarrow K^{\times} \backslash K^{\times}(\mathbb{A}_f) / \kappa(C).$$

(iv) $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}$ ist die disjunkte Vereinigung von projektiven Geraden. Dabei ist $\pi_0(\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}) = G_{-}(\mathbb{Q}) \backslash G_{-}(\mathbb{A}_f) / C_{-p}^p \cdot C_{-p}^{i, i+1}$ (kompatibel mit C , und die $G(\mathbb{A}_f^p)$ -Aktion auf beiden Seiten respektierend), wobei der Aktion des Frobeniuselements aus $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_{p^3})$ links die Multiplikationswirkung von Φ^3 rechts entspricht. Die Inklusion $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}} \rightarrow \mathcal{M}_{C, \{i\}}$ stellt $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}$ als Vereinigung der exzeptionellen Divisoren dar; die Inklusion $\mathcal{M}_{C, \{i-1, i\}} \hookrightarrow \mathcal{M}_{C, \{i\}}$ stellt $\mathcal{M}_{C, \{i-1, i\}}$ als Vereinigung der strengen Transformierten der über $\mathbb{F}_p$ rationalen Geraden dar. Die Abbildungen $\pi_0(\mathcal{M}_{C, \{i, j\}}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{M}_{C, \{i\}})$ ($i \neq j$) sind durch die Quotientenabbildungen gegeben:

$$G_{-}(\mathbb{Q}) \backslash G_{-}(\mathbb{A}_f) / C_{-p}^p \cdot C_{-p}^{i, j} \rightarrow G_{-}(\mathbb{Q}) \backslash G_{-}(\mathbb{A}_f) / C_{-p}^p \cdot C_{-p}^i.$$

(v) Es gibt eine Bijektion $\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/3}(\overline{\mathbb{F}_p}) = G_{-}(\mathbb{Q}) \backslash G_{-}(\mathbb{A}_f) / C_{-p}^p \cdot C_{-p}^{\mathbb{Z}/3}$ (kompatibel mit C und die Aktion von $G(\mathbb{A}_f^p)$ respektierend), so daß der Aktion des Frobeniuselements aus $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ auf der linken Seite die Multiplikationswirkung von Φ auf der rechten Seite entspricht. Die Abbildungen $\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/3}(\overline{\mathbb{F}_p}) \rightarrow \pi_0(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/3 \setminus \{i\}})$ sind durch die Quotientenabbildungen gegeben:

$$G_{-}(\mathbb{Q}) \backslash G_{-}(\mathbb{A}_f) / C_{-p}^p \cdot C_{-p}^{\mathbb{Z}/3} \rightarrow G_{-}(\mathbb{Q}) \backslash G_{-}(\mathbb{A}_f) / C_{-p}^p \cdot C_{-p}^{\mathbb{Z}/3 \setminus \{i\}}.$$

Klasse B. (Bzgl. der Einzelheiten und der Beweise verweisen wir auf [39].)

Es sei F eine total reelle quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$, in der p prim bleibt. Es sei D eine Quaternionenalgebra über F , die in den archimedischen Stellen unverzweigt ist und die in p verzweigt ist. Wir fassen die multiplikative Gruppe von D als algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$ auf und definieren

$$h_0: \mathcal{S}_{\mathbb{R}} \rightarrow D_{\mathbb{R}}^{\times} \simeq GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$$

$$a + b \cdot \sqrt{-1} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Die Konjugationsklasse von h_0 ist unabhängig vom gewählten Isomorphismus $D_{\mathbb{R}}^{\times} \simeq GL(2, \mathbb{R}) \times GL(2, \mathbb{R})$. Nach Deligne [7] gehört zu dem Paar $(D^{\times}, h_0)$ eine Shimuravarietät M_D . Genauer sei $C_{\infty} \subset D_{\mathbb{R}}^{\times}$ der Zentralisator von h_0 und

$C \subset D^\times(\mathbb{A}_f)$ eine offene kompakte Untergruppe. Der Quotient $M_{D,C} \simeq D^\times \backslash D^\times(\mathbb{A})/C_\infty \cdot C$ besitzt die Struktur einer projektiven algebraischen Varietät über $\mathbb{C}$ und die Gruppe $D^\times(\mathbb{A}_f)$ operiert von rechts auf dem projektiven System $M_D = \varprojlim_C M_{D,C}$. Wir betrachten nur offene kompakte Untergruppen

von der Form $C = C^p \cdot C_p$, wobei $C_p \subset D^\times(Q_p)$ die maximale kompakte Untergruppe ist und $C^p \subset D^\times(\mathbb{A}_f^p)$ hinreichend klein im folgenden Sinne ist. Es sei O_D eine Ordnung in D , die in p maximal ist, und es sei $V = O_D$, aufgefaßt als $O_{D^{\text{opp}}}$ -Linksmodul. Wir fordern, daß es ein $N \geq 3$ gibt, so daß $C^p \subset \text{Aut}_{O_{D^{\text{opp}}}}(V \otimes \hat{\mathbb{Z}})$ trivial auf $V \otimes \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ wirkt.

Wir suchen ein Modell von $M_{D,C}$ über $\text{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$. Dazu betrachten wir folgendes Modulproblem $\mathcal{M}_C$ über $(\text{Sch}/\text{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}))$. Ein Punkt des Funktors $\mathcal{M}_C$ über einem $\mathbb{Z}_{(p)}$ -Schema T besteht aus:

a) einem abelschen Schema A über T bis auf zu p prime Isogenie und einer Einbettung $\iota: O_{D^{\text{opp}}} \rightarrow \text{End } A$, so daß

$$\text{Tr}_{\mathcal{O}_T}(\iota(d)) | \text{Lie}(A) = \text{Tr}_{F/Q} \text{Tr}_{D^{\text{opp}}}^0(d) \quad \text{für } d \in O_{D^{\text{opp}}}.$$

b) einer Äquivalenzklasse von O_D -Modulisomorphismen

$$\bar{\eta}: \hat{V}^p(A) \simeq D \otimes \mathbb{A}_f^p \bmod C^p.$$

Offenbar hängt das Modulproblem $\mathcal{M}_C$ nicht von der Wahl von O_D ab.

4.4 Satz. Der Funktor $\mathcal{M}_C$ ist durch ein Schema $\mathcal{M}_C$ darstellbar, das projektiv und flach über $\mathbb{Z}_{(p)}$ ist. Es ist $\mathcal{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{C} \simeq M_{D,C}$ und die Aktion von $D^\times(\mathbb{A}_f^p)$ auf $\varprojlim_{C^p} M_{D,C}$ erweitert sich auf $\varprojlim_{C^p} \mathcal{M}_C$.

Es seien F' die unverzweigte quadratische Erweiterung von F_p und $O_{F'}$ der Ring der ganzen Elemente. Das Schema $\mathcal{M}_C$ besitzt folgende Beschreibung.

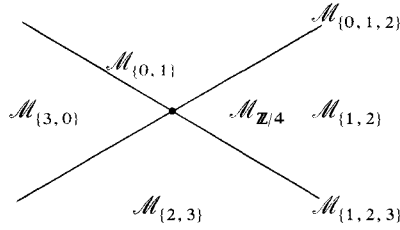
4.5 Satz. (i) Die Untermengen $\{i, i+1\}$ von $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und alle aus ihnen durch Vereinigung erhaltenen Untermengen $S \subset \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ mögen zulässig heißen. (Die zulässigen Mengen klassifizieren die Darstellungen von O_D auf $\text{Lie}(A)$.) Einer zulässigen Menge S entspricht ein glattes abgeschlossenes Unterschema $\mathcal{M}_{C,S} \subset \mathcal{M}_C \otimes_{O_{F'}} pO_{F'}$ der Dimension $4 - \text{card } S$. Die Unterschemata $\mathcal{M}_{C,S}$ schneiden sich transversal und

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{C,S} \subset \mathcal{M}_{C,S'} &\Leftrightarrow S' \subset S \\ \mathcal{M}_{C,S} \cap \mathcal{M}_{C,S'} &= \mathcal{M}_{C,S \cup S'} \\ \mathcal{M}_C \otimes_{O_{F'}} pO_{F'} &= \bigcup_S \mathcal{M}_{C,S}. \end{aligned}$$

Es sei x ein abgeschlossener Punkt von $\mathcal{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} O_{F'}$ und S_x die maximale zulässige Menge S , so daß $x \in \mathcal{M}_{C,S}$.

Dann ist $\mathcal{M}_C \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} O_{F'}$ lokal in x bzgl. der Etaletopologie isomorph zum Produkt von $\text{card } S_x - 2$ gewöhnlichen Doppelpunkten und einem glatten Schema der Dimension $4 - \text{card } S_x$ über $\text{Spec}(O_{F'})$. Das Frobeniuselement aus $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^4}/\mathbb{F}_p)$ führt $\mathcal{M}_{C,S}$ in $\mathcal{M}_{C,S+1}$ über.

Schematische Darstellung:



(ii) Es gibt Morphismen $\pi: \mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}} \rightarrow \mathcal{M}_{C, \{i, i+1, i+2\}}$, deren allgemeine Fasern glatt sind und deren reduzierte geometrische Fasern singularitätenfreie rationale Kurven sind. Die Einschränkung von π auf $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1, i+2\}}$ ist ein Isomorphismus und die Einschränkung von π auf $\mathcal{M}_{C, \{i-1, i, i+1\}}$ ist rein inseparabel vom Grad p .

(iii) In jeder geometrischen Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_C \otimes \mathbb{F}_p$ liegt genau eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}$ und genau eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1, i+2\}}$ ($i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$).

(iv) Die Menge der geometrischen Zusammenhangskomponenten ist

$$\pi_0(\mathcal{M}_C \otimes \mathbb{F}_p) = F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f) / Nm_D^0 C.$$

Hier bezeichnet $F_+^\times$ die Gruppe der total positiven Elemente in $F^\times$. Der Operation des Frobeniuselements auf der linken Seite entspricht auf der rechten Seite die Multiplikation mit der Ideale, die in allen Stellen außer p gleich 1 und in p eine Uniformisierende ist. Die Steinfaktorisierung des Morphismus $\mathcal{M}_C \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ ist étale.

(v) Es sei D_- die Quaternionenalgebra über F , die in den archimedischen Stellen verzweigt ist und die in allen übrigen Stellen gleich D ist. Wir fixieren einen Isomorphismus $\varphi: D_-(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\sim} D(\mathbb{A}_f)$ und setzen $C_-^p = \varphi^{-1}(C^p)$, $C_{-p} = \varphi^{-1}(C_p)$ und $C_- = C_-^p \cdot C_p$. Dann gibt es eine Bijektion

$$\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq D_-^\times \backslash D_-^\times(\mathbb{A}_f) / C_-;$$

für variables C ist das eine Bijektion von projektiven Systemen, die die Aktion von $D_-^\times(\mathbb{A}_f^p) \simeq D_-^\times(\mathbb{A}_f^p)$ auf beiden Seiten respektiert. Der Aktion des Frobeniuselements auf der linken Seite entspricht die Multiplikationswirkung eines beliebigen Primelements Φ aus $D_-^\times(\mathbb{Q}_p) \subset D_-^\times(\mathbb{A}_f)$ auf der rechten Seite. Die Abbildung

$$\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(\overline{\mathbb{F}}_p) \rightarrow \pi_0(\mathcal{M}_C)$$

$x \mapsto$ Zusammenhangskomponente, in der x liegt

ist

$$Nm_{D_-}^0: D_-^\times \backslash D_-^\times(\mathbb{A}_f) / C_- \rightarrow F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f) / Nm_D^0 C.$$

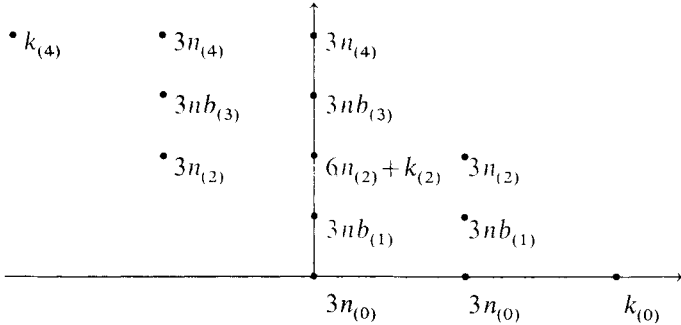
In jeder geometrischen Zusammenhangskomponente von $\mathcal{M}_C \otimes \mathbb{F}_p$ liegt mindestens ein Punkt von $\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$.

§ 5. Berechnung der Kohomologie

In diesem § wenden wir die Resultate der ersten Abschnitte auf die im § 4 beschriebenen Varietäten an.

Klasse A. Wir benutzen in diesem Fall die Steenbrinckspektralsequenz. Wir beschäftigen uns zunächst mit der Primstelle $\not p_2$.

5.1 Lemma. Die E_1 -Schicht der Steenbrinckspektralsequenz (mit Koeffizienten in Q_l) bzgl. des Strukturmorphismus $\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K_{\not p_2}}} \rightarrow \text{Spec}(O_{K_{\not p_2}})$ hat folgende Gestalt:



Hierbei bedeuten:

$$n = \text{card } \pi_0(\mathcal{M}_C \otimes_{O_{K_{\not p_2}}} / p O_{K_{\not p_2}}).$$

$$k = \text{card } \mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/3}(\overline{\mathbb{F}}_p).$$

b = gemeinsame Bettizahl der irreduziblen Komponenten von $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}$.

Ein Index in Klammern, wie z.B. $k_{(4)}$, bedeutet die Gewichtsangabe bzgl. des Frobenius.

Beweis. a) In der 0. Zeile stehen der Reihe nach $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/3} H^0(\mathcal{M}_{C, \{i\}}, Q_l)$ und $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/3} H^0(\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}, Q_l)$. Die Behauptung folgt aus 4.2, (iii).

b) In der 1. Zeile stehen der Reihe nach $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/3} H^1(\mathcal{M}_{C, \{i\}}, Q_l)$ und $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/3} H^1(\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}, Q_l)$. Die Behauptung bzgl. des letzten Terms ist klar. Die Behauptung bzgl. des ersten Terms folgt aus 4.2 (ii) mit Hilfe der Leray-Spektralsequenz bzgl. π .

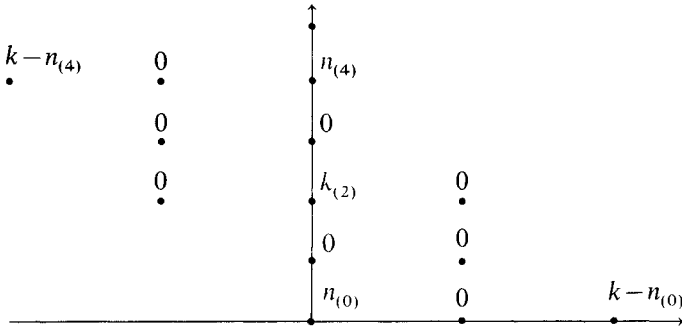
c) In der 2. Zeile stehen der Reihe nach

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/3} H^0(\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}, Q_l(-1)), \\ & \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/3} H^2(\mathcal{M}_{C, \{i\}}, Q_l) \oplus H^0(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/3}, Q_l(-1)), \\ & \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/3} H^2(\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}, Q_l). \end{aligned}$$

Die Behauptung bzgl. des ersten und letzten Terms ist klar. Im zweiten Term ist der zweite Summand offensichtlich. Der erste Summand berechnet sich wieder m.H. der Leray-Spektralsequenz bzgl. π .

d) Die übrigen Terme bestimmen sich aus den bisher berechneten durch Poincarédualität.

5.2 Proposition. *Die E_2 -Schicht der Spektralsequenz in 5.1 hat folgende Gestalt.*



Die Spektralsequenz degeneriert im E_2 -Niveau: $E_2 = E_\infty$.

Beweis. Die Ausartung der Spektralsequenz ist klar aus Gewichtsgründen.

a) Um die 0. Zeile zu rechtfertigen, genügt es zu zeigen, daß $E_2^{1,0} = 0$. In der Tat ist klar, daß $E_2^{0,0} = E_\infty^{0,0} = Q_i^n$ und die Behauptung bzgl. $E_2^{2,0}$ folgt dann aus einer Betrachtung der Euler-Poincaré-Charakteristik. Der Homomorphismus $d_1^{1,0}$ wurde mit dem Čech-Restriktionshomomorphismus identifiziert (siehe 2.10).

$$d_1^{1,0}: \bigoplus H^0(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}, Q_l) \rightarrow H^0(\mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/3}, Q_l) \\ (a_{01}, a_{12}, a_{20}) \mapsto (a_{01} - a_{12} + a_{20})_{P_j}.$$

Offenbar ist $\dim \text{Ker } d_1^{1,0} = 2n$. Andererseits ist

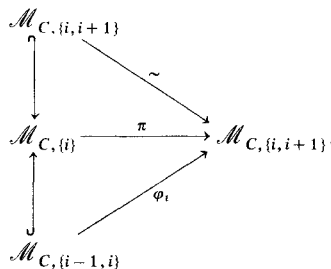
$$\dim \text{Im } d_1^{0,0} = \dim E_1^{0,0} - \dim E_2^{0,0} = 3n - n = 2n.$$

Folglich verschwindet $E_2^{1,0}$, wie behauptet.

b) Um die 1. Zeile zu rechtfertigen, identifizieren wir den Homomorphismus $d^{0,1}$ mit dem Čech-Restriktionshomomorphismus:

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/3} H^1(\mathcal{M}_{C,\{i\}}, Q_l) \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/3} H^1(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}, Q_l).$$

Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm, in dem φ_i ein rein inseparabler Morphismus vom Grad p ist (Satz 4.4(ii)):



Aus der Leray-Spektralsequenz bzgl. des Morphismus π folgte, daß die Einschränkungabbildung von $H^1(\mathcal{M}_{C,\{i\}}, Q_l)$ nach $H^1(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}, Q_l)$ ein Isomorphismus ist (siehe b) im Beweis von Lemma 5.1). Wir identifizieren die beiden Kohomologiegruppen auf diese Weise. Jetzt benutzen wir zusätzlich die Morphismen φ_i , um die Kohomologiegruppen $H^1(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}, Q_l)$ alle mit $H^1(\mathcal{M}_{C,\{0,1\}}, Q_l)$ zu identifizieren:

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{M}_{C,\{i\}}, Q_l) &\xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}, Q_l) \xrightarrow{\varphi_i^*} H^1(\mathcal{M}_{C,\{i-1,i\}}, Q_l) \\ &\xrightarrow{\varphi_{i-1}^*} \dots \rightarrow H^1(\mathcal{M}_{C,\{0,1\}}, Q_l). \end{aligned}$$

Weil $\varphi_0 \varphi_2 \varphi_1: \mathcal{M}_{C,\{0,1\}} \rightarrow \mathcal{M}_{C,\{0,1\}}$ ein rein inseparabler Morphismus vom Grad p^3 einer glatten Kurve auf sich ist, können wir ihn mit dem Frobeniusmorphismus Fr von $\mathbb{F}_{p^3}$ identifizieren. Die 1. Zeile kann man jetzt folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \bigoplus H^1(\mathcal{M}_{C,\{0,1\}}, Q_l) &\rightarrow \bigoplus H^1(\mathcal{M}_{C,\{0,1\}}, Q_l) \\ (a_0, a_1, a_2) &\rightarrow (a_0 - a_1, a_1 - a_2, a_2 - Fr^*(a_0)). \end{aligned}$$

Weil 1 kein Eigenwert des Frobenius ist, erhalten wir $E_2^{0,1} = E_2^{1,1} = 0$.

c) Aus dem Hauptsatz in § 2 und dem Verschwinden von $E_2^{1,0}$ schließen wir, daß $E_2^{-1,2} = 0$. Wir haben erhalten, daß alle E_2 -Terme vom Totalgewicht 1 verschwinden. Poincaré-Dualität in der Kohomologie der allgemeinen Faser zeigt jetzt, daß alle E_2 -Terme von Totalgewicht 3 verschwinden. (Das kann man selbstverständlich auch direkt beweisen.) Wir bemerken, daß $E_2^{0,4} = Q_l(-2)^n$. Jetzt folgen aus einer Betrachtung der Euler-Poincaré-Charakteristiken der einzelnen Zeilen die restlichen gesuchten Dimensionen. Q.E.D.

Wir wollen die erhaltenen Ergebnisse so formulieren, daß der lokale Faktor der Zetafunktion aus ihnen abgelesen werden kann. Wir verwenden die Bezeichnungen von 1.10. Es sei $W(\bar{\eta}/\eta_0) \subset \text{Gal}(\bar{\eta}/\eta_0)$ die Weilgruppe; es sei $W(\eta_{il}/\eta_0) \subset \text{Gal}(\eta_{il}/\eta_0)$ die l -zahme Weilgruppe. Wir haben exakte Sequenzen

$$1 \rightarrow I \rightarrow W(\bar{\eta}/\eta_0) \rightarrow \sigma^{\mathbb{Z}} \rightarrow 1.$$

$$1 \rightarrow G \rightarrow W(\bar{\eta}_{il}/\eta_0) \rightarrow \sigma^{\mathbb{Z}} \rightarrow 1.$$

Der Wahl einer Liftung $\sigma \in W(\eta_{il}/\eta_0)$ des geometrischen Frobenius entspricht ein Isomorphismus $W(\eta_{il}/\eta_0) = G \rtimes \mathbb{Z}$. Es sei (ρ, V) eine $\bar{Q}_l$ -Darstellung von $W(\bar{\eta}/\eta_0)$ (siehe [37] für die genaue Definition). Die zugehörige L -Funktion ist

$$L(V, T) = \det(1 - T \cdot \sigma | V^I)^{-1} \in \bar{Q}_l(T).$$

Offenbar hängt sie lediglich von der Darstellung von $W(\eta_{il}/\eta_0)$ auf V^p ab. Es ist üblich, die Substitution $T = q^{-s}$ durchzuführen. Wir verwenden die fette Weilgruppe ([21])

$$\mathfrak{W}(\bar{\eta}/\eta_0) = SL(2, \mathbb{C}) \times W(\bar{\eta}/\eta_0).$$

Wir fixieren einen Isomorphismus $\iota: \bar{Q}_l \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ (vergl. die diesbezüglichen Bemerkungen in [9]). Wir wählen einen Isomorphismus $G \simeq \mathbb{Z}_l$ und die Liftung

von σ in $W(\eta_{il}/\eta_0)$. Wir schreiben den erhaltenen Isomorphismus $W(\eta_{il}/\eta_0) \simeq \mathbb{Z}_l \rtimes \mathbb{Z}$ in folgender Form: $w \mapsto (x(w), -\log_q |w|)$. Wir erhalten die Einbettung

$$j: W(\eta_{il}/\eta_0) \rightarrow \mathfrak{B}(\eta_{il}/\eta_0) = SL(2, \mathbb{C}) \times W(\eta_{il}/\eta_0)$$

$$w \mapsto \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & \iota x(w) \\ 0 & |w|^{-1/2} \end{pmatrix} \times w.$$

Es sei (ρ, V) eine $\bar{Q}_l$ -Darstellung von $W(\eta_{il}/\eta_0)$. Mittels ι erhalten wir eine Darstellung in komplexen Matrizen $\iota(\rho)$. Diese Darstellung läßt sich in der Form $\iota(\rho) = \tilde{\rho} \circ j$ schreiben, wobei $\tilde{\rho}$ eine komplexe Darstellung von $\mathfrak{B}(\eta_{il}/\eta_0)$ ist, deren Einschränkung auf den $SL(2, \mathbb{C})$ -Faktor komplex-analytisch ist und deren Einschränkung auf den $W(\eta_{il}/\eta_0)$ -Faktor einen Kern von endlichem Index in G hat. Dabei ist $\tilde{\rho}$ bis auf Äquivalenz lediglich von der Wahl von ι abhängig. Die L -Funktion von ρ hängt nur von $\tilde{\rho}$, und sogar nur von der assoziierten halbeinfachen Darstellung ab. Es bezeichne $\rho_i (i=0, 1, 2, \dots)$ die irreduzible Darstellung der Dimension $i+1$ von $SL(2, \mathbb{C})$. Es sei $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p), C^p)$ die Heckealgebra (mit Koeffizienten aus $\bar{Q}_l$). Sie operiert in natürlicher Weise auf der Kohomologie von $\mathcal{M}_C$.

5.3 Satz. Die Doppeldarstellung von $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p), C^p) \times W(K_{\mathbb{A}_{2,1}}/K_{\mathbb{A}_2})$ auf $H^2(\mathcal{M}_C \otimes K_{\mathbb{A}_{2,1}}, \bar{Q})$ ist „gleich“ (d.h. hat als Bild in der entsprechenden Grothendieckgruppe)

$$1 \otimes \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))(-1) +$$

$$\rho_2 \otimes \mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/3})(-1) - \rho_2 \otimes \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))(-1).$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))$ die Doppeldarstellung, die durch den Vektorraum der $(\bar{Q}_l$ -wertigen) Funktionen auf $\pi_0(\mathcal{M}_C \otimes O_{K_{\mathbb{A}_2}}/pO_{K_{\mathbb{A}_2}})$ geliefert wird. Entsprechend ist $\mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/3})$ zu verstehen.

Beweis. Das ist eine unmittelbare Folgerung aus Proposition 5.2 (und deren Beweis) und 2.13.

Genauso folgt aus 5.2 mit 2.25.

5.4 Satz. $H^1(M_{G,C}; Q) = 0$.

5.5 Bemerkung. Wir haben hier 5.4 über die Auswertung der Steenbrinck-spektralsequenz in der Primstelle $\mathbb{A}_2$ bewiesen. Man kann auch die Auswertung in $\mathbb{A}_1$ benutzen, oder aber den jetzt schon bewiesenen Satz zur Vereinfachung der Auswertung in $\mathbb{A}_1$ verwenden. Man kann schließlich auch das Argument von Mumford [27] und Mustafin [28] auf die in der Primstelle $\mathbb{A}_1$ vorliegende Situation anwenden und so zeigen, daß $\text{Pic}^0(\mathcal{M}_C \otimes K_{\mathbb{A}_1}) = 0$. Der Satz ist die Bestätigung in einem Spezialfall (und der Ausgangspunkt) einer allgemeinen Vermutung über die Kohomologie unitärer Gruppen (s.a. [26]).

Wir werten jetzt die Steenbrinckspektralsequenz an der Primstelle $\mathbb{A}_1$ aus.

5.6 Lemma. Die E_1 -Schicht der Steenbrinck-Spektralsequenz (mit Koeffizienten in Q_l) bzgl. des Strukturmorphismus $\mathcal{M}_C \otimes O_{K_{\mathbb{A}_1}} \rightarrow \text{Spec}(O_{K_{\mathbb{A}_1}})$ hat folgende Ge-

Hierbei bedeuten:

$$n = \text{card } \pi_0(\mathcal{M}_C \otimes \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}_1}} / p \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}_1}}) \\ \chi = (\sum n_i) - (\sum n_{i,i+1}) + n_{0,1,2}.$$

Die Spektralsequenz degeneriert im E_2 -Niveau: $E_2 = E_\infty$.

Beweis: Die Ausartung der Spektralsequenz ist klar aus Gewichtsgründen.

a) Wir identifizieren $d^{0,0}$ und $d^{1,0}$ mit dem Čech-Homomorphismus

$$\bigoplus_i H^0(\mathcal{M}_{C,\{i\}}, Q_l) \rightarrow \bigoplus_i H^0(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}, Q_l) \rightarrow H^0(\mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/3}, Q).$$

Wegen 4.3 (iii), (iv), (v) können wir diesen Komplex mit dem folgenden Čech-Komplex (mit Koeffizienten in Q_l) identifizieren:

$$\bigoplus_i \mathcal{F}(G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f^p) / C_-^p \cdot C_{-p}^i) \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{F}(G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f) / C_-^p \cdot C_{-p}^{i,i+1}) \\ \rightarrow \mathcal{F}(G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f) / C_-^p \cdot C_{-p}^{\mathbb{Z}/3}).$$

Wir zeigen, daß die 1. Kohomologiegruppe dieses Komplexes verschwindet; daraus erhält man unmittelbar die übrigen Terme der 0. Zeile. Man überzeugt sich leicht, daß der obige Komplex eine endliche direkte Summe der simplizialen Kokettenkomplexe (mit Koeffizienten in Q_l) von simplizialen Komplexen der Form $Y = \mathcal{X} / \Gamma$ ist. Hier ist $\mathcal{X}$ der Bruhat-Tits-Komplex und $\Gamma \subset PGL(3, \mathbb{Q}_p)$ eine diskrete torsionsfreie kokompakte Untergruppe. Weil $\mathcal{X}$ kontrahierbar ist, degeneriert die Hochschild-Serre-Spektralsequenz, so daß $H^i(Y, Q_l) = H^i(\Gamma, Q_l)$. Aus dem Satz von Kazhdan [16] folgt, daß $H^1(\Gamma, Q_l) = 0$.

b) Aus 2.13 folgt jetzt, daß $E_2^{-1,2} = 0$. Alle übrigen Terme bestimmen sich aus den schon berechneten Gliedern wie im Beweis von 5.2. Q.E.D.

Wir formulieren die erhaltenen Ergebnisse wie in 5.3.

5.8 Satz. Die Doppeldarstellung von $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p), C^p) \times W(K_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{c}} / K_{\mathfrak{p}_1})$ auf $H^2(\mathcal{M}_C \otimes K_{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{c}}, \bar{Q}_l)$ „ist gleich“

$$1 \otimes \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))(-1) \\ + \rho_2 \otimes \mathcal{F}\left(\bigcup_i \pi_0(\mathcal{M}_{C,\{i\}})\right)(-1) \\ - \rho_2 \otimes \mathcal{F}\left(\bigcup_i \pi_0(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}})\right)(-1) \\ + \rho_2 \otimes \mathcal{F}(\mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/3})(-1) \\ - \rho_2 \otimes \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))(-1).$$

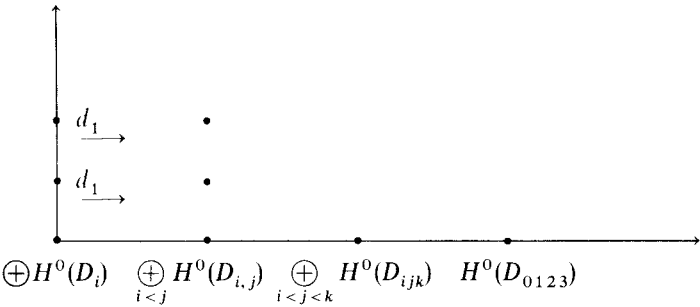
Klasse B. In diesem Fall benutzen wir die Spektralsequenz der verschwindenden Zyklen. Wir berechnen zunächst die Kohomologie der speziellen Faser. Wir verwenden die Überdeckung $D_i = \mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}$ der speziellen Faser durch abgeschlossene Unterschemata. Für ein Simplex $i_0, \dots, i_p$ des Nerts $\mathfrak{M}$ der Überdeckung sei $D_{i_0 \dots i_p} = D_{i_0} \cap \dots \cap D_{i_p}$. Wir betrachten die zur Überdeckung gehörige Spektralsequenz

$$E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{M}, H^q(D_{i_0 \dots i_p}, Q_l)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{M}_C \otimes \bar{\mathbb{F}}_p, Q_l).$$

Der Nerv der Überdeckung ist

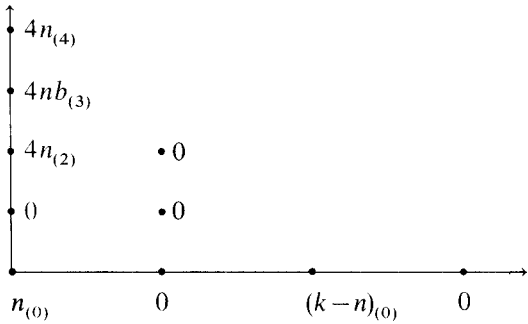
$$\begin{aligned} D_{01} &= \mathcal{M}_{C,\{0,1,2\}}, & D_{12} &= \mathcal{M}_{C,\{1,2,3\}}, & D_{23} &= \mathcal{M}_{C,\{2,3,0\}}, & D_{30} &= \mathcal{M}_{C,\{3,0,1\}}, \\ D_{02} &= D_{13} = \mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/4}, \\ D_{012} &= D_{123} = D_{230} = D_{301} = \mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/4}, \\ D_{0123} &= \mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/4}. \end{aligned}$$

Wir tragen die nichtverschwindenden Terme der E_1 -Schicht der Spektralsequenz in ein Diagramm ein (wir rechnen mit alternierenden Koketten):



Da die Absolutbeträge der Eigenwerte des Frobenius auf den verschiedenen Zeilen verschieden sind, degeneriert die Spektralsequenz in der zweiten Schicht.

5.9 Lemma. *Die E_2 -Schicht der Spektralsequenz hat die folgende Gestalt:*



Hierbei bedeuten:

- $n = \text{card } \pi_0(\mathcal{M}_C \otimes \mathbb{F}_p)$
- $k = \text{card } \mathcal{M}_{C,\mathbb{Z}/4}(\overline{\mathbb{F}}_p)$
- $b = \text{gemeinsame Bettizahl der irreduziblen Komponenten von } \mathcal{M}_{C,\{i,i+1,i+2\}}.$

Beweis: a) Die unterste Zeile von E_1^{pq} lautet:

$$(5.9.1) \quad \begin{array}{ccccccc} \oplus H^0(D_i) & \rightarrow & \oplus H^0(D_{i,j}) & \rightarrow & \oplus H^0(D_{i,j,k}) & \rightarrow & H^0(D_{0123}) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ Q_i^{+n} & \rightarrow & Q_i^{4n} \oplus Q_i^{2k} & \rightarrow & Q_i^{+k} & \rightarrow & Q_i^k. \end{array}$$

Wir zeigen, daß die erste Kohomologiegruppe dieses Komplexes verschwindet. Es sei

$$(c_{i,i+1}, b'_{0,2}, b'_{1,3}) \in Q_l^{4n} \otimes Q_l^k \oplus Q_l^k, \quad i \in \mathbb{Z}/4,$$

ein Kozyklus. Dann ist, für $r=1, \dots, k$,

$$c_{0,1} - b'_{0,2} + c_{1,2} = 0 \quad \text{und} \quad c_{3,0} - b'_{0,2} + c_{2,3} = 0.$$

Folglich ist $c_{0,1} + c_{1,2} = c_{3,0} + c_{2,3}$. Somit finden wir $a_i \in Q_l^n$, $i \in \mathbb{Z}/4$, so daß $c_{i,i+1} = a_i - a_{i+1}$. Dann gilt $a_0 - a_2 = c_{0,1} + c_{1,2} = b'_{0,2}$ und analog $a_1 - a_3 = b'_{1,3}$. Weil andererseits offenbar die 3. Kohomologiegruppe des betrachteten Komplexes verschwindet, berechnen sich die übrigen Terme aus einer Betrachtung der Euler-Poincaré-Charakteristik.

b) Die erste Zeile von E_1^{pq} lautet

$$\bigoplus H^1(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}, Q_l) \rightarrow \bigoplus H^1(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1,i+2\}}, Q_l).$$

Eine fast wortwörtliche Wiederholung des im Beweis von 5.2 b) verwendeten Arguments zeigt, daß $E^{*,1} = 0$. (An Stelle von 4.2 (ii) wird 4.5 (ii) benutzt.)

c) Es bleibt der Pfeil

$$\bigoplus H^2(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}) \rightarrow \bigoplus H^2(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1,i+2\}})$$

zu betrachten. Auf einer Zusammenhangskomponente $\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}^k$ von $\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}$ liegen die Kurven $\mathcal{M}_{C,\{i,i+1,i+2\}}^k$ und $\mathcal{M}_{C,\{i-1,i,i+1\}}^k$, deren Kohomologieklassen wir mit $d_{i+1}^{i,k}$ und $d_{i-1}^{i,k}$ bezeichnen. Es sei $f^{i,k}$ die Kohomologieklass einer Faser bei der Projektion $\pi: \mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}^k \rightarrow \mathcal{M}_{C,\{i,i+1,i+2\}}^k$. Dann ist

$$H^2(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}^k, Q_l) \simeq Q_l \cdot d_{i+1}^{i,k} \oplus Q_l \cdot f^{i,k},$$

$$(d_{i+1}^{i,k}, f^{i,k}) = 1, \quad (d_{i-1}^{i,k}, f^{i,k}) = p, \quad (d_{i+1}^{i,k}, d_{i-1}^{i,k}) = m_i^k, \quad (d_{i+1}^{i,k}, d_{i+1}^{i,k}) = n_i^k$$

für gewisse Konstanten m_i^k und n_i^k .

Der obige Pfeil sieht folgendermaßen aus:

$$(5.9.2) \quad \bigoplus H^2(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1\}}) \rightarrow \bigoplus H^2(\mathcal{M}_{C,\{i,i+1,i+2\}})$$

$$x_i^k d_{i+1}^{i,k} + y_i^k \cdot f^{i,k} \mapsto x_i^k \cdot n_i^k + y_i^k - x_{i+1}^k \cdot m_i^k - y_{i+1}^k \cdot p$$

($k=1, \dots, n$). Hier sind $x_i^k, y_i^k \in Q_l$. Diese Abbildung bleibt sogar surjektiv, wenn man sie auf den Unterraum $x_i^k = 0$ einschränkt. Es folgt $E_{1,2}^{*,2} = 0$. Die Betrachtung der Euler-Poincaré-Charakteristik des Komplexes liefert die Behauptung für $E_2^{2,0}$. Q.E.D.

Wir können jetzt die Spektralsequenz der verschwindenden Zyklen für den Strukturmorphismus $\mathcal{M}_C \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ auswerten. Dazu bemerken wir, daß dies offenbar lokal ein Produkt von gewöhnlichen Doppelpunkten ist. Es sei F' die unverzweigte quadratische Erweiterung von F_p . Dann ist die Bedingung (PgD) des § 3 für den Morphismus $\mathcal{M}_C \otimes_{O_F} \rightarrow \text{Spec}(O_{F'})$ erfüllt.

5.10 Lemma. Die Garben der verschwindenden Zyklen für den Morphismus $\mathcal{M}_C \otimes_{O_F} \rightarrow \text{Spec}(O_F)$ berechnen sich wie folgt:

$$R^0 \Psi = \mathcal{Q}_{|\mathcal{M}_C \otimes_{O_F} / p O_F|}$$

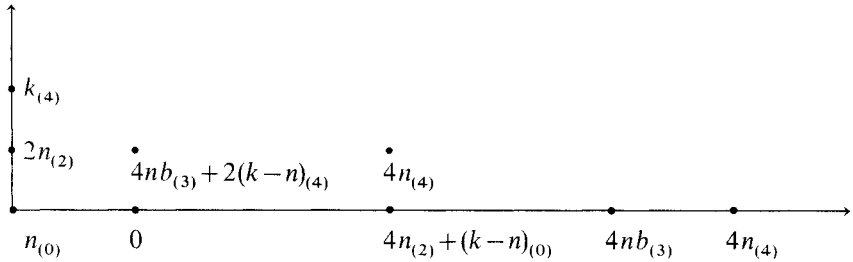
$$R^1 \Psi = \mathcal{Q}_I(-1)_{\mathcal{M}_C, \{0, 1, 2\} \cup \mathcal{M}_C, \{2, 3, 0\}} \oplus \mathcal{Q}_I(-1)_{\mathcal{M}_C, \{1, 2, 3\} \cup \mathcal{M}_C, \{3, 0, 1\}}$$

$$R^2 \Psi = \mathcal{Q}_I(-2)_{\mathcal{M}_C, \mathbb{Z}/4}$$

$$R^i \Psi = 0 \quad \text{für } i > 2.$$

Beweis. Die Behauptung bzgl. $R^0 \Psi$ ist klar, weil die spezielle Faser reduziert ist (SGA 7, I). Die Berechnung von $R^1 \Psi$ folgt unmittelbar aus 3.11 und die übrigen Behauptungen resultieren aus 3.7.

5.11 Lemma. Die E_2 -Schicht der Spektralsequenz der verschwindenden Zyklen für den Morphismus $\mathcal{M}_C \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ hat folgende Gestalt:



Beweis. Die unterste Zeile folgt aus 5.9 und die zweite Zeile ist offensichtlich wegen 5.10. Wir berechnen die Kohomologie von $\mathcal{M}_C, \{0, 1, 2\} \cup \mathcal{M}_C, \{2, 3, 0\}$ mittels der Überdeckung durch $\mathcal{M}_C, \{0, 1, 2\}$ und $\mathcal{M}_C, \{2, 3, 0\}$. Das Resultat ist:

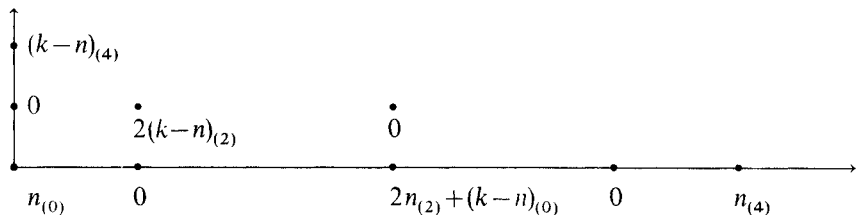
$$\dim H^0(\mathcal{M}_C, \{0, 1, 2\} \cup \mathcal{M}_C, \{2, 3, 0\}, \mathcal{Q}_I) = n,$$

$$\dim H^1(\mathcal{M}_C, \{0, 1, 2\} \cup \mathcal{M}_C, \{2, 3, 0\}, \mathcal{Q}_I) = 2nb + (k-n),$$

$$\dim H^2(\mathcal{M}_C, \{0, 1, 2\} \cup \mathcal{M}_C, \{2, 3, 0\}, \mathcal{Q}_I) = 2n.$$

Das Frobeniusselement in $\text{Gal}(Q_p/Q_p)$ transformiert $\mathcal{M}_C, \{0, 1, 2\} \cup \mathcal{M}_C, \{2, 3, 0\}$ in $\mathcal{M}_C, \{1, 2, 3\} \cup \mathcal{M}_C, \{3, 0, 1\}$. Wegen des in 5.10 erhaltenen Ausdrucks für $R^1 \Psi$ erhalten wir daher die angegebenen Werte für $E_2^{*,1}$.

5.12 Proposition. Die E_3 -Schicht der Spektralsequenz der verschwindenden Zyklen hat folgende Gestalt:



Die Spektralsequenz degeneriert in E_3 -Niveau: $E_3 = E_\infty$.

Beweis. Die Ausartung ist klar aus Gewichtsgründen. Daher kennen wir bereits die Terme $E_2^{0,0}$ und $E_2^{4,0}$. Aus der Poincaré-Dualität in der allgemeinen Faser folgern wir, daß $E_2^{0,1} = E_2^{2,1} = E_2^{3,0} = 0$ (keine komplementären Gewichte). Jetzt läßt sich das Diagramm ohne Schwierigkeiten auffüllen.

Wir wollen die Kohomologie der allgemeinen Faser als Galoismodul beschreiben. Im Gegensatz zu 5.3 und 5.8 geht dies nicht unmittelbar aus der obigen Rechnung hervor. Deshalb müssen wir diese Rechnung noch einmal genauer durchgehen.

5.13 Satz. Die Doppeldarstellung von $\mathcal{H}(D^\times(\mathbb{A}_f^p), C^p) \times W(Q_{p,il}/Q_p)$ auf $H^2(\mathcal{M}_C \otimes Q_{p,il}, \bar{Q}_l)$ ist gleich

$$\begin{aligned} & 1 \otimes \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p); \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)))(-1) \\ & + 1 \otimes \mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4}) \cdot v_{F_p/Q_p}(-1) - 1 \otimes \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)) \cdot v_{F_p/Q_p}(-1) \\ & + \rho_2 \otimes \mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4})(-1) - \rho_2 \otimes \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))(-1). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet v_{F_p/Q_p} den Charakter von $\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p)$, der der Erweiterung F_p von Q_p mittels Klassenkörpertheorie entspricht.

Beweis. a) Um den Term $E_2^{2,0}$ der Spektralsequenz der verschwindenden Zyklen zu beschreiben, interpretieren wir die in 5.9 durchgeführte Rechnung. Die abgeschlossenen Unterschemata $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}$ von $\mathcal{M}_C \otimes \mathbb{F}_{p^4}$ werden durch das Frobeniusselement aus $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^4}/\mathbb{F}_p)$ zyklisch permutiert. Es gibt eine kanonische eindeutige Abbildung zwischen $\pi_0(\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}})$ und $\pi_0(\mathcal{M}_C)$. Eine 0-Kokette vom Komplex 5.9.1 ordnet einem 0-Simplex $i_0 \in \mathfrak{M}$ ein Element $c_{i_0} = \sum_{\kappa \in \pi_0} a_\kappa(i_0) \cdot \kappa \in \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))$ zu und ein Element $g \in \text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p)$ operiert folgendermaßen

$$(gc)_{i_0} = \sum_{\kappa} a_{g\kappa}(gi_0) \cdot \kappa.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \oplus H^0(D_i) &= \oplus H^0(\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}, Q_l) \\ &= \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F'); \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))) \\ &= \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)) \oplus \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)) \cdot v_{F'/Q_p} \\ &\quad \oplus \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)) \cdot v_{F'/Q_p}^2 \oplus \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)) \cdot v_{F'/Q_p}^3. \end{aligned}$$

Hierbei ist v_{F'/Q_p} der zu F' gehörige Charakter von $\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p)$.

Offenbar ist $\oplus H^0(D_{i, i+1}) \subset \oplus H^0(D_{i, j})$ stabil unter $\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p)$. Wie eben sieht man, daß

$$\oplus H^0(D_{i, i+1}) = \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F'); \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))).$$

Es sei c eine 1-Kokette. Dann ist $c_{i, i+2} \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4})$ und falls $\sigma \in \text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p)$ ein Frobeniusselement bezeichnet,

$$(\sigma c)_{02} = \sigma \cdot c_{13}; \quad (\sigma c)_{13} = \sigma \cdot c_{20} = -\sigma \cdot c_{02},$$

weil wir mit alternierenden Kozykeln rechnen. Hierbei bedeutet der Punkt die natürliche Aktion von σ auf $\mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4})$. Somit ist

$$H^0(D_{0,2}) \oplus H^0(D_{1,3}) = \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p); \mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4})) \cdot v_{F'/Q_p}.$$

Entsprechend erhalten wir für die von den 2-Koketten und 3-Koketten gebildeten Moduln die folgenden Ausdrücke.

$$\begin{aligned} \oplus H^0(D_{ijk}) &= \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F'); \mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4})) \\ H^0(D_{0,1,2,3}) &= \mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4}) \cdot v_{F'/Q_p}. \end{aligned}$$

Die 0. Kohomologiegruppe vom Komplex (5.9.1) ist offenbar $\mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))$ und die 1. und 3. Kohomologiegruppen verschwinden. Eine Betrachtung der Euler-Poincaré-Charakteristik in der Grothendieckgruppe der zulässigen $\mathcal{H}(D^\times(\mathbb{A}_f^p), C^p) \times \text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p)$ -Darstellungen zeigt daher, daß der Untermodul vom Gewicht 0 von $E_2^{2,0}$ isomorph zu $\mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4}) - \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))$ ist.

Der Untermodul vom Gewicht 2 von $E_2^{2,0}$ ist die 1. Kohomologiegruppe vom Komplex (5.9.2). Wie eben erhält man für ihn folgenden Ausdruck:

$$\text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F'); \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)))(-1).$$

b) Um den Term $E_2^{0,1}$ kanonisch zu beschreiben, benutzen wir die Ergebnisse des §3. Die Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p)$ operiert auf $\mathcal{M}_{C, \{0,1,2\}} \cup \mathcal{M}_{C, \{2,3,0\}}$. Wir erhalten einen Isomorphismus von $\mathcal{H}(D^\times(\mathbb{A}_f^p), C^p) \times \text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p)$ -Moduln

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)) \cdot v_{F'/F_p}(-1) &\rightarrow H^0(\mathcal{M}_{C, \{0,1,2\}} \cup \mathcal{M}_{C, \{2,3,0\}}, Q_l(-1)) \\ \sum a_\kappa \kappa &\mapsto \sum a_\kappa \cdot \lambda_2^{0,0}(\kappa). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\lambda_2^{0,0}(\kappa)$ den Wert der Fundamentalklasse in der zu κ gehörigen Zusammenhangskomponente. Ein Frobeniuselement aus $\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p)$ vertauscht $\mathcal{M}_{C, \{0,1,2\}} \cup \mathcal{M}_{C, \{2,3,0\}}$ und $\mathcal{M}_{C, \{1,2,3\}} \cup \mathcal{M}_{C, \{3,0,1\}}$. Aus 5.10 folgt daher

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{M}_C \otimes \bar{\mathbb{F}}_p, R^1 \Psi) \\ = \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p); \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)) \cdot v_{F'/F_p})(-1). \end{aligned}$$

Zusammen mit dem Ergebnis in a) bekommen wir folgenden Ausdruck für den Untermodul vom Gewicht 2 in $E_3^{2,0}$:

$$\text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p); \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)))(-1).$$

c) Wir betrachten den folgenden Komplex

$$H^0(\mathcal{M}_{C, \{0,1,2\}}, Q_l(-1)) \oplus H^0(\mathcal{M}_{C, \{2,3,0\}}, Q_l(-1)) \rightarrow H^0(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4}, Q_l(-1)).$$

Seine 0. Kohomologiegruppe, aufgefaßt als $\mathcal{H}(D^\times(\mathbb{A}_f^p), C^p) \times \text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p)$ -Modul, wurde in b) bestimmt. Die 1. Kohomologiegruppe ergibt sich daher leicht aus einer Betrachtung der Euler-Poincaré-Charakteristik zu $\mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4})(-1) - \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))(-1)$. Nach der in 5.11 durchgeführten Rechnung ist der Untermodul vom Gewicht 4 von $E_2^{1,1}$ somit

$$\begin{aligned} & \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p); \mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4}) - \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)))(-1) \\ &= (\mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4}) - \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C)))(-1) + (\mathcal{F}(\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4}) - \mathcal{F}(\pi_0(\mathcal{M}_C))) \cdot v_{F_p/Q_p}(-1). \end{aligned}$$

Wir haben jetzt alle Glieder E_3^q als $\mathcal{H}(D^\times(\mathbb{A}_F^p), C^p) \times \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$ -Moduln bestimmt. Die Behauptung des Satzes folgte, wenn wir wüßten, daß die Monodromiefiltration rein ist. Das folgt aus 2.13 und dem folgenden Hilfssatz.

5.14 Lemma. *Es sei $\tilde{\mathcal{M}}_C$ die Aufblasung von $\mathcal{M}_C \otimes \mathcal{O}_{F^*}$ in $\mathcal{M}_{C, \{0, 1\}}$. Dann genügt der Strukturmorphismus $\tilde{\mathcal{M}}_C \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{F^*}$ den Bedingungen von 2.2 und alle auftretenden Multiplizitäten e_i sind gleich 1.*

Beweis. Weil $\mathcal{M}_{C, \{0, 1\}}$ außerhalb $\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4}$ ein Divisor ist, ist der Aufblasungsmorphismus $\varphi: \tilde{\mathcal{M}}_C \rightarrow \mathcal{M}_C \otimes \mathcal{O}_{F^*}$ außerhalb von $\mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4}$ ein Isomorphismus. Wir rechnen nach, wie φ lokal für die Etaltopologie über einem Punkt $x \in \mathcal{M}_{C, \mathbb{Z}/4}$ aussieht. Es gibt eine Etalumgebung U von x und einen Etalmorphismus

$$\mu: U \rightarrow \text{Spec } \tilde{\mathbb{Z}}_p[x^{(0)}, x^{(1)}; y^{(0)}, y^{(1)}]/x^{(0)} \cdot x^{(1)} = y^{(0)} \cdot y^{(1)} = \pi,$$

wobei $\tilde{\mathbb{Z}}_p$ die strikte Henselisierung von $\mathbb{Z}_p$ ist. Die abgeschlossenen Unterschemata $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}$ sind durch die folgenden Gleichungen definiert.

$$\mathcal{M}_{C, \{0, 1\}}: x^{(0)} = y^{(0)} = 0, \quad \mathcal{M}_{C, \{1, 2\}}: x^{(1)} = y^{(0)} = 0,$$

$$\mathcal{M}_{C, \{2, 3\}}: x^{(1)} = y^{(1)} = 0, \quad \mathcal{M}_{C, \{3, 0\}}: x^{(0)} = y^{(1)} = 0.$$

Der Faserproduktmorphismus $\varphi_U: \tilde{U} = \tilde{\mathcal{M}}_C \times_{\mathcal{M}_C \otimes \mathcal{O}_{F^*}} U \rightarrow U$ hat lokal folgende Gestalt. Man hat eine affine Überdeckung $\tilde{U} = \tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2$, wobei

$$\tilde{U}_1 = \text{Spec}(\tilde{\mathbb{Z}}_p[x^{(0)}, u, y^{(1)}]/x^{(0)} \cdot u \cdot y^{(1)} - \pi),$$

$$\tilde{U}_2 = \text{Spec}(\tilde{\mathbb{Z}}_p[x^{(1)}, v, y^{(0)}]/x^{(1)} \cdot v \cdot y^{(0)} - \pi).$$

Dabei ist φ_U folgendermaßen gegeben:

$$\varphi_U|_{\tilde{U}_1}: x^{(1)} \mapsto u \cdot y^{(1)}, \quad y^{(0)} \mapsto u \cdot x^{(0)},$$

$$\varphi_U|_{\tilde{U}_2}: x^{(0)} \mapsto v \cdot y^{(0)}, \quad y^{(1)} \mapsto v \cdot x^{(1)}.$$

Aus diesen Gleichungen folgen unmittelbar folgende Feststellungen. Es seien $\tilde{\mathcal{M}}_{C, \{i, i+1\}}$ die strengen Transformaten von $\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}$. Dann ist $\tilde{\mathcal{M}}_C \otimes \mathcal{O}_{F^*}/p \cdot \mathcal{O}_{F^*} = U \tilde{\mathcal{M}}_{C, \{i, i+1\}}$ und die $\tilde{\mathcal{M}}_{C, \{i, i+1\}}$ bilden einen reduzierten Divisor mit normalen Schnitten. Damit ist 5.14 bewiesen.

§ 6. Berechnung des lokalen Faktors der Zetafunktion

Das Ziel dieses § ist es, den lokalen Faktor der Zetafunktion als Produkt automorpher L -Funktionen auszudrücken. Wir wenden uns zunächst dem Fall A zu. Um den Satz formulieren zu können, schicken wir einige allgemeine Bemerkungen voraus.

Die Kohomologie der Shimuravarietät $M_{G,C}$ kann mit Hilfe der kontinuierlichen Kohomologie berechnet werden [3]:

$$H^i(M_{G,C}; \mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{\pi \in L^2(G(\mathbb{Q})Z(\mathbb{R}) \backslash G(\mathbb{A})) \\ \pi = \pi_\infty \otimes \pi_f}} m(\pi) \cdot H^i(\mathfrak{g}, C_\infty; \pi_\infty) \otimes \pi_f^C.$$

Hier bezeichnet $m(\pi)$ die Multiplizität, mit der π im Raum der automorphen Funktionen auftritt. Wir fassen die endlich vielen automorphen Darstellungen π mit äquivalentem $G(\mathbb{A}_f)$ -Anteil zu einer Menge Π zusammen. Die obige Summe schreibt sich als

$$\bigoplus_{\Pi} \left(\bigoplus_{\pi \in \Pi} m(\pi) \cdot H^i(\mathfrak{g}, C_\infty; \pi_\infty) \right) \otimes \Pi_f^C.$$

Die Projektion auf den Π entsprechenden Teilsummanden ist durch eine Linearkombination von Heckeoperatoren mit Koeffizienten aus $\bar{Q}$ vermittelt. Folglich kann eine solche Projektion bereits auf der Kohomologie mit Werten in $\bar{Q}$ definiert werden. Die Galoisgruppe $\text{Gal}(\bar{Q}/K)$ ($\bar{Q}$ = algebraischer Abschluß von Q in $\mathbb{C}$) operiert auf der Etalkohomologiegruppe $H^i(M_{G,C}; \bar{Q})$. Weil die Heckeoperatoren geometrisch definiert werden können, sind die eben beschriebenen Projektionen mit der Wirkung der Galoisgruppe vertauschbar. Folglich erhalten wir eine Darstellung von $\text{Gal}(\bar{Q}/K)$ auf

$$\left(\bigoplus_{\pi \in \Pi} m(\pi) \cdot H^i(\mathfrak{g}, C_\infty; \pi_\infty) \right) \otimes \Pi_f^C.$$

6.1 Lemma. *Diese Darstellung ist die direkte Summe von $\dim(\Pi_f^C)$ Darstellungen, die zueinander äquivalent sind.*

Beweis. Das folgt aus der Tatsache, daß die Aktion der Heckealgebra $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f), C)$ auf π_f^C irreduzibel ist (siehe [12]).

Wir bezeichnen die zu Π assoziierte Darstellung der Dimension $\sum_{\pi \in \Pi} m(\pi) \cdot \dim H^i(\mathfrak{g}, C_\infty, \pi_\infty)$ mit $\rho^i(\Pi)$. Wir zitieren aus [3] die folgende Tatsache:

6.2. Lemma. *Die irreduziblen zulässigen Darstellungen der Gruppe $G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}) = \text{PSU}(2,1)$, die Kohomologie liefern, sind die folgenden:*

- *die triviale Darstellung. Sie liefert einen 1-dimensionalen Beitrag in den Dimensionen 0, 2 und 4.*
- *die drei Darstellungen der diskreten Reihe mit trivialem infinitesimalem Charakter $\pi^{0,2}$, $\pi^{1,1}$, $\pi^{2,0}$. Diese liefern einen 1-dimensionalen Beitrag in der Dimension 2. Der obere Index gibt den Hodge-Typ der gelieferten Kohomologiekategorie an.*

- *zwei nicht-temperierte Darstellungen $\mathcal{J}_0$ und $\mathcal{J}_1$. Jede von ihnen liefert einen 1-dimensionalen Beitrag in den Dimensionen 1 und 3.*

Von jetzt ab ist wieder C von dem von uns spezifizierten Typ, insbesondere ist C_p maximal kompakt.

6.3 Korollar. *Es sei π eine automorphe Darstellung von $G(Q)Z(\mathbb{R}) \backslash G(\mathbb{A})$, die zur Kohomologie von $M_{G,C}$ beiträgt. Dann gibt es nur die folgenden beiden Möglichkeiten:*

a) π ist eindimensional. Dann ist π_∞ trivial und π identifiziert sich mittels des Homomorphismus $\kappa = \mu^{-1} \cdot \det: G(\mathbb{A}) \rightarrow K^\times(\mathbb{A})$ mit einem Charakter von $K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C)$. Der Charakter ist unverzweigt in den beiden Primstellen über p . Die Menge $\Pi(\pi)$ besteht aus nur einem Element und $m(\pi) = 1$.

b) π ist unendlichdimensional. Dann ist π_∞ in der diskreten Reihe und π_p ist von der Form $\pi_p = \chi_p \circ \kappa$ für einen unverzweigten Charakter χ_p von $K^\times(Q_p)$.

Beweis. Wir wissen bereits (5.4), daß $H^1(M_{G,C}; \mathbb{C}) = 0$. Folglich ist π_∞ trivial oder in der diskreten Reihe. Falls π_∞ trivial ist, so folgt aus einem Dichtigkeitsargument, daß π eindimensional ist. Der Homomorphismus κ ist surjektiv und hat als Kern die abgeleitete Gruppe von G [8]. Das Bild von C_p unter κ ist maximal kompakt in $K_p^\times$. Somit folgen die Behauptungen aus 6.2.

Wir erinnern an die Definition der Darstellung r der L -Gruppe ${}^L G = {}^L G^0 \times \text{Gal}(K/Q)$ (s. [21], p. 238). Dazu sei (T, h) ein spezieller Punkt der Shimuravarietät, d.h. T ist eine über Q definierte CSG von G und $h: \mathcal{S} \rightarrow T_{\mathbb{R}}$ ist in $G_{\mathbb{R}}$ zu h_0 konjugiert. Wir identifizieren $X^*(\mathcal{S})$ mit $\mathbb{Z}^2$ mittels der Charaktere $\alpha_1: z \rightarrow z, \alpha_2: z \rightarrow \bar{z}$ ($z \in \mathbb{C}^\times = \mathcal{S}(R)$). Genauer gesagt ist $X^*(\mathcal{S}) = \text{Ind}(\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}), 1; \mathbb{Z})$, die Gruppe der $\mathbb{Z}$ -wertigen Funktionen auf $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Dann ist

$$\alpha_1(1) = 1, \alpha_1(\tau) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_2(1) = 0, \alpha_2(\tau) = 1.$$

(τ = komplexe Konjugation.) Dann ist $\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ kanonisch mit $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ identifiziert und wir erhalten ein Kogewicht von $T_{\mathbb{C}}$ durch die Verkettung der folgenden Homomorphismen:

$$\mathbb{G}_m \xrightarrow{(1, \text{id})} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \xrightarrow{h\mathbb{C}} T_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}.$$

Wir wählen einen Isomorphismus des Gitters der Kogewichte $X_*(T)$ mit dem Gitter der Gewichte $X^*({}^L T^0)$; auf diese Weise erhalten wir ein Gewicht μ_h von ${}^L T^0$, dessen Bahn unter der Weylgruppe von ${}^L G^0$ wohldefiniert ist. Es sei r^0 die irreduzible Darstellung von ${}^L G^0$, deren Menge der extremen Gewichte diese Bahn ist. Die Darstellung r ist dann $r = \text{Ind}({}^L G, {}^L G^0; r^0)$.

Wir interessieren uns nur für die Stelle p . Wir wählen eine Einbettung $\bar{Q} \subset \bar{Q}_p$, die mittels der Einbettung $\sigma: K \rightarrow \bar{Q}$ die Primstelle $\not p_1$ von K über p auszeichnet. Die lokale L -Gruppe ${}^L G_p$ ist ${}^L G^0$ (genauer: kann so genommen werden). Folglich ist $r_p = r|_{{}^L G_p}$ von der Form $r_p = r_{\not p_1} \oplus r_{\not p_2}$, wobei $r_{\not p_1}$ Darstellungen von ${}^L G^0$ sind, mit $r_{\not p_1}(g) = r^0(g)$ und $r_{\not p_2}(g) = r^0(\tau g \tau^{-1})$ (τ = nichttriviales Element in $\text{Gal}(K/Q)$). Es sei ρ eine $\bar{Q}_l$ -Darstellung von $\text{Gal}(\bar{Q}/K)$. Wir bezeichnen mit $\rho_{\not p_1}$ die Einschränkung von ρ auf $\text{Gal}(\bar{Q}_p/K_{\not p_1})$. Wir erweitern den nichttrivialen Automorphismus von K auf $\bar{Q}$ und bezeichnen mit $\rho_{\not p_2}$ die Einschränkung von $\tau \rho \tau^{-1}$ auf $\text{Gal}(\bar{Q}_p/K_{\not p_2})$. Um die L -Funktion von ρ als Element von $\mathbb{C}(q^{-s})$ auffassen zu können, wählen wir einen Isomorphismus $\iota: \bar{Q}_l \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$.

Es sei G^* die quasizerfallende innere Form von G . Die L -Gruppen von G und G^* sind identisch. Offenbar ist $G/G_{\text{der}} = G^*/G_{\text{der}}^*$; folglich können wir eine 1-dimensionale automorphe Form, π , von G als automorphe Form, π^* , von G^* auffassen. Auf der rechten Seite des folgenden Satzes stehen automorphe L -Funktionen im Sinne von Langlands. Die lokalen Faktoren, deren Definition im allgemeinen problematisch sind [2], sind in dem hier betrachteten Fall bekannt (s.u.).

6.4 Satz. (i) Falls π eindimensional ist, so ist

$$\prod_{j=0}^2 L(s, \rho^{2j}(\pi)_{\rho_i}) = L(s-1, \pi_p^*, r_{\rho_i}) \quad i=1, 2.$$

(ii) a) Falls Π unendlichdimensional ist, so besteht Π aus 3 Elementen $\pi^{0,2} \otimes \pi_f$, $\pi^{1,1} \otimes \pi_f$, $\pi^{2,0} \otimes \pi_f$, deren Multiplizitäten alle gleich sind. Diese gemeinsame Zahl sei mit $m(\Pi)$ bezeichnet.¹

$$\text{b)} \quad L(s, \rho^2(\Pi)_{\rho_i}) = L(s-1, \pi_p, r_{\rho_i})^{m(\Pi)} \quad i=1, 2.$$

Nach den vorangehenden Bemerkungen liefert dieser Satz einen Ausdruck der lokalen Zetafunktion in ρ_i als Produkt lokaler automorpher L -Funktionen.

Bevor wir mit dem eigentlichen Beweis dieses Satzes beginnen, rechnen wir die rechten Seiten explizit aus. Die Surjektion $G \rightarrow G_{\text{ad}}$ definiert eine Einbettung der entsprechenden L -Gruppen ${}^L(G_{\text{ad}}) \subset {}^L G$. Wir können einen solchen Isomorphismus ${}^L(G_{\text{ad}})^0 = SL(3, \mathbb{C})$ finden, daß die Einschränkung von r^0 auf ${}^L(G_{\text{ad}})^0$ die natürliche Darstellung von $SL(3, \mathbb{C})$ ist. Die Galoisgruppe $\text{Gal}(K/Q)$ operiert folgendermaßen auf ${}^L(G_{\text{ad}})^0$:

$$A \mapsto \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \cdot {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}, \quad A \in SL(3, \mathbb{C}).$$

Für die lokale L -Gruppe $(G_{\text{ad}})_p = SL(3, \mathbb{C})$ erhalten wir:

$$(6.4.1) \quad \begin{aligned} r_{\rho_1} | SL(3, \mathbb{C}) &= \text{natürliche Darstellung} \\ r_{\rho_2} | SL(3, \mathbb{C}) &= \text{kontragrediente Darstellung.} \end{aligned}$$

Die Surjektion $\kappa: G \rightarrow R_{K/Q}(\mathbb{G}_m)$ definiert eine Einbettung von L -Gruppen ${}^L(R_{K/Q}(\mathbb{G}_m)) \subset {}^L G$. Die Einskomponente von ${}^L(R_{K/Q}(\mathbb{G}_m))$ ist ein Torus, dessen Gitter der Kogewichte mit $X^*(R_{K/Q}(\mathbb{G}_m)) = \text{Ind}(\text{Gal}(K/Q), 1; \mathbb{Z})$ identifiziert werden kann. Die Galoisgruppe operiert via $\alpha \rightarrow \tilde{\alpha}$ mit $\tilde{\alpha}(\tau_1) = \alpha(\tau \tau_1)$, $\tau_1 \in \text{Gal}(K/Q)$. Die fixierte Einbettung $\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}$ identifiziert $X^*(\mathcal{S})$ mit $X^*(R_{K/Q}(\mathbb{G}_m))$ und fixiert somit eine Basis $\{\beta_1, \beta_2\}$ des zweiten Moduls. Dual zu der Verkettung von Homomorphismen von Tori

$$(6.4.2) \quad \mathbb{G}_m \xrightarrow{(1, \text{id})} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m = \mathcal{S}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\kappa \circ h_{\mathbb{C}}} \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m = (R_{K/Q} \mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}}$$

¹ Es ist nicht ausgeschlossen, daß $m(\Pi)$ in Wirklichkeit gleich 1 ist.

ist der Homomorphismus auf den Charaktermoduln

$$(6.4.3) \quad X^*(R_{K/Q}(\mathbb{G}_m)) \rightarrow X^*(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

6.5 Lemma. *Das Bild von β_1 ist 1 und das Bild von β_2 ist 0.*

Beweis. Der Homomorphismus $\kappa_{\mathbb{R}} \circ h$ ist:

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & & \\ & \bar{z} & \\ & & \bar{z} \end{pmatrix} \mapsto \frac{z \cdot \bar{z}^2}{z \cdot \bar{z}} = \bar{z}. \quad \text{Q.E.D.}$$

Wir erhalten für die Einschränkung von r^0 auf ${}^L(R_{K/Q}(\mathbb{G}_m))^0 = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$:

$$r^0(z_1, z_2) = z_1.$$

Für die lokale L -Gruppe ${}^L(R_{K/Q}(\mathbb{G}_m))_p = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ erhalten wir somit

$$(6.5.1) \quad r_{\beta_1}(z_1, z_2) = z_1, \quad r_{\beta_2}(z_1, z_2) = z_2.$$

6.6 Korollar. *Wir benutzen die Bezeichnungen von 6.4.*

(i) *Es sei π eindimensional. Wir schreiben $\pi_p = \chi_p \circ \kappa$, mit einem Charakter $\chi_p = \chi_{\beta_1} \cdot \chi_{\beta_2}$ von $K^\times(Q_p)$. Die rechte Seite von 6.4(i) ist gleich*

$$L(s, \chi_{\beta_1}) \cdot L(s-1, \chi_{\beta_1}) \cdot L(s-2, \chi_{\beta_1}).$$

(Produkt von lokalen Faktoren von Heckschen L -Funktionen.)

(ii) *Es sei Π unendlichdimensional und $\pi_p = \chi_p \circ \kappa$. Die rechte Seite von 6.4 (ii) b) ist gleich $L(s, \chi_{\beta_1})^{m(\Pi)}$.*

Beweis. Sei zunächst $\pi_p = \pi_p^0 = \text{triv} \circ \kappa$ die triviale 1-dimensionale Darstellung. Das Funktorialitätsprinzip ordnet der Darstellung π_p^{0*} von $G_{\text{ad}}^*(Q_p)$ den folgenden Homomorphismus zu:

$$\begin{aligned} \varphi(\pi_p^{0*}): \mathfrak{WB}(\bar{Q}_p/Q_p) &= SL(2, \mathbb{C}) \times W(\bar{Q}_p/Q_p) \rightarrow {}^L(G_{\text{ad}}^*)_p^0 = SL(3, \mathbb{C}) \\ (s, w) &\mapsto \begin{pmatrix} |w| & & \\ & 1 & \\ & & |w|^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Behauptung (i) folgt in diesem Fall aus (6.4.1).

Das Funktorialitätsprinzip ordnet der (speziellen) Darstellung π_p^0 von $G_{\text{ad}}(Q_p)$ den folgenden Homomorphismus zu:

$$\begin{aligned} \varphi(\pi_p^0): \mathfrak{WB}(\bar{Q}_p/Q_p) &= SL(2, \mathbb{C}) \times W(\bar{Q}_p/Q_p) \rightarrow {}^L(G_{\text{ad}})_p^0 = SL(3, \mathbb{C}) \\ (s, w) &\mapsto \rho_2(s). \end{aligned}$$

Aus (6.4.1) folgt: $r_{\beta_i} \circ \varphi(\pi_p^0) = \rho_2$, $i = 1, 2$.

Im allgemeinen Fall ist $\pi_p = \chi_p \otimes \pi_p^0$. Es sei

$$\varphi(\chi_p): W(\bar{Q}_p/Q_p) \rightarrow {}^L(R_{K/Q}(\mathbb{G}_m))_p = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$$

der Homomorphismus, den das Funktionalitätsprinzip χ_p zuordnet. Wir identifizieren K_{ρ_1} mit Q_p und, mittels τ , K_{ρ_1} mit K_{ρ_2} . Dann ist $\varphi(\chi_p)(w) = (\chi_{\rho_1}(w), \chi_{\rho_2}(w))$ (Identifikation der Klassenkörpertheorie)² und aus (6.5.1) folgt: $r_{\rho_1} \circ \varphi(\chi_p)(w) = \chi_{\rho_1}(w)$. Aus allgemeinen Prinzipien [19] folgt, daß

$$(6.6.1) \quad r_{\rho_1} \circ \varphi(\pi_p^*)(s, w) = \chi_{\rho_1}(w) \cdot \begin{pmatrix} |w| & \\ & 1 \\ & & |w|^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(6.6.2) \quad r_{\rho_1} \circ \varphi(\pi_p)(s, w) = \chi_{\rho_1}(w) \cdot \rho_2(s).$$

Die Behauptung (i) ist damit bereits bewiesen. Für (ii) ist noch der L -Faktor zu bestimmen. Das fällt bei folgender Rechnung mit ab.

6.7 Lemma. *Es sei $\sigma_{\rho_1} = \begin{pmatrix} p^{-1/2} & 0 \\ 0 & p^{1/2} \end{pmatrix} \times \sigma_{\rho_1} \in \mathfrak{B}(\bar{Q}_p/K_{\rho_1})$ eine Liftung des geometrischen Frobenius. Dann ist für $m > 0$*

- (i) $\text{Tr}(\sigma_{\rho_1}^m | \chi_{\rho_1}) = \chi_{\rho_1}(p)^m$.
- (ii) $\text{Tr}(\sigma_{\rho_1}^m | r_{\rho_1} \circ \varphi(\pi_p)) = \chi_{\rho_1}(p)^m (p^m + 1 + p^{-m})$.

Beweis. (i) ist offensichtlich. Nach 6.6.2 ist das Bild von $\sigma_{\rho_1}^m$ unter $r_{\rho_1} \circ \varphi(\pi_p)$ die

folgende Matrix in $GL(3, \mathbb{C})$: $\chi_{\rho_1}(p)^m \cdot \begin{pmatrix} p^{-m} & & \\ & 1 & \\ & & p^m \end{pmatrix}$. Daraus folgt (ii). Der Inva-

riantenraum unter der Verzweigungsgruppe ist der zu p^{-1} gehörige Eigenraum. Daraus folgt 6.6(ii).

Es sei $\pi = \chi \circ \kappa$ eine 1-dimensionale automorphe Darstellung. Aus der Beschreibung der Fundamentalgruppe von $\mathcal{M}_C$ (4.2 (iv) bzw. 4.3 (ii)) folgt leicht, daß $\rho^0(\pi)_{\rho_1} = \chi_{\rho_1}$ und somit $\rho^4(\pi)_{\rho_1} = \chi_{\rho_1}(-2)$. Deshalb folgt aus 6.6, daß die Aussagen (i) und (ii) äquivalent zu folgenden Behauptungen sind.

6.8 Satz. (i) *Falls π eindimensional ist, so ist*

$$\rho^2(\pi)_{\rho_1} = \chi_{\rho_1}(-1) \quad i = 1, 2.$$

(ii) *Falls Π unendlichdimensional ist, so ist*

$$\rho^2(\Pi)_{\rho_1} = m(\Pi) \cdot (r_{\rho_1} \circ \varphi(\pi_p))(-1)$$

(Gleichheiten der zugeordneten halbeinfachen Darstellungen von $\mathfrak{B}(K_{\rho_1, i}/K_{\rho_1})$).

Wir beginnen jetzt mit dem Beweis des Satzes 6.4. Man überzeugt sich unschwer, daß wir dabei das Recht haben, C^p durch eine kleinere offene kompakte Untergruppe von $G(\mathbb{A}_f^p)$ zu ersetzen. Wir wenden uns zunächst der Primstelle ρ_2 zu.

² Wir normalisieren den Isomorphismus der lokalen Klassenkörpertheorie so, daß ein geometrischer Frobenius einer lokalen Uniformisierenden entspricht.

6.9 Proposition.

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\dim(\pi)=1} \rho^2(\pi)_{\#_2} &= 1 \otimes \mathcal{F}(K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C))(-1) \\ \bigoplus_{\dim \Pi = \infty} \rho^2(\Pi)_{\#_2} &= \rho_2 \otimes \mathcal{F}(G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f)/C_-)(-1) \\ &\quad - \rho_2 \otimes \mathcal{F}(K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C))(-1). \end{aligned}$$

(Gleichheiten in der Grothendieckgruppe der zulässigen Darstellungen von $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p), C^p) \times \mathfrak{B}(K_{\#_2,1}/K_{\#_2})$.

Beweis. Zunächst folgt aus 5.3 und 4.2 (iv) und (v), daß die Summe der beiden linken Seiten gleich der Summe der beiden rechten Seiten ist. Der durch die eindimensionalen automorphen Darstellungen aufgespannte Raum ist aber gerade die Darstellung von $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p), C^p)$ auf $\mathcal{F}(K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C))$ und diese Darstellung ist disjunkt von der Darstellung von $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p), C^p)$, die durch die rechte Seite der zweiten Gleichheit definiert ist. Q.E.D.

6.10 Satz. Es sei $f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f), C)$ und $m > 0$. Dann ist

$$\mathrm{Tr}(f \circ \sigma_{\#_2}^m | 1 \otimes \mathcal{F}(K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C))) = \mathrm{Tr}(f \circ \sigma_{\#_2}^m | \bigoplus_{\dim \pi = 1} \chi_{\#_2}).$$

Der Summationsindex läuft über die eindimensionalen automorphen Darstellungen, die Kohomologie liefern. Wir identifizieren eine solche automorphe Darstellung π mit einem Charakter χ von $K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C)$ und schreiben seine p -Komponente in der Form $\chi_p = \chi_{\#_1} \cdot \chi_{\#_2}$.

Beweis. In der Tat folgt aus 4.2 (iv), daß die Doppeldarstellung $\mathcal{F}(K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C))$ von $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f), C) \times W(\bar{K}_{\#_2}/K_{\#_2})$ gleich $\bigoplus_{\dim \pi = 1} \chi_{\#_2}$ ist.

6.11 Korollar. Es sei $\dim(\pi) = 1$. Dann ist

$$\rho^2(\pi)_{\#_2} = \chi_{\#_2}(-1).$$

Beweis. Aus 6.9 folgt, daß die $SL(2, \mathbb{C})$ -Typen beider Seiten trivial sind. Also folgt die Behauptung aus 6.9 und 6.10.

Damit ist der erste Punkt von 6.4 bzw. 6.8 bereits bewiesen.

6.12 Satz. Es sei $f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p), C^p)$ und $m > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(f^p \circ \sigma_{\#_2}^m | \rho_2 \otimes \mathcal{F}(G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f^p)/C_-) - \rho_2 \otimes \mathcal{F}(K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C))) \\ &= \mathrm{Tr}(f^p \circ \sigma_{\#_2}^m | \bigoplus_{\Pi} (\rho_2 \otimes \chi_{\#_2})^{m(\Pi)}). \end{aligned}$$

Der Summationsindex läuft über die unendlich-dimensionalen Π , deren p -Komponente in der Form $\pi_p = \chi_p \circ \kappa$ mit $\chi_p = \chi_{\#_1} \cdot \chi_{\#_2}$ geschrieben werden. (Wir nehmen an, daß $m(\Pi)$ wohldefiniert ist.)

Zeigen wir bereits, daß 6.12 die in 6.4 (ii) b) behauptete Gleichheit bzgl. $\#_2$ zur Folge hat. Aus 6.9 folgt zunächst wie beim Beweis von 6.11 die Gleichheit in (ii) b) bzgl. $\#_2$, falls wir auf beiden Seiten das Produkt über alle diejenigen Π nehmen, deren $G(\mathbb{A}_f^p)$ -Komponenten übereinstimmen und deren Wirkungen

auf dem Frobeniuselement $\Phi \in G_-(Q_p)$ ($= G(Q_p)$) die gleichen sind

$$\Pi_p(\Phi) = \chi_p(\kappa(\Phi)).$$

Aber die Menge dieser Π besteht aus nur einem Element. In der Tat, falls die $G(\mathbb{A}_f^p)$ -Komponente von Π bekannt ist, ist der Zentrumscharakter von Π in allen endlichen Stellen bekannt. Die Heckealgebra $\mathcal{H}(G(Q_p), C_p)$ ist isomorph zu $\widehat{Q}_l[X^{\pm 1}, Y^{\pm 1}]$.

$$G(Q_p)/C_p \xrightarrow{\text{ord} \circ \kappa} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Wir kennen die Wirkung von Π_p auf $(X \cdot Y)^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) (Zentrumscharakter) und auf Y^n ($n \in \mathbb{Z}$) (Frobenius). Folglich ist Π eindeutig bestimmt.

Wir werden 6.12 und die Behauptung (ii) a) von 6.4 mit Hilfe der Selbergschen Spurformel beweisen. Zunächst machen wir einige Bemerkungen zur Wahl der Haarschen Maße. Weil G und G_- innere Verschränkungen voneinander sind, können wir wie in [15], § 15 verträgliche Tamagawamaße wählen. Auf dem gemeinsamen Zentrum $Z(\mathbb{A})$ von $G(\mathbb{A})$ und $G_-(\mathbb{A})$ fixieren wir ein Produktmaß. Auf diskreten Gruppen nehmen wir das Maß, das jedem Punkt das Gewicht 1 gibt. Auf Quotientenräumen nehmen wir das Quotientenmaß. Es sei $Z_C = Z(\mathbb{A}_f) \cap C$ und $Z_1 = Z(\mathbb{R}) \cdot Z_C$. Wir bezeichnen mit R bzw. R_- die rechtsreguläre Darstellung von $G(\mathbb{A})$ bzw. von $G_-(\mathbb{A}_f)$ auf $L^2(G(Q) \cdot Z_1 \backslash G(\mathbb{A}))$ bzw. $L^2(G_-(Q) \cdot Z_1 \backslash G_-(\mathbb{A}_f))$. Die Unterdarstellung, die von den eindimensionalen automorphen Darstellungen aufgespannt wird, bezeichnen wir mit R^1 bzw. R_-^1 . Wir machen von der Möglichkeit, C^p zu verkleinern, Gebrauch und dürfen deshalb annehmen [20, 3.6], daß für $\delta \in G_-(Q)$ aus der Gleichung $g^{-1} \cdot \delta \cdot g \in C$ für ein $g \in G_-(\mathbb{A}_f)$ folgt, daß $\delta \in Z(Q)$. Dann können wir die linke Seite in 6.12 in folgender Form schreiben.

6.13 Lemma. *Es sei*

$$f_{-p}^{(m)} = \text{vol}(C_{-p})^{-1} \cdot \text{char}(C_{-p} \cdot \Phi^m \cdot C_{-p}) \in C_c^\infty(G_-(Q_p))$$

und

$$f_-^{(m)} = f^p \cdot f_{-p}^{(m)} \in C_c^\infty(Z_1 \backslash G_-(\mathbb{A}_f)).$$

Dann ist:

- a) $\text{Tr}(f^p \sigma_{\#2}^m | \mathcal{F}(G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f)/C_-)) = \text{Tr}(R_-(f_-^{(m)}))$
- b) $\text{Tr}(f^p \sigma_{\#2}^m | \mathcal{F}(K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C_-)) = \text{Tr}(R_-^1(f_-^{(m)})).$

Wir lassen den Beweis dieses Lemmas weg. Er ist rein formal, ausgehend von der Beschreibung der Aktion des Frobenius auf den linken Seiten (s. [4]). Aus 6.7 folgern wir:

6.14 Korollar. *Die linke Seite in 6.12 ist gleich:*

$$[\text{Tr } R_-(f_-^{(m)}) - \text{Tr } R_-^1(f_-^{(m)})] (p^{-m} + 1 + p^m).$$

Um auch die rechte Seite in 6.12 in einen Ausdruck umzuformen, auf den die Selbergsche Spurformel angewendet werden kann, zitieren wir aus [38] das folgende Ergebnis.

6.15 Lemma. Es sei $i=0, 1$ oder 2 . Es gibt eine Funktion $f_\infty^i \in C_c^\infty(G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}))$, so daß für eine irreduzible zulässige Darstellung π_∞ von $G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R})$ gilt:

$$\mathrm{Tr}(\pi_\infty(f_\infty^i)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \pi_\infty \text{ kohomologisch trivial} \\ 1, & \text{falls } \pi_\infty = \pi^{i, 2-i} \\ 0, & \text{falls } \pi_\infty \text{ in der diskreten Reihe } \neq \pi_\infty^{i, 2-i} \\ 1, & \text{falls } \pi_\infty \text{ trivial.} \end{cases}$$

Die Spur von f_∞^i auf den nichttemperierten Darstellungen $\mathcal{J}_0$ und $\mathcal{J}_1$ ist durch diese Forderungen eindeutig festgelegt; wegen 6.3 werden diese Darstellungen jedoch keine Rolle spielen.

6.16 Lemma. Es gibt eine Funktion $f_p^{(m)} \in C_c^\infty(G(Q_p))$, so daß für eine irreduzible zulässige Darstellung π_p von $G(Q_p)$ gilt:

$$\mathrm{Tr}(\pi_p(f_p^{(m)})) = \begin{cases} \chi_{\rho_2}(p)^m, & \text{falls } \pi_p = \chi_p \circ \kappa \text{ mit einem} \\ & \text{unverzweigten Charakter von } K_p^\times \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Es sei $\Phi \in G(Q_p) = G_-(Q_p)$ das Frobeniuselement. Die Funktion $f_p^{(m)} = \mathrm{vol}(C_p)^{-1} \cdot \mathrm{char}(C_p \cdot \Phi^m \cdot C_p)$ besitzt, wie man leicht nachprüft, die gewünschten Eigenschaften.

6.17 Korollar. Es sei $f^{i, (m)} = f_\infty^i \cdot f_p \cdot f_p^{(m)} \in C_c^\infty(Z_1 \backslash G(\mathbb{A}))$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(f^p \sigma_{\rho_2}^m | \bigoplus_{\pi = \pi_{\mathbb{A}^{\times 2} \cdot \pi_f} (\rho_2 \otimes \chi_{\rho_2})^{m(\pi)}) \\ = [\mathrm{Tr}(R(f^{i, (m)})) - \mathrm{Tr}(R^1(f^{i, (m)}))] (p^{-m} + 1 + p^m). \end{aligned}$$

Der Summationsindex läuft über die automorphen Darstellungen, die zur Kohomologie von $M_{G, C}$ beitragen und deren archimedische Komponente $\pi_\infty^{i, 2-i}$ ist.

Beweis. Das folgt wegen 6.3 aus 6.15 und 6.16, vgl. Beweis von 6.14.

6.18 Lemma. $\mathrm{Tr}(R^1(f^{i, (m)})) = \mathrm{Tr}(R_-(f_-^{(m)}))$.

Beweis. In der Tat liefert eine eindimensionale automorphe Form, d.h. ein Charakter χ von $K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C)$, links den Beitrag $\chi_\infty(f_\infty^i) \cdot \chi^p(f^p) \cdot \chi_p(\Phi)$ und rechts den Beitrag $\chi^p(f^p) \cdot \chi_p(\Phi)$. Die Behauptung folgt aus 6.15.

6.19 Satz. Es ist, für $i=0, 1$, oder 2 ,

$$\mathrm{Tr}(R(f^{i, (m)})) = \mathrm{Tr}(R_-(f_-^{(m)})).$$

Aus diesem Satz folgt die Behauptung (ii) a) in 6.4. In der Tat, aus den vorhergehenden Hilfssätzen folgt, daß

$$\sum_{\pi = \pi_{\mathbb{A}^{\times 2} \cdot \pi_f} m(\pi) \cdot \mathrm{Tr}(\pi^p(f^p)) \cdot \mathrm{Tr}(\pi_p(f_p^{(m)}))$$

von i unabhängig ist. Weil f^p ein beliebiges Element der Heckalgebra $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p))$ ist, erhalten wir zunächst, daß $\sum_{\pi_\infty = \pi_{\infty}^{1,2^{-1}}, \pi_f^p \text{ fixiert.}} m(\pi)$ von i unabhängig ist. Jetzt folgt die Behauptung mit dem gleichen Argument, mit dem (ii) b) aus 6.12 hergeleitet wurde. Offenbar ist auch 6.12 eine unmittelbare Folgerung aus 6.19. Wir haben somit die ursprüngliche Behauptung auf eine Frage der harmonischen Analyse zurückgeführt. Für ihren Beweis dürfen wir annehmen, daß $f^p = \prod_{v \neq p, \infty} f_v$ in Produktform mit den üblichen Eigenschaften [23, § 2] ist.

Weil sowohl G als auch G_- anisotrop über Q sind, können wir ohne Schwierigkeiten beide Seiten in 6.19 in der Selbergschen Form entwickeln (s. [13]). Wir nehmen C^p genügend klein (s. [20], p. 1154), so daß die Identität $\gamma_1 \cdot \gamma \cdot \gamma_1^{-1} = z \cdot \gamma$ mit $\gamma, \gamma_1 \in G(Q)$ und $z \in Z(Q) \cap Z_1$ nur für $z=1$ gelten kann. Dann erhalten wir:

$$(6.19.1) \quad \text{Tr}(R(f^{i, (m)})) = \sum_{\{\gamma\}} \text{vol}(G_\gamma(Q) Z_1 \backslash G_\gamma(\mathbb{A})) \cdot \int_{G_\gamma(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} f^{i, (m)}(g^{-1} \cdot \gamma g) dg.$$

Hier durchläuft $\{\gamma\}$ die Konjugationsklassen von $G(Q) \cap Z_1 \backslash G(Q)$; mit G_γ ist der Zentralisator von γ bezeichnet. Es wurden Tamagawamaße auf G_γ gewählt. Entsprechend ist

$$(6.19.2) \quad \text{Tr}(R_-(f_-^{(m)})) = \sum_{\{\delta\}} \text{vol}(G_{-\delta}(Q) Z_C \backslash G_{-\delta}(\mathbb{A}_f)) \cdot \int_{G_{-\delta}(\mathbb{A}_f) \backslash G_-(\mathbb{A}_f)} f_-^{(m)}(g^{-1} \delta g) dg.$$

Hier durchläuft $\{\delta\}$ die Konjugationsklassen von $G_-(Q) \cap Z_1 \backslash G_-(Q)$. Es wurden Tamagawamaße auf $G_{-\delta}$ gewählt.

Das Problem, die rechten Seiten von (6.19.1) und (6.19.2) zu vergleichen ist ein allgemeines; in der Tat ist dies eine der Aufgaben, die eine „stabilisierte Spurformel“ [26] zu lösen bestimmt ist. Unser Ziel ist es zu zeigen, daß in dem hier vorliegenden Spezialfall eine wirkliche Stabilisierung unnötig ist. Um die Darstellung nicht völlig obskur zu machen, erinnern wir an einige allgemeine Definitionen [22]. Für einige der erforderlichen Rechnungen aus der Galois-Kohomologie verweisen wir auf [32].

6.20 Definition. Es sei F ein Körper der Charakteristik 0 und $\bar{F}$ eine algebraische Abschließung. Es sei G eine reduktive Gruppe über F .

a) Zwei halbeinfache reguläre Elemente γ_1 und γ_2 in $G(F)$ heißen stabil konjugiert, falls es ein Element $g \in G(\bar{F})$ gibt, so daß $\gamma_2 = g^{-1} \gamma_1 g$.

b) Zwei CSG über F , T_1 und T_2 , heißen stabil konjugiert, falls es ein Element $g \in G(\bar{F})$ gibt, so daß $T_2 = g^{-1} \cdot T_1 \cdot g$ und so daß der Homomorphismus $\text{Ad } g: T_1 \rightarrow T_2$ über F definiert ist.

Offenbar sind zwei CSG T_1 und T_2 genau dann stabil konjugiert, wenn es reguläre Elemente $\gamma_i \in T_i(F)$ gibt, die stabil konjugiert sind. Wir bezeichnen mit $\{T\}_{st}$ (resp. $\{\gamma\}_{st}$) die Menge der zu T (resp. γ) stabil konjugierten Tori (resp. Elemente). Die folgende Proposition gibt eine Beschreibung der stabilen Konjugationsklassen von CSG in G .

6.21 Proposition ([32]). *Es sei T_0 eine feste CSG in G . Es sei N_0 der Normalisator und $\bar{W} = N_0(\bar{F})/T_0(\bar{F})$ die geometrische Weylgruppe.*

a) *Es sei T eine CSG von G und $g \in G(\bar{F})$, so daß $T = g^{-1} T_0 g$. Die Abbildung, die zu T die Kohomologieklassse $\{a_\tau\} \in H^1(F, \bar{W})$ ($\tau \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$), Bild von $\{b_\tau\} = \{\tau(g) \cdot g^{-1}\}$ unter $H^1(F, N(\bar{F})) \rightarrow H^1(F, \bar{W})$, zuordnet, identifiziert die Menge der stabilen Konjugationsklassen von CSG mit einer Untermenge von $H^1(F, \bar{W})$.*

b) *Falls G quasizerfallend ist, so ist diese Abbildung auch surjektiv.*

Die Behauptung b) ist eine Folgerung aus dem Satz von Steinberg. Aus diesem Satz folgt auch, daß die Menge der stabilen Konjugationsklassen von CSG bzw. von regulären halbeinfachen Elementen von G eine Untermenge der entsprechenden Menge für die quasizerfallende Form G^* von G ist.

Es sei T eine CSG über F und

$$\mathfrak{A}(T, F) = \{g \in G(\bar{F}) \mid T' = g^{-1} T g \text{ ist über } F \text{ definiert und } \text{Ad } g: T \rightarrow T' \text{ ist über } F \text{ definiert}\}.$$

Es sei $\mathfrak{D}(T, F) = T(\bar{F}) \setminus \mathfrak{A}(T, F)/G(F)$. Diese Menge parametrisiert die Abbildungen $\text{Ad } g$ zwischen T und stabil konjugierten CSG bis auf Konjugation. Die Zuordnung $g \in \mathfrak{A}(T, F) \mapsto \{a_\sigma\} = \{\sigma(g) g^{-1}\}$ definiert eine Bijektion

$$\mathfrak{D}(T, F) = \text{Ker}(H^1(F, T) \rightarrow H^1(F, G)).$$

Es sei G_{sc} die einfach-zusammenhängende Überlagerung der derivierten Gruppe G_{der} und T_{sc} das inverse Bild von T . Es sei $\mathfrak{E}(T, F) = \text{Bild von } H^1(F, T_{sc}) \rightarrow H^1(F, T)$. Dann ist $\mathfrak{E}(T, F)$ eine Gruppe und $\mathfrak{D}(T, F)$ eine Untermenge. Für F lokal nichtarchimedisch stimmen $\mathfrak{D}(T, F)$ und $\mathfrak{E}(T, F)$ überein.

Es sei F ein globaler Körper. Es sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(T, \mathbb{A}) &= \prod_v \mathfrak{D}(T, F_v) \quad (\text{beschränktes Produkt}) \\ \mathfrak{E}(T, \mathbb{A}) &= \prod_v \mathfrak{E}(T, F_v). \end{aligned}$$

Aus der Tate-Nakayama-Theorie sind folgende Sequenzen als exakt bekannt.

$$(6.21.1) \quad \mathfrak{D}(T, F) \rightarrow \mathfrak{D}(T, \mathbb{A}) \rightarrow H^{-1}(F, X_*(T))$$

$$(6.21.2) \quad \mathfrak{E}(T, F) \rightarrow \mathfrak{E}(T, \mathbb{A}) \rightarrow \text{Ker}(H^{-1}(F, X_*(T_{sc})) \rightarrow H^{-1}(F, X_*(T))).$$

Die Gruppe rechts außen in der letzten Zeile ist

$$\{\lambda \in X_*(T_{sc}) \mid \sum_{\tau \in \text{Gal}(K/F)} \tau \lambda = 0\} / \{\lambda \in X_*(T_{sc}) \mid \lambda = \sum_{\tau} \tau \mu_{\tau} - \mu_{\tau}, \mu_{\tau} \in X_*(T)\}.$$

(K/F genügend große Galoiserweiterung.)

Wir kehren jetzt zu dem uns interessierenden Spezialfall zurück. Es sei G^* die quasizerfallende Form von G bzw. G_- . Bis auf weiteres bezeichnen wir mit G eine beliebige innere Form von G^* . Wir benutzen folgende exakte Sequenzen von algebraischen Gruppen über Q ([8], [30]).

$$(6.22.1) \quad 1 \rightarrow G_{sc} \rightarrow G \xrightarrow{\kappa} R_{K/Q}(\mathbb{G}_m) \rightarrow 1.$$

$$(6.22.2) \quad 1 \rightarrow G_1 \rightarrow G \xrightarrow{\mu} \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

Dabei ist $G_{sc} \otimes K \simeq SL(3)_K$ und $G_1 \otimes K \simeq GL(3)_K$. Für eine CSG T von G sei $T_1 = T \cap G_1$. Es sei L der Zentralisator von T_1 in $M_3(K)$. Weil L eine maximale kommutative halbeinfache Unter algebra vom Rang 3 von $M_3(K)$ ist, ist L eine direkte Summe von Körpererweiterungen. Es gibt folgende Möglichkeiten:

- (I) $L = K \oplus K \oplus K$
- (II) $L = K \oplus K_1$ K_1/K quadratische Erweiterung
- (III) $L =$ kubische Erweiterung von K .

Je nachdem, welcher Fall eintritt, nennen wir die CSG vom Typ I, Typ II (oder auch quadratisch), bzw. Typ III (oder auch kubisch).

6.22 Proposition. *Es sei $T \subset G$ eine CSG über Q vom Typ (III). Dann sind die kanonischen Abbildungen*

- a) $\mathfrak{D}(T, Q) \rightarrow \mathfrak{D}(T, \mathbb{A})$
- b) $\mathfrak{E}(T, Q) \rightarrow \mathfrak{E}(T, \mathbb{A})$ *surjektiv.*

Die Behauptung a) ist Konsequenz von b), wie der folgende Hilfssatz zeigt ([7]).

6.23 Lemma. *G erfüllt das Hasseprinzip.*

Beweis. Aus der exakten Sequenz (6.22.1) leiten wir folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen ab:

$$\begin{array}{ccccccc} K^\times & \longrightarrow & H^1(Q, G_{sc}) & \longrightarrow & H^1(Q, G) & \longrightarrow & H^1(Q, R_{K/Q} \mathfrak{G}_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_v K_v^\times & \longrightarrow & \prod_v H^1(Q_v, G_{sc}) & \longrightarrow & \prod_v H^1(Q_v, G) & \longrightarrow & \prod_v H^1(Q_v, R_{K/Q} \mathfrak{G}_m). \end{array}$$

Nach Hilbert's Satz 90 sind die äußersten rechten Terme gleich Null. Weil $H^1(Q_v, G_{sc}) = 0$ für $v < \infty$, folgt $H^1(Q_v, G) = 0$ für $v < \infty$. Jetzt folgt die Behauptung aus dem Hasseprinzip für G_{sc} und der Tatsache, daß $K \otimes \mathbb{R}$ zusammenhängend ist. Q.E.D.

Wir beweisen jetzt b); entsprechende Rechnungen für die spezielle unitäre Gruppe finden sich in [32]. Offenbar genügt es zu zeigen, daß

$$\mathfrak{E}(T_1, Q) \rightarrow \mathfrak{E}(T_1, \mathbb{A})$$

surjektiv ist. Wir dürfen annehmen, daß G_1 quasizerfallend ist. Es sei

$$J = \begin{pmatrix} & & 1 \\ -1 & & \\ & & \end{pmatrix}. \text{ Dann ist } G_1 \text{ diejenige äußere Verschränkung von } GL(3), \text{ die}$$

durch folgende getwistete Galoisaktion definiert wird:

$$(6.23.1) \quad \tau(g) = J^{-1} \cdot {}^t \bar{g} \cdot J, \quad g \in GL(3, K)$$

($\tau =$ nichttriviales Element in $\text{Gal}(K/Q)$; $g \mapsto \bar{g}$ Konjugation).

Es sei $A_1 \subset G_1$ die Gruppe der Diagonalmatrizen und $\bar{W} = N(A_1)(\bar{Q})/A_1(\bar{Q})$ die geometrische Weylgruppe. Aus der exakten Sequenz von algebraischen

Gruppen über K

$$1 \rightarrow A_{1_K} \rightarrow (\mathbb{G}_{m_K}^2)^3 \rightarrow \mathbb{G}_{m_K}^3 \rightarrow 1$$

$$(x_i, y_i)_{i=1, 2, 3} \mapsto (x_i \cdot y_i)_{i=1, 2, 3}$$

leitet man folgenden Ausdruck für $X_*(A_1)$ ab:

$$X_*(A_1) = \{(a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3) \in \mathbb{Z}^6 \mid a_i + b_i = 0\}.$$

Wegen (6.23.1) wirkt τ folgendermaßen:

$$\tau((a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3)) = (-b_3, -a_3; -b_2, -a_2; -b_1, -a_1).$$

Die Weylgruppe operiert durch Permutation der 3 Paare von Zahlen und wird auf diese Weise mit S_3 identifiziert. Insbesondere werden die Transpositionen

$$(13) \quad \text{durch} \quad w_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$(12) \quad \text{durch} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(23) \quad \text{durch} \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bewirkt. Wir erhalten für die Aktion von $\text{Gal}(K/Q)$ auf $\bar{W}$:

$$\tau((1, 3)) = (1, 3), \quad \tau(1, 2) = (2, 3).$$

Es sei jetzt T_1 eine kubische CSG von G_1 und L die entsprechende kubische Erweiterung von K . Es sei $\bar{L}$ die Galoissche Hülle von L über K . Dann ist $\bar{L}$ galois'sch über Q [32]. Wir unterscheiden 3 Fälle: (I) $L = \bar{L}$ und $\text{Gal}(\bar{L}/Q) = S_3$ (II) $L = \bar{L}$ und $\text{Gal}(\bar{L}/Q) = \mathbb{Z}/6$ (III) $[\bar{L}:Q] = 12$ und $\text{Gal}(\bar{L}/Q)$ enthält S_3 als Untergruppe.

Wir betrachten den Fall (I). Wir wählen Erzeugende von $\text{Gal}(\bar{L}/Q)$ mit $\tau^2 = 1$, $\tau|_K =$ nichttrivialer Automorphismus; $\sigma^3 = 1$, $\sigma|_K$ trivial; $\tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$. Wir repräsentieren die stabile Konjugationsklasse von T durch einen Kozykel $\{a_\tau\}$ in $H^1(\text{Gal}(\bar{L}/Q), \bar{W})$, siehe 6.21. Wir erhalten aus der Kozykelbedingung: $\tau(a_{\sigma^{-1}}) = a_\tau^{-1} \cdot a_\sigma \cdot a_\tau$ und $a_\sigma^3 = 1$. Bis auf Kogrenzen ist die einzige Lösung folgende: $a_\sigma = (123)$, $a_\tau = 1$. Folglich ist die T entsprechende getwistete Aktion von $\text{Gal}(\bar{L}/Q)$ auf $X_*(A_1)$:

$$\tau: (a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3) \rightarrow (-b_3, -a_3; -b_2, -a_2; -b_1, -a_1)$$

$$\sigma: (a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3) \rightarrow (a_3, b_3; a_1, b_1; a_2, b_2).$$

Um die Behauptung b) für T zu zeigen, genügt es nach (6.21.2) zu zeigen, daß $X_*(T_{sc})$ (definiert in $X_*(T_1)$ durch die Identität $a_1 + a_2 + a_3 = 0$) von Elementen

der Form

$$\lambda = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(L/Q)} \sigma \mu_{\sigma} - \mu_{\sigma}, \quad \mu_{\sigma} \in X_*(T),$$

erzeugt wird. Man überprüft leicht, das dies zutrifft. In den Fällen (II) und (III) folgt b), weil sogar $H^{-1}(Q, X_*(T_{sc})) = 0$ ist. Wir verweisen auf [32] für die Einzelheiten. Q.E.D.

6.24 Proposition. *Eine CSG T^* über Q von G^* tritt genau dann in G global auf, wenn sie lokal überall auftritt.*

Beweis. Offenbar können wir in der Behauptung G^* , G und T^* durch G_1^* , G_1 und T_1^* ersetzen. Wir beschränken uns auf den Nachweis der Behauptung im Falle eines kubischen Torus. (Der Fall einer CSG vom Typ (II) ist in [32] behandelt. Für den Typ (I) ist die Behauptung gleichbedeutend mit dem Hasseprinzip für G_{ad} .) Wir repräsentieren die kubische CSG in der Form $T_1^* = \{x \in L \mid x \cdot x^J = 1\}$, wobei $x \mapsto x^J$ eine Involution ist, die auf K den nichttrivialen Automorphismus induziert. Wir repräsentieren die Gruppe G_1 in der Form $G_1 = \{d \in D^{\times} \mid d \cdot d^{\tau} = 1\}$, wobei D eine einfache zentrale Algebra vom Rang 3^2 über K und $d \mapsto d^{\tau}$ eine Involution 2. Art sind. Der Torus T_1^* erscheint genau dann als CSG von G_1 , wenn es eine involutionsstreu Einbettung $\varphi: (L, J) \rightarrow (D, \tau)$ gibt. Weil nach Voraussetzung T_1^* lokal überall in G_1 einbettbar ist, läßt sich eine Einbettung von K -Algebren $\varphi: L \rightarrow D$ finden, so daß L zu einer maximalen kommutativen halbeinfachen Unteralgebra von D wird. Wir setzen die Involution J auf ganz D fort. Nach Skolem-Noether existiert ein $t \in D^{\times}$ mit $t^{\tau} = t$, so daß $x^J = t \cdot x^{\tau} \cdot t^{-1}$ für alle $x \in D$. Wir können genau dann φ in eine involutionsstreu Einbettung konjugieren, wenn es Elemente $s \in D^{\times}$, $b \in L^{\times}$ gibt mit $s \cdot s^{\tau} = b \cdot t$. Nach Voraussetzung ist diese Bedingung lokal überall erfüllt. Es sei (s_{∞}, b_{∞}) die Lösung für die archimedische Stelle. Es sei $b_0 \in L^{\times}$ ein Element, das b_{∞} genügend gut approximiert, und für das $b_0 \cdot t$ invariant unter τ ist. Es ist $c = N_{D/K}(b_0 \cdot t) \in Q^{\times}$. Dann ist c lokale Norm aus K in der unendlichen Stelle und folglich ist die Gleichung

$$(6.24.1) \quad s \cdot s^{\tau} = b \cdot t \quad \text{mit} \quad b = \underset{\text{df}}{c^{-1}} b_0$$

lokal in der unendlichen Stelle lösbar. Andererseits ist $N_{D/K}(bt) = c^2$ lokale Norm in allen nichtarchimedischen Stellen. Aus dem Satz von Landherr [17] folgt daher, daß die Gleichung (6.24.1) global lösbar ist. (Ein ähnliches Argument wird in Kneser's *Beweis* des Satzes von Landherr verwendet.) Q.E.D.

Der folgende Hilfssatz gibt ein einfaches Kriterium dafür, daß in G nur kubische CSG auftreten.

6.25 Lemma. *Falls für eine endliche Stelle G_v anisotrop modulo dem Zentrum ist, so ist jedes Element von $G(Q)$ entweder zentral oder halbeinfach regulär elliptisch. Jede über Q definierte CSG von G ist dann kubisch.*

Beweis. In der Tat ist G_{1v} die multiplikative Gruppe einer Divisionsalgebra. Somit gibt es keine nichtzentralen singulären Elemente und jede CSG von G_{1v} ist die multiplikative Gruppe einer kubischen Erweiterung von Q_v .

Wir analysieren jetzt die Summe (6.19.1). Es bezeichnet G wieder die ursprüngliche Gruppe. Statt $f^{i,(m)}$ schreiben wir f .

Wir formen die Teilsumme (6.19.1)^{ell}, die den regulären elliptischen Konjugationsklassen entspricht, um. Es sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ eine Menge von Repräsentanten der Konjugationsklassen von elliptischen CSG, und $\mathcal{T}_{st} = \mathcal{T}_{st}(G)$ eine Menge von Repräsentanten der stabilen Konjugationsklassen von elliptischen CSG. Für eine CSG T bezeichne $W_0(T) = N(T)(Q)/T(Q)$ die rationale Weylgruppe und $W(T)$ die Untergruppe der Elemente der geometrischen Weylgruppe, deren Aktion auf $X_*(T)$ mit der Wirkung der Galoisgruppe vertauschbar ist. Man sieht unmittelbar ein, daß

$$(6.19.1)^{\text{ell}} = \sum_{\mathcal{T}} \frac{1}{|W_0(T)|} \cdot \text{vol}(T(Q) \cdot Z_1 \backslash T(\mathbf{A})) \cdot \sum_{\gamma \in Z(Q) \cap Z_1 \backslash T(Q)^{\text{reg}} T(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})} \int f(g^{-1} \gamma g) dg.$$

Wir bezeichnen das Bahnenintegral $\int_{T(\mathbf{A}) \backslash G(\mathbf{A})} f(g^{-1} \gamma g) dg$ ($\gamma \in T(Q)$) mit $\Phi_T(\gamma, f)$, oder auch $\Phi(\gamma, f)$. Analog wird $\Phi(\gamma, f)$ im *lokalen* Fall definiert ($f \in C_c^\infty(G(Q_v))$, $\gamma \in T(Q_v)^{\text{reg}}$). Es sei $\delta \in \mathfrak{D}(T, Q)$ und $g \in \mathfrak{A}(T, Q)$ ein Repräsentant. Wir benutzen g , um das Tamagawamaß von T nach T^g zu transportieren und setzen $\Phi_{T^\delta}(\gamma^\delta, f) = \Phi(\gamma^\delta, f) = \Phi(\gamma^g, f)$, $\gamma \in T(Q)^{\text{reg}}$. Analog wird $\Phi(\gamma^\delta, f)$ im *lokalen* Fall definiert ($\delta \in \mathfrak{D}(T, Q_v)$). Man überzeugt sich leicht, daß

$$T(\bar{Q}) \backslash (N(T)(\bar{Q}) \cap \mathfrak{A}(T, Q)) / N(T)(Q) \simeq W_0(T) \backslash W(T).$$

Deshalb können wir den obigen Ausdruck als Summe über die stabilen Konjugationsklassen in folgender Weise schreiben:

$$(6.19.1)^{\text{ell}} = \sum_{\mathcal{T}_{st}} \frac{1}{|W(T)|} \cdot \text{vol}(T(Q) Z_1 \backslash T(A)) \cdot \sum_{\gamma \in Z(Q) \cap Z_1 \backslash T(Q)^{\text{reg}}} \sum_{\delta \in \mathfrak{D}(T, Q)} \Phi_{T^\delta}(\gamma^\delta, f).$$

Dabei haben wir benutzt, daß der Volumenfaktor für alle CSG in einer stabilen Konjugationsklasse der gleiche ist. Wir erinnern daran, daß f von der Form $\prod_v f_v$ genommen wurde. Das folgende Lemma ist in völliger Allgemeinheit gültig [26]:

6.26 Lemma. *Für jede CSG T von G und jedes reguläre Element $\gamma \in T(Q)$ ist die Funktion*

$$g \rightarrow f_v(g^{-1} \gamma g)$$

für fast alle Stellen v die charakteristische Funktion von $T(Q_v) C_v$. (Diese Aussage ist für fast alle v sinnvoll.) Insbesondere besteht die Summe

$$\Phi(\{\gamma_v\}^{\text{st}}, f_v) \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_{\delta \in \mathfrak{D}(T, Q_v)} \Phi_{T^\delta}(\gamma^\delta, f_v)$$

für fast alle v aus dem einzigen Summanden $\Phi(\gamma_v, f_v)$.

Dieses Lemma hat zur Folge, daß die rechte Seite der Identität im nächsten Lemma wohldefiniert ist; die Identität selbst folgt aus 6.22.

6.27 Lemma. *Es sei T eine kubische CSG von G und es sei $c(T, G) = \text{card Ker } (\mathfrak{E}(T, Q) \rightarrow \mathfrak{E}(T, \mathbb{A}))$. Für ein reguläres Element $\gamma \in T(Q)$ ist*

$$\sum_{\delta \in \mathfrak{D}(T, Q)} \Phi_{T\delta}(\gamma^\delta, f) = c(T, G) \cdot \prod_v \Phi(\{\gamma_v\}^{st}, f_v).$$

Wir berechnen die stabilen Bahnenintegrale in der unendlichen Stelle.

6.28 Lemma. *Es sei $\gamma_\infty \in G(\mathbb{R})$ ein halbeinfaches Element.*

- a) *Falls γ_∞ regulär hyperbolisch ist, so ist $\Phi(\gamma_\infty, f_\infty^i) = 0$.*
- b) *Falls γ_∞ regulär elliptisch ist, so ist*

$$\Phi(\{\gamma_\infty\}^{st}, f_\infty^i) = \text{vol}(Z(\mathbb{R}) \backslash T(\mathbb{R}))^{-1}, \quad T = G_{\gamma_\infty}.$$

- c) *Falls γ_∞ zentral ist, so ist*

$$\Phi(\gamma_\infty, f_\infty^i) = \text{vol}(Z(\mathbb{R}) \backslash G_-(\mathbb{R}))^{-1}.$$

Beweis. a) ist eine Folge von 6.15 und dem Zerlegungsverhalten [3] der induzierten Darstellungen von $G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}) \cong \text{PSU}(2, 1)$; in Wirklichkeit aber wird f_∞^i gerade so konstruiert, daß a) erfüllt ist [38]. Für b) und c) benutzen wir den Formalismus von Shelstad [35]. Wir erhalten eine Injektion

$$(6.28.1) \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{irreduzible zulässige} \\ \text{Darstellungen von} \\ G_{-\text{ad}}(\mathbb{R}) \\ \pi' \end{array} \right\} \xrightarrow{\psi} \left\{ \begin{array}{c} L\text{-Pakete von irreduziblen} \\ \text{zulässigen Darstellungen} \\ \text{von } G_{\text{ad}}(\mathbb{R}) \\ \Pi = \psi(\pi') = \{\pi\}. \end{array} \right\}$$

Das Bild dieser Injektion besteht aus der diskreten Reihe, und das Bild der trivialen Darstellung π'_0 ist

$$\psi(\pi'_0) = \{\pi^{0,2}, \pi^{1,1}, \pi^{2,0}\}.$$

Es sei $ch_\Pi = \sum_{\pi \in \Pi} ch_\pi$ der Charakter des L -Pakets $\Pi = \psi(\pi')$ und $t \in G_{\text{ad}}(\mathbb{R})$ ein beliebiges halbeinfaches reguläres Element in der stabilen Konjugationsklasse, die der Konjugationsklasse eines Elements $t' \in G_{-\text{ad}}(\mathbb{R})$ entspricht. Dann gilt:

$$(6.28.2) \quad ch_{\pi'}(t') = ch_{\psi(\pi')}(t)$$

([35]; hier ist $q_G = 2$).

Es sei $f_{-\infty}$ die konstante Funktion mit Wert $\text{vol}(Z(\mathbb{R}) \backslash G_-(\mathbb{R}))^{-1}$ auf $G_{-\text{ad}}(\mathbb{R})$. Für eine Darstellung π' von $G_{-\text{ad}}(\mathbb{R})$ ist offenbar:

$$\text{Tr}(\pi'(f_{-\infty})) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi' = \pi'_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus der Definition von f_∞^i folgt somit: Für alle π' ist

$$\text{Tr}(\pi'(f_{-\infty})) = \text{Tr}(\psi(\pi'))(f_\infty^i).$$

Andererseits können beide Seiten mit Hilfe der Weylschen Integrationsformel berechnet werden. Fourierinversion und (6.28.2) zeigen dann:

$$(6.28.3) \quad \Phi(t', f_{-\infty}) = \Phi(\{t\}^{st}, f_{\infty}^i).$$

Um jetzt b) zu beweisen, genügt es zu bemerken, daß die linke Seite von 6.28.3 gleich $\text{vol}(Z(\mathbb{R}) \backslash G_{-l'}(\mathbb{R}))^{-1}$ ist. Um c) zu beweisen, benutzen wir die Plancherelformel für $G_{\text{ad}}(\mathbb{R})$. Wir erhalten $f_{\infty}^i(1) = d(\pi^{i, 2-l'})^{-1}$, wobei $d(\pi)$ den formalen Grad von π bezeichnet. Aber $d(\pi^{i, 2-l'}) = d(\pi_0') = \text{vol}(Z(\mathbb{R}) \backslash G_{-}(\mathbb{R}))$. Q.E.D.

Wir analysieren jetzt die Summe (6.19.2). Es sei $f_{-\infty}^{\text{ell}} = f_{-\infty}$ die im Beweis des vorhergehenden Lemmas definierte Funktion auf $G_{-}(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R})$. Weil für reguläres $\delta \in G_{-}(\mathbb{R})$, $\Phi(\delta, f_{-\infty}) = \text{vol}(Z(\mathbb{R}) \backslash G_{-\delta}(\mathbb{R}))^{-1}$, erhalten wir, daß die den elliptischen Elementen entsprechende Teilsomme (6.19.2)^{ell} folgendermaßen geschrieben werden kann.

$$\begin{aligned} \sum_{\{\delta\}} \text{vol}(Z(\mathbb{R}) \backslash G_{-\delta}(\mathbb{R})) \cdot \text{vol}(G_{-\delta}(Q) Z_C \backslash G_{-\delta}(\mathbb{A}_f)) \cdot \Phi(\delta, f_{-\infty}^{\text{ell}, (m)}) \\ = \sum_{\{\delta\}} \text{vol}(G_{-\delta}(Q) Z_1 \backslash G_{-\delta}(\mathbb{A})) \cdot \Phi(\delta, f_{-\infty}^{\text{ell}, (m)}). \end{aligned}$$

Hierbei ist $f_{-\infty}^{\text{ell}, (m)} = f_{-\infty}^{\text{ell}} \cdot f_{-\infty}^{(m)}$. Wir haben somit (6.19.2)^{ell} in eine Form gebracht, die dieselbe Gestalt wie (6.19.1)^{ell} hat. Wir können mit ihr genauso verfahren.

Wir beenden den Beweis von 6.19. Das Lemma 6.25 läßt sich auf G und G_{-} anwenden. Folglich treten in beiden Gruppen nur kubische CSG auf. *Zeigen wir, daß die elliptische Teilsommen von (6.19.1) bzw. (6.19.2), in der stabilisierten Form über die gleichen Indexmengen gehen.* Nach (6.24) kann das lokal überprüft werden. Wegen der Wahl der Funktionen $f_{-}^{i, (m)}$ und $f_{-}^{(m)}$ resultiert die Behauptung daher aus 6.28 a). Wir fixieren jetzt die Tamagawamaße auf den einander entsprechenden Elementen von $\mathcal{T}_{st}(G)$ und $\mathcal{T}_{st}(G_{-})$ kompatibel. *Dann stimmen die stabilisierten elliptischen Teilsommen von (6.19.1) und (6.19.2) gliedweise überein.* Das folgt unmittelbar aus 6.28 b), 6.27 und der offensichtlichen Tatsache, daß $c(T, G) = c(T, G_{-})$. Nach (6.25), anwendbar auf G und G_{-} , sind die zentralen Elemente die einzigen singulären Elemente. Der Beitrag eines zentralen Elements zu (6.19.1) ist gleich $\text{vol}(G(Q) Z_1 \backslash G(\mathbb{A})) \cdot f_{-}^{i, (m)}(1)$. Der Beitrag eines zentralen Elements zu (6.19.2) ist gleich

$$\begin{aligned} \text{vol}(G_{-}(Q) Z_C \backslash G_{-}(\mathbb{A}_f)) \cdot f_{-\infty}^{(m)}(1) = \text{vol}(Z(\mathbb{R}) \backslash G_{-}(\mathbb{R}))^{-1} \\ \cdot \text{vol}(G_{-}(Q) Z_1 \backslash G_{-}(\mathbb{A})) \cdot f_{-\infty}^{(m)}(1). \end{aligned}$$

Aber $\text{vol}(G(Q) Z_1 \backslash G(\mathbb{A})) = \text{vol}(G_{-}(Q) Z_1 \backslash G_{-}(\mathbb{A}))$. (Das folgt z.B. weil die Tamagawazahlen von G_{sc} und G_{-sc} gleich 1 sind und der Formel von Ono [29].) Somit folgt aus 6.28 c), daß die Beiträge eines zentralen Elements zu (6.19.1) und (6.19.2) übereinstimmen. Q.E.D.

Wir wenden uns jetzt der Primstelle $\not p_1$ zu. Zunächst folgt aus 5.8 das Pendant zu 6.9 (man beachte, daß die Summanden mit einem ρ_2 -Faktor in 5.8 eine Darstellung der Heckealgebra definieren, die disjunkt zu der von den eindimensionalen automorphen Formen aufgespannten Darstellung ist).

6.29 Korollar.

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{\dim \pi = 1} \rho_2(\pi)_{\#_1} &= 1 \otimes \mathcal{F}(K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C))(-1) \\
\bigoplus_{\dim \Pi = \infty} \rho_2(\Pi)_{\#_1} &= \rho_2 \otimes \mathcal{F}\left(\bigcup_i G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f)/C_-^p \cdot C_-^i\right)(-1) \\
&\quad - \rho_2 \otimes \mathcal{F}\left(\bigcup_i G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f)/C_-^p \cdot C_-^{i, i+1}\right)(-1) \\
&\quad + \rho_2 \otimes \mathcal{F}(G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f)/C_-^p \cdot C_-^{\mathbb{Z}/3})(-1) \\
&\quad - \rho_2 \otimes \mathcal{F}(K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C))(-1).
\end{aligned}$$

Wie in 6.10, 6.11 beweist man die Behauptung (i) bzgl. $\#_1$. Die Behauptung (ii) b) wird wieder mit der Selbergschen Spurformel bewiesen. An die Stelle des Lemmas 6.13 tritt die folgende Aussage.

6.30 Lemma. *Es sei $m > 0$ und $f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^p), C^p)$.*

a) *Falls $3 \nmid m$, so ist $\text{Tr}(f^p \sigma_{\#_1}^m | \mathcal{F}(\bigcup_i \pi_0(\mathcal{M}_{C, \{i\}}))) = 0$. Falls $3 \mid m$, so sei*

$$f_{-p}^{0, (m)} = \text{vol}(C_{-p}^0)^{-1} \cdot \text{char}(C_{-p}^0 \Phi^m C_{-p}^0) \in C_c^\infty(G_-(Q_p))$$

und

$$f_{-}^{0, (m)} = f^p \cdot f_{-p}^{0, (m)} \in C_c^\infty(G_-(\mathbb{A}_f)).$$

Dann ist

$$\text{Tr}(f^p \sigma_{\#_1}^m | \bigcup_i \mathcal{F}(G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f)/C_-^p \cdot C_-^i)) = 3 \cdot \text{Tr}(R_-(f_{-}^{0, (m)})).$$

b) *Falls $3 \nmid m$, so ist $\text{Tr}(f^p \sigma_{\#_1}^m | \mathcal{F}(\bigcup_i \pi_0(\mathcal{M}_{C, \{i, i+1\}}))) = 0$. Falls $3 \mid m$, so sei*

$$f_{-p}^{1, (m)} = \text{vol}(C_{-p}^{01})^{-1} \cdot \text{char}(C_{-p}^{01} \Phi^m C_{-p}^{01}),$$

und

$$f_{-}^{1, (m)} = f^p f_{-p}^{1, (m)}.$$

Dann ist

$$\text{Tr}(f^p \sigma_{\#_1}^m | \bigcup_i \mathcal{F}(G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f)/C_-^{i, i+1})) = 3 \cdot \text{Tr}(R_-(f_{-}^{1, (m)})).$$

c) *Für jedes m sei*

$$f_{-p}^{2, (m)} = \text{vol}(C_{-p}^{\mathbb{Z}/3})^{-1} \cdot \text{char}(C_{-p}^{\mathbb{Z}/3} \Phi^m C_{-p}^{\mathbb{Z}/3}),$$

und

$$f_{-}^{2, (m)} = f^p f_{-p}^{2, (m)}.$$

Dann ist

$$\text{Tr}(f^p \sigma_{\#_1}^m | \mathcal{F}(G_-(Q) \backslash G_-(\mathbb{A}_f)/C_-^p \cdot C_-^{\mathbb{Z}/3})) = \text{Tr}(R_-(f_{-}^{2, (m)})).$$

$$\text{Tr}(f^p \sigma_{\#_1}^m | \mathcal{F}(K^\times \backslash K^\times(\mathbb{A}_f)/\kappa(C))) = \text{Tr}(R_-(f_{-}^{2, (m)})).$$

Die Spuren in a) und b) verschwinden für $3 \nmid m$, weil der Frobenius $\mathcal{M}_{C, \{i\}}$ in $\mathcal{M}_{C, \{i+1\}}$ überführt. Wir definieren:

$$(6.30.1) \quad f_{-}^{(m)} = \begin{cases} f_{-}^{2, (m)}, & \text{falls } 3 \nmid m \\ 3 \cdot f_{-}^{0, (m)} - 3 \cdot f_{-}^{1, (m)} + f_{-}^{2, (m)}, & \text{falls } 3 \mid m. \end{cases}$$

Andererseits wählen wir $f_p^{(m)} = \text{vol}(C_p)^{-1} \text{char}(C_p \Phi^m C_p) \in C_c^\infty(G(Q_p))$. (Hier haben wir, um Bezeichnungen zu sparen, mit Φ ein Element von $G(Q_p)$ bezeichnet, das unter κ auf das gleiche Element wie das Frobeniuselement $\Phi \in G_-(Q_p)$ abgebildet wird.) Diese Funktion hat die Eigenschaft, daß für jede irreduzible zulässige Darstellung π_p von $G(Q_p)$ gilt:

$$\text{Tr}(\pi_p(f_p^{(m)})) = \begin{cases} \chi_{\not\#_1}(p)^m, & \text{falls } \pi_p = \chi_p \circ \kappa \text{ mit einem} \\ & \text{unverzweigten Charakter von } K_p^\times. \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei f_∞^i wie in 6.15. Wir setzen $f^{i, (m)} = f_\infty^i f_p^m$. Dieselben Argumente wie oben zeigen, daß für die Behauptung (ii) in 6.4. es darauf ankommt, den folgenden Satz zu beweisen.

6.31 Satz. Für $i=0, 1$, oder 2 ist

$$\text{Tr}(R(f^{i, (m)})) = \text{Tr}(R_-(f^{(m)})).$$

Es gibt zwei grundlegende Unterschiede zwischen der für die Primstelle $\not\#_1$ betrachteten Verschränkung G_- und der für die Primstelle $\not\#_2$ betrachteten Verschränkung. Erstens ist $G_-(Q_p)$ nicht mehr isomorph zu $G(Q_p)$, so daß wir lokale Bahnenintegrale auf verschiedenen Gruppen miteinander vergleichen müssen, und zweitens enthält G_- möglicherweise andere CSG als nur die vom Typ (III), so daß die Spurformel für G_- instabil ist. Daher ist das folgende Lemma, dessen Beweis von R.P. Langlands stammt, besonders willkommen. In seiner Formulierung nennen wir ein halbeinfaches Element $\delta \in G_-(Q_p)$ vom Typ (I) (oder hyperbolisch), (II) (oder quadratisch) bzw. (III) (oder kubisch) je nachdem, ob die Eigenwerte von δ eine Erweiterung vom Grad 1, 2 oder 3 von Q_p erzeugen.

6.32 Lemma. Es sei $\delta \in G_-(Q_p)$ halbeinfach. Das Bahnenintegral $\Phi(\delta, f_{-p}^{(m)})$ verschwindet, falls nicht

$$(6.32.1) \quad \text{ord} \circ \kappa(\delta) = (m, 0).$$

In den folgenden Aussagen sei (6.32.1) erfüllt.

(i) Es sei δ kubisch regulär und es sei $T = G_{-\delta}$ und $T(0) \subset T(Q_p)$ die maximale kompakte Untergruppe. Es sei

$$e_\delta = e_T = [T(Q_p) : Z(Q_p) \cdot T(0)].$$

Dann ist

$$\Phi(\delta, f_{-p}^{(m)}) = \frac{3}{e_T} \text{vol}(T(0))^{-1}.$$

(ii) Es sei δ quadratisch regulär hyperbolisch regulär. Dann ist $\Phi(\delta, f_{-p}^{(m)}) = 0$.

(iii) Es sei δ quadratisch singulär. Dann ist $\Phi(\delta, f_{-p}^{(m)}) = 0$.

(iv) Es sei δ zentral. Dann ist m durch 3 teilbar und

$$\Phi(\delta, f_{-p}^{(m)}) = \text{vol}(C_{-p}^0)^{-1} \cdot (p-1)^2 \cdot (p+1).$$

Beweis: (i) Die übliche Methode [23] der Berechnung von Bahnenintegralen mit Hilfe des Bruhat-Tits-Gebäudes $\mathcal{X}$ von $SL(3, Q_p)$ zeigt: Falls $3 \mid m$, so ist

$$\Phi(\delta, f_{-p}^{0, (m)}) = \frac{1}{e_T \cdot \text{vol}(T(0))} \text{card } \mathcal{X}^{0\delta}.$$

$$\Phi(\delta, f_{-p}^{1, (m)}) = \frac{1}{e_T \cdot \text{vol}(T(0))} \text{card } \mathcal{X}^{1\delta}.$$

$$\Phi(\delta, f_{-p}^{2, (m)}) = \frac{3}{e_T \cdot \text{vol}(T(0))} \text{card } \mathcal{X}^{2\delta}.$$

Hier bezeichnet $\mathcal{X}^i$ die Menge der i -Simplizes von $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}^{i\delta}$ die Menge der von δ fixierten i -Simplizes. Wir haben dabei benutzt, daß der Index von C_{-p}^S in seinem Normalisator gleich 3 ist, falls $S = \mathbb{Z}/3$, und gleich 1 sonst. Wir erhalten also für $3 \mid m$

$$\Phi(\delta, f_{-p}^{(m)}) = \frac{3}{e_T} \text{vol}(T(0))^{-1} \cdot E - P(\mathcal{X}^\delta).$$

Die Euler-Poincaré-Charakteristik von $\mathcal{X}^\delta$ ist gleich 1, weil (die geometrische Realisierung von) $\mathcal{X}^\delta$ kontrahierbar ist [18]. Falls $3 \nmid m$, so erhalten wir:

$$\Phi(\delta, f_{-p}^{2, (m)}) = \frac{1}{e_T \cdot \text{vol}(T(0))} \text{card } \{\Delta \in \mathcal{X}^2 \mid \delta \cdot \Delta = s\Delta\}.$$

Hier bezeichnet $s\Delta$ das 2-Simplex, das aus Δ durch eine Drehung von 60° um seinen Schwerpunkt entsteht. (Eine Orientierung von Δ ist durch die Numerierung der Ecken p_0, p_1, p_2 der fundamentalen Kammer definiert.) Man überzeugt sich leicht, daß die Menge der von δ gedrehten 2-Simplizes nur aus der fundamentalen Kammer besteht.

(ii) Es sei δ hyperbolisch regulär. Es sei $T = G_\delta$ und $T(0)$ die maximale kompakte Untergruppe von T . Die Untergruppe $Z(Q_p)T(0)$ von $T(Q_p)$ besitzt ein direktes Komplement T_i , das isomorph zu $\mathbb{Z}^2$ ist. Auf dem zu T assoziierten Apartment $\mathfrak{A}_T \subset \mathcal{X}$ operiert T_i als Gruppe von Translationen. Es sei $3 \mid m$. Wie in (i) erhalten wir, daß der Wert von $\Phi(\delta, f_{-p}^{(m)})$ ein Vielfaches von $E - P(\mathcal{X}^\delta \bmod T_i)$ ist. Wir zeigen, daß diese Euler-Poincaré-Charakteristik verschwindet. Zunächst ist $\mathfrak{A}_T \subset \mathcal{X}^\delta$ und die geometrische Realisierung von $\mathfrak{A}_T$ mit seiner T_i -Aktion ist einfach $\mathbb{R}^2$ mit der Wirkung des Gitters $\mathbb{Z}^2$. Es folgt, daß $E - P(\mathfrak{A}_T \bmod T_i) = E - P(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) = 0$. Die Behauptung folgt, weil die Abbildung $r: \mathcal{X}^\delta \rightarrow \mathfrak{A}_T$, die jedem Punkt (der expliziten geometrischen Realisierung) den ihm nächstgelegenen Punkt aus $\mathfrak{A}_T$ zuordnet, eine stetige Retraktion ist, die mit der Aktion von T_i vertauschbar ist. Es sei $3 \nmid m$. Wie in (i) erhalten wir, daß der Wert von $\Phi(\delta, f_{-p}^{(m)})$ ein Vielfaches von $\text{card } \{\Delta \in \mathcal{X}^2 \bmod T_i \mid \delta \Delta = s\Delta\}$ ist. Aber ein hyperbolisches Element kann keine Kammer drehen. Der Beweis für ein quadratisch reguläres Element ist analog. (Statt des Apartments $\mathfrak{A}_T$ benutzt man das Bild des Gebäudes eines Levifaktors einer maximalen parabolischen Untergruppe von G in $\mathcal{X}$.)

(iii) Die Behauptung folgt aus (ii) und dem Keimentwicklungsprinzip in einem beliebigen singulären Element ([32]).

(iv) Die erste Behauptung ist offensichtlich. Folglich ist

$$\Phi(\delta, f_{-p}^{(m)}) = \frac{3}{\text{vol}(C_{-p}^0)} - \frac{3}{\text{vol}(C_{-p}^{01})} + \frac{1}{\text{vol}(C_{-p}^{\mathbb{Z}/3})}.$$

Die Behauptung folgt jetzt, weil

$$\begin{aligned} [C_{-p}^0 : C_{-p}^{01}] &= \text{card } \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_p) = p^2 + p + 1 \\ [C_{-p}^{01} : C_{-p}^{\mathbb{Z}/3}] &= \text{card } \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) = p + 1. \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Das folgende Lemma gibt den Wert der Bahnenintegrale für $G(Q_p)$.

6.33 Lemma. *Es sei $\gamma \in G(Q_p)$. Das Bahnenintegral $\Phi(\gamma, f_p^{(m)})$ verschwindet, falls nicht*

$$(6.33.1) \quad \text{ord} \circ \kappa(\gamma) = (m, 0).$$

In den folgenden Aussagen sei (6.33.1) erfüllt.

(i) *Es sei γ regulär und es sei $T = G_\gamma$ und $T(0) \subset T(Q_p)$ die maximale kompakte Untergruppe. Es sei $d_\gamma = d_T = [G(Q_p) : C_p T(Q_p)]$. Dann ist*

$$\Phi(\gamma, f_p^{(m)}) = d_T \text{vol}(T(0))^{-1}.$$

(ii) *Es sei γ zentral. Dann ist m durch 3 teilbar und $\Phi(\gamma, f_p^{(m)}) = \text{vol}(C_p)^{-1}$.*

Beweis: (i) Offenbar ist $\Phi(\gamma, f_p^{(m)}) = \text{vol}(C_p)^{-1} \cdot \text{vol}(T(Q_p) \setminus G(Q_p))$. Man überzeugt sich leicht, daß die rechte Seite der angegebene Ausdruck ist. Die Behauptung (ii) ist offensichtlich.

Wir beachten, daß in den Gruppen $G(Q_p)$ und $G_-(Q_p)$ stabile Konjugationsklassen einfach Konjugationsklassen sind ($G_-(Q_p) = GL(3, Q_p)$). Eine Konjugationsklasse in $G_-(Q_p)$ kommt von $G(Q_p)$ genau dann, wenn sie entweder zentral oder kubisch regulär ist. Die vorhergehenden Hilfssätze zeigen somit, daß die beiden Seiten von 6.31 in der stabilisierten Form Summen über die gleichen Indextmengen sind. In der Tat läßt sich der für die Primstelle p_2 geführte Beweis unmittelbar auf den hier vorliegenden Fall übertragen. Für den Vergleich der lokalen Bahnenintegrale in p wird hierfür noch das folgende Lemma benötigt.

6.34 Lemma. a) *Es sei $\delta \in G_-(Q_p)$ ein kubisches reguläres Element. Dann ist $d_\delta \cdot e_\delta = 3$.*

$$\text{b) } \text{vol}(C_p) = \frac{1}{(p-1)^2 \cdot (p+1)} \cdot \text{vol}(C_{-p}^0).$$

Beweis: a) Es sei T der Zentralisator von δ , aufgefaßt als Untergruppe von G oder G_- . Dann ist $T \cap G_1$ die multiplikative Gruppe einer kubischen Erweiterung L von Q_p . Man rechnet nach, daß $e_T = \text{Verzweigungsindex von } L \text{ und } d_T = \text{Trägheitsindex von } L$ (vgl. [18]). Daraus folgt a).

b) Es seien $C_{1p} = C_p \cap G_1(Q_p)$ und $C_{1-p}^0 = C_{-p}^0 \cap G_{1-}(Q_p)$. Weil

$$\text{vol}(C_p)/\text{vol}(C_{-p}^0) = \text{vol}(C_{1p})/\text{vol}(C_{1-p}^0),$$

folgt die Behauptung aus dem Vergleich der Volumina der maximalen kompakten Untergruppe C_{1-p}^0 von $GL(3, Q_p)$ und der maximalen kompakten Untergruppe der multiplikativen Gruppe einer zentralen Divisionsalgebra vom Grad 3^2 über Q_p (siehe z.B. [4] für das Analogon bzgl. $GL(2, Q_p)$). Q.E.D.

Der Beweis von Satz 6.4. ist damit beendet.

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Fall B. In diesem Fall ist die Shimuravarietät $M_{D,C}$ sogar über Q definiert. Folglich assoziiert die Methode der kontinuierlichen Kohomologie zu einer Menge Π von automorphen Darstellungen eine $\bar{Q}$ -Darstellung $\rho^i(\Pi)$ von $\text{Gal}(\bar{Q}/Q)$.

$$\Pi = \{\pi \in L^2(D^\times(Q)Z(\mathbb{R})\backslash D^\times(\mathbb{A})) \mid \pi\text{-Anteile identisch}\}.$$

Die Darstellung $\rho^i(\Pi)$ hat die Dimension $\sum_{\pi \in \Pi} m(\pi) \cdot \dim H^i(\mathfrak{g}, C_\infty; \pi_\infty)$. In diesem Fall ist bekannt, daß Π immer aus nur einem Element π besteht und daß $m(\pi)=1$ ([15]). Die irreduziblen zulässigen Darstellungen von $D^\times(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}) = PGL(2, \mathbb{R}) \times PGL(2, \mathbb{R})$, die Kohomologie liefern, sind die folgenden [4].

- *die eindimensionalen Darstellungen:* sie liefern einen 1-dimensionalen Beitrag in den Dimensionen 0 und 4 und einen 2-dimensionalen Beitrag in der Dimension 2.

- *die Darstellung der diskreten Reihe mit trivialem infinitesimalem Charakter:* sie liefert einen 4-dimensionalen Beitrag in der Dimension 2.

Wir erhalten das folgende Analogon zu 6.3.

6.35 Korollar. *Es sei π eine automorphe Darstellung von $D^\times(Q)Z(\mathbb{R})\backslash D^\times(\mathbb{A})$, die zur Kohomologie von $M_{D,C}$ beiträgt. Dann gibt es nur die folgenden beiden Möglichkeiten.*

a) π ist eindimensional. Dann identifiziert sich π mittels des Homomorphismus $Nm_D^0: D^\times(\mathbb{A}) \rightarrow F^\times(\mathbb{A})$ mit einem Charakter von $F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f)/Nm(C)$. Der Charakter ist unverzweigt in p .

b) π ist unendlichdimensional. Dann ist π_∞ in der diskreten Reihe und π_p ist von der Form $\pi_p = \chi_p \circ Nm^0$ für einen unverzweigten Charakter χ_p von $F_p^\times$.

Es sei ${}^L G$ die L -Gruppe, die zu $D^\times$, aufgefaßt als algebraische Gruppe über Q , gehört. Wir fixieren eine Einbettung von F nach Q und eine algebraische Abschließung $\bar{Q}_p$ von Q_p , die $\bar{Q}$ umfaßt. Wie im Fall A definiert der Homomorphismus h_0 , der zur betrachteten Shimuravarietät führt, eine Darstellung r von ${}^L G$. Es gibt einen solchen Isomorphismus von ${}^L G^0$ mit $GL(2, \mathbb{C}) \times GL(2, \mathbb{C})$, daß r^0 die offensichtliche Darstellung in $X = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ ist. Die L -Gruppe ${}^L G$ ist (genauer: kann so genommen werden) das halbdirekte Produkt $[GL(2, \mathbb{C}) \times GL(2, \mathbb{C})] \otimes \text{Gal}(F/Q)$, wobei das nichttriviale Element $\sigma \in \text{Gal}(F/Q)$ mittels $\sigma(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ operiert. Das Bild von σ unter r ist der Operator

$$r(\sigma): z_1 \otimes z_2 \mapsto z_2 \otimes z_1, \quad z_1 \otimes z_2 \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2.$$

Als lokale L -Gruppe ${}^L G_p$ können wir ${}^L G^0 \times \text{Gal}(F_p/Q_p)$ nehmen.

Es sei $G^* = R_{F/Q}(GL(2))$. Die L -Gruppen von G und G^* sind identisch. Eine eindimensionale automorphe Darstellung, π , von G kann als eindimensionale Darstellung, π^* , von G^* aufgefaßt werden. Wir bezeichnen mit ρ_p die Einschränkung einer $\bar{Q}_l$ -Darstellung ρ von $\text{Gal}(\bar{Q}/Q)$ auf $\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p)$. Um die L -Funktion von ρ als Element von $\mathbb{C}(q^{-s})$ auffassen zu können, wählen wir einen Isomorphismus $\iota: \bar{Q}_l \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$.

Der folgende Satz liefert in dem jetzt betrachteten Fall B den gesuchten Ausdruck der lokalen Zetafunktion von $M_{D,C}$ als Produkt von lokalen automorphen L -Funktionen.

6.36 Satz. (i) Falls π eindimensional ist, so ist

$$\prod_{j=0}^2 L(s, \rho^{2j}(\pi)_p) = L(s-1, \pi_p^*, r_p).$$

(ii) Falls π unendlichdimensional ist, so ist

$$L(s, \rho^2(\pi)_p) = L(s-1, \pi_p, r_p).$$

Wir berechnen zunächst wieder explizit die rechten Seiten. Das Funktorialitätsprinzip ordnet der Darstellung $\pi_p^* = \chi_p \circ \det$ von $GL(2, F_p)$, aufgefaßt als Gruppe der rationalen Punkte einer algebraischen Gruppe über F_p , den folgenden Homomorphismus zu:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\pi_p^*): \mathfrak{B}(\bar{Q}_p/F_p) = SL(2, \mathbb{C}) \times W(\bar{Q}_p/F_p) &\rightarrow GL(2, \mathbb{C}) \\ (s, w) &\mapsto \chi_p(|w|) \cdot \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & 0 \\ 0 & |w|^{-1/2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entsprechend ordnet das Funktorialitätsprinzip der Darstellung $\pi_p = \chi_p \circ Nm^0$ von $D_p^\times$, aufgefaßt als Gruppe der rationalen Punkte einer algebraischen Gruppe über F_p den folgenden Homomorphismus zu:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\pi_p): \mathfrak{B}(\bar{Q}_p/F_p) &\rightarrow GL(2, \mathbb{C}) \\ (s, w) &\mapsto \chi_p(|w|) \cdot s. \end{aligned}$$

Wir wenden das übliche Rezept an (z.B. [25], p. 131), um aus $\tilde{\varphi}(\pi_p^*)$ und $\tilde{\varphi}(\pi_p)$ die Homomorphismen $\varphi(\pi_p^*)$ und $\varphi(\pi_p)$ von $\mathfrak{B}(\bar{Q}_p/Q_p)$ nach ${}^L G_p$ zu bestimmen, die das Funktorialitätsprinzip den Darstellungen der rationalen Punkte der durch Restriktion der Skalare erhaltenen algebraischen Gruppen über Q_p zuordnet. Wir verwenden die offensichtliche Basis $e_i \otimes e_j$ von X .

Es sei $\sigma_p \in W(\bar{Q}_p/Q_p)$ eine Liftung des Frobenius. Dann ist

$$\varphi(\pi_p^*)(\sigma_p) = [1, \tilde{\varphi}(\pi_p^*)(\sigma_p^2)] \times \sigma_p \in [GL(2, \mathbb{C}) \times GL(2, \mathbb{C})] \times \text{Gal}(F_p/Q_p)$$

und folglich (wir benutzen, daß $|p|_{F_p} = p^{-2}$):

$$r \circ \varphi(\pi_p^*)(\sigma_p) = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 0 & \alpha \\ & \beta & 0 \\ & & & \beta \end{pmatrix},$$

mit $\alpha = \chi_p(p) \cdot p$, $\beta = \chi_p(p) \cdot p^{-1}$. Folglich ist

$$L(s-1, \pi_p^*, r_p) = \frac{1}{1 - \chi_p(p) \cdot p^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - \chi_p(p)^2 \cdot p^{-2(s-1)}} \cdot \frac{1}{1 - \chi_p(p) \cdot p^{-(s-2)}}.$$

Es sei $\bar{\chi}_p$ die Einschränkung von χ_p auf $Q_p^\times \subset F_p^\times$. Dann ist

$$L(s, \bar{\chi}_p \cdot v_{F_p/Q_p}) = \frac{1}{1 + \chi_p(p) \cdot p^{-s}}.$$

6.37 Lemma. (i) Die rechte Seite von 3.36 (i) ist gleich

$$L(s, \bar{\chi}_p) \cdot L(s-1, \bar{\chi}_p \oplus \bar{\chi}_p \cdot v_{F_p/Q_p}) \cdot L(s-2, \bar{\chi}_p).$$

(ii) Die rechte Seite von 3.36 (ii) ist gleich

$$L(s-1, \bar{\chi}_p \cdot v_{F_p/Q_p}) \cdot L(s, \bar{\chi}_p).$$

Beweis. (i) ist bereits klar. Man überzeugt sich unschwer, daß man einen surjektiven Homomorphismus von Darstellungen von $\mathfrak{B}(\bar{Q}_p/Q_p)$ hat.

$$\begin{aligned} r \circ \varphi(\pi_p) &\rightarrow 1 \otimes (\chi_p \circ \text{Ver}) \cdot v_{F_p/Q_p} \\ \sum c_{ij} \cdot e_i \otimes e_j &\mapsto c_{12} - c_{21}. \end{aligned}$$

Der Kern ist isomorph zu $\rho_2 \otimes \chi_p \circ \text{Ver}$. Hierbei ist Ver der Verlagerungshomomorphismus $\text{Ver}: W(\bar{Q}_p/Q_p)^{ab} \rightarrow W(\bar{Q}_p/F_p)^{ab}$. Unter der Identifikation von $W(\bar{Q}_p/Q_p)^{ab}$ mit $Q_p^\times$ ist $\chi_p \circ \text{Ver}$ gleich $\bar{\chi}_p$. Wir führen folgende irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{B}(\bar{Q}_p/Q_p)$ der Dimension 1 und 3 ein.

$$(3.37.1) \quad r_1(\pi_p)(s, w) = \bar{\chi}_p(w) \cdot v_{F_p/Q_p}(w)$$

$$(3.37.2) \quad r_2(\pi_p)(s, w) = \bar{\chi}_p(w) \cdot \rho_2(s).$$

Dann ist

$$r \circ \varphi(\pi_p) = r_1(\pi_p) \oplus r_2(\pi_p).$$

Die Berechnung der L -Funktionen für $r_1(\pi_p)$ und $r_2(\pi_p)$ fällt bei folgender Rechnung mit ab.

3.38 Lemma. Es sei $\sigma_p = \begin{pmatrix} p^{-1/2} \\ p^{1/2} \end{pmatrix} \times \sigma_p \in \mathfrak{B}(\bar{Q}_p/Q_p)$. Es ist für $m > 0$,

$$(i) \quad \text{Tr}(\sigma_p^m | \bar{\chi}_p \oplus \bar{\chi}_p \cdot v) = \chi_p(p)^m - \chi_p(p)^m.$$

$$(ii) \quad \text{Tr}(\sigma_p^m | r_1(\pi_p)) = (-1)^m \cdot \chi_p(p)^m.$$

$$(iii) \quad \text{Tr}(\sigma_p^m | r_2(\pi_p)) = \chi_p(p)^m (p^m + 1 + p^{-m}).$$

Beweis. (i) und (ii) sind offensichtlich. Das Bild von σ_p^m unter $r_2(\pi_p)$ ist

$\chi_p(p)^m \cdot \begin{pmatrix} p^{-1} & & \\ & 1 & \\ & & p \end{pmatrix}^m$. Das beweist (iii). Der Invariantenraum unter der Verzweigungsgruppe ist der zu p^{-1} gehörige Eigenraum. Daraus folgt 6.37.

Es sei $\pi = \chi \circ Nm^0$ eine eindimensionale automorphe Form. Aus der Beschreibung der Fundamentalgruppe von $\mathcal{M}_C$ (4.5(iv)) folgt leicht, daß $\rho^0(\pi)_p = \bar{\chi}_p$ und also $\rho^4(\pi)_p = \bar{\chi}_p(-2)$. Deshalb folgt aus 6.37, daß die Behauptung des Satzes 6.36 äquivalent zu der folgenden Aussage ist.

6.39 Satz. (i) Falls π eine eindimensionale automorphe Darstellung ist, so ist

$$\rho^2(\pi)_p = \bar{\chi}_p(-1) \oplus \bar{\chi}_p \cdot v_{F_p/Q_p}(-1).$$

(ii) Falls π eine unendlichdimensionale Darstellung ist, so ist

$$\rho^2(\pi)_p = r_1(\pi_p)(-1) \oplus r_2(\pi_p)(-1).$$

(Äquivalenz der zugehörigen halbeinfachen Darstellungen von $\mathfrak{B}(Q_{p, \text{cl}}/Q_p)$.)

Wir begnügen uns mit einer Skizze des Beweises, da das Argument ähnlich wie im Fall A ist. Zunächst folgt aus 5.13 das folgende Analogon zu 6.9.

6.40 Korollar.

$$\begin{aligned} \bigoplus_{\dim \pi = 1} \rho^2(\pi)_p &= 1 \otimes \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p); \mathcal{F}(F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f)/NmC))(-1) \\ \bigoplus_{\dim \pi = \infty} \rho^2(\pi)_p &= 1 \otimes \mathcal{F}(D_-^\times \backslash D_-^\times(\mathbb{A}_f)/C_-) \cdot v_{F_p/Q_p}(-1) \\ &\quad - 1 \otimes \mathcal{F}(F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f)/NmC) \cdot v_{F_p/Q_p}(-1) \\ &\quad + \rho_2 \otimes \mathcal{F}(D_-^\times \backslash D_-^\times(\mathbb{A}_f)/C_-)(-1) \\ &\quad - \rho_2 \otimes \mathcal{F}(F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f)/NmC)(-1) \end{aligned}$$

(Gleichheiten in der Grothendieckgruppe der zulässigen Darstellungen von $\mathcal{H}(D^\times(\mathbb{A}_f^p), C^p) \times \mathfrak{B}(Q_{p, \text{cl}}/Q_p)$.)

6.41 Satz. Es sei $f \in \mathcal{H}(D^\times(\mathbb{A}_f), C)$ und $m > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Tr}(f \cdot \sigma_p^m | 1 \otimes \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p); \mathcal{F}(F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f)/NmC))) \\ = \text{Tr}(f \cdot \sigma_p^m | \bigoplus_{\dim \pi = 1} (\bar{\chi}_p \oplus \bar{\chi}_p \cdot v_{F_p/Q_p})). \end{aligned}$$

Beweis. Offenbar ist $\mathcal{F}(F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f)/NmC) = \bigoplus_{\dim \pi = 1} \bar{\chi}_p$ eine direkte Summe von induzierten Darstellungen, sogar von regulären Darstellungen. Sei

$$\mathcal{F} = \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/K); 1)$$

ein direkter Summand. Dann ist

$$\mathcal{F} \otimes (1 \oplus v_{F_p/Q_p}) = \text{Ind}(\text{Gal}(\bar{Q}_p/Q_p), \text{Gal}(\bar{Q}_p/F_p); \mathcal{F}).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Aus diesem Satz folgt die Behauptung (i) in 6.39. Um die Behauptung (ii) zu beweisen, wenden wir die Selberg'sche Spurformel an. Es genügt, den folgenden Satz zu beweisen (die $SL(2, \mathbb{C})$ -Faktoren beider Seiten sind gleich):

6.42 Satz. Es sei $f^p \in \mathcal{H}(D^\times(\mathbb{A}_f), C^p)$ und $m > 0$.

$$(i) \quad \text{Tr}(f^p \sigma_p^m | 1 \otimes \mathcal{F}(D_-^\times \backslash D_-^\times(\mathbb{A}_f)/C_-) - 1 \otimes \mathcal{F}(F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f)/Nm C)) \\ = \text{Tr}(f^p \sigma_p^m | \bigoplus_{\dim \pi = \infty} r_1(\pi_p) \cdot \nu_{F_p/Q_p}^{-1}),$$

$$(ii) \quad \text{Tr}(f^p \sigma_p^m | \rho_2 \otimes \mathcal{F}(D_-^\times \backslash D_-^\times(\mathbb{A}_f)/C_-) - \rho_2 \otimes \mathcal{F}(F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f)/Nm C)) \\ = \text{Tr}(f^p \sigma_p^m | \bigoplus_{\dim \pi = \infty} r_2(\pi_p)).$$

Wir übertragen in offensichtlicher Weise die für den Fall A benutzten Bezeichnungen auf die jetzt vorliegende Situation. Das folgende Lemma ist für hinreichend kleines C^p richtig. Es folgt aus der Beschreibung der Aktion des Frobenius (4.5 (iv) und (v)).

6.43 Lemma. Es sei

$$f_{-p}^{(m)} = \text{vol}(C_{-p})^{-1} \cdot \text{char}(C_{-p} \cdot \Phi^m \cdot C_{-p}) \in C_c^\infty(D_-^\times(Q_p))$$

und $f_-^{(m)} = f^p f_{-p}^{(m)} \in C_c^\infty(D_-^\times(\mathbb{A}_f))$. Dann ist

- a) $\text{Tr}(f^p \sigma_p^m | \mathcal{F}(D_-^\times \backslash D_-^\times(\mathbb{A}_f)/C_-)) = \text{Tr}(R_-(f_-^{(m)}))$,
- b) $\text{Tr}(f^p \sigma_p^m | \mathcal{F}(F_+^\times \backslash F^\times(\mathbb{A}_f)/Nm C)) = \text{Tr}(R_-^1(f_-^{(m)}))$.

6.44 Korollar. a) Die linke Seite in 6.42 (i) ist gleich

$$\text{Tr}(R_-(f_-^{(m)})) - \text{Tr}(R_-^1(f_-^{(m)})).$$

b) Die linke Seite in 6.42 (ii) ist gleich

$$[\text{Tr}(R_-(f_-^{(m)})) - \text{Tr}(R_-^1(f_-^{(m)}))] (p^m + 1 + p^{-m}).$$

Um auch die rechten Seiten von 6.42 in eine Form zu bringen, auf die die Selberg'sche Spurformel angewendet werden kann, verwenden wir den Teil a) des folgenden Lemmas (s. z.B. [4]):

6.45 Lemma. a) Es gibt eine Funktion $f_\infty \in C_c^\infty(D^\times(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}))$, so daß für eine irreduzible zulässige Darstellung π_∞ von $D^\times(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R})$ gilt:

$$\text{Tr}(\pi_\infty(f_\infty)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \pi_\infty \text{ kohomologisch trivial} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Es sei $\gamma_\infty \in D^\times(\mathbb{R})$ halbeinfach. Das Bahnenintegral von f_∞ hat folgenden Wert:

$$\Phi(\gamma_\infty, f_\infty) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \gamma_\infty \text{ hyperbolisch} \\ \text{vol}(D_{\gamma_\infty}^\times(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}))^{-1}, & \text{falls } \gamma_\infty \text{ elliptisch} \\ \text{vol}(D_-^\times(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R}))^{-1}, & \text{falls } \gamma_\infty \text{ zentral.} \end{cases}$$

Es sei $f_p^{(m)} = f_{-p}^{(m)} \in C_c^\infty(D^\times(Q_p))$. Dann ist für eine irreduzible zulässige Darstellung π_p von $D^\times(Q_p)$

$$\mathrm{Tr}(\pi_p(f_p^{(m)})) = \begin{cases} \chi_p(p)^m, & \text{falls } \pi_p = \chi_p \circ Nm^0 \text{ mit einem} \\ & \text{unverzweigten Charakter } \chi_p \text{ von } F_p^\times \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei $f^{(m)} = f_\infty \cdot f^p \cdot f_p^{(m)}$. Aus 6.45 a) und 6.38 erhalten wir folgende Aussage.

6.46 Korollar. a) Die rechte Seite in 6.42 (i) ist gleich

$$\mathrm{Tr}(R(f^{(m)})) - \mathrm{Tr}(R^1(f^{(m)})).$$

b) Die rechte Seite in 6.42 (ii) ist gleich

$$[\mathrm{Tr}(R(f^{(m)})) - \mathrm{Tr}(R^1(f^{(m)}))] (p^m + 1 + p^{-m}).$$

Weil offenbar $\mathrm{Tr}(R^1(f^{(m)})) = \mathrm{Tr}(R_-^1(f_-^{(m)}))$, haben wir schließlich den zu beweisenden Satz auf folgende Aussage zurückgeführt.

6.47 Satz. $\mathrm{Tr}(R(f^{(m)})) = \mathrm{Tr}(R_-(f_-^{(m)}))$.

Zum Beweis dieses Satzes entwickelt man beide Seiten in die Selberg'sche Form. Dann benutzt man 6.45 b), um zu zeigen, daß beide Summen gliedweise übereinstimmen. Damit ist der Beweis von Satz 6.36 beendet.

Literatur

1. Artin, M.: Grothendieck topologies. Harvard University 1962
2. Borel, A.: Automorphic L -functions. Proc. of Symp. Pure Math. **33**, (T.2) 27–61 (1979)
3. Borel, A., Wallach, N.: Continuous Cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups. Ann. of Math. Studies, Princeton University Press 1980
4. Casselman, W.: The Hasse-Weil ζ -function of some moduli varieties of dimension greater than one. Proc. of Symp. Pure Math. **33**, (T.2) 141–163 (1979)
5. Clemens, H.: Degenerations of Kähler manifolds. Duke Math. J. **44**, 215–290 (1977)
6. Deligne, P.: Théorie de Hodge I; Actes ICM Nice; t. I, p. 425–430, Gauthier-Villars 1970
7. Deligne, P.: Travaux de Shimura, Sem. Bourbaki 389. Lecture Notes, vol. 244. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
8. Deligne, P.: Travaux de Shimura (ursprüngliche Fassung); unveröffentlicht (1971)
9. Deligne, P.: La conjecture de Weil II; Pub. Math. IHES, **52** (1981)
10. Deligne, P.: Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L . Lecture Notes, vol. 349. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
11. Drinfeld, V.G.: Coverings of p -adic symmetric domains. Functional Anal. Appl. **10**, 107–115 (1976)
12. Flath, D.: Decomposition of representations into tensor products. Proc. Symp. Pure Math. **33**, (T.1) 179–183 (1979)
13. Gelbart, S., Jacquet, H.: Forms of $GL(2)$ from the analytic point of view. Proc. Symp. Pure Math. **33**, (T.1) 213–251 (1979)
14. Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. **9**, 119–221 (1957)
15. Jacquet, H., Langlands, R.P.: Automorphic Forms on $GL(2)$. Lecture Notes, vol. 114. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
16. Kazhdan, D.: Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. Funkt. Analysis and Its Applic. **1**, 63–65 (1967)
17. Kneser, M.: Lectures on Galois cohomology of classical groups. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1969

18. Kottwitz, R.E.: Orbital integrals on GL_3 . Am J. Math. **102**, 327–384 (1980)
19. Langlands, R.P.: On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. Notes, IAS (1973)
20. Langlands, R.P.: On the zeta-functions of some simple Shimura varieties. Can. J. Math. **31**, 1121–1216 (1979)
21. Langlands, R.P.: Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen. (engl.). Proc. Symp. Pure Math. **33**, (T.2) 205–246 (1979)
22. Langlands, R.P.: Stable conjugacy: definitions and lemmas. Can. J. Math. **31**, 700–725 (1979)
23. Langlands, R.P.: Base Change for $GL(2)$. Annals of Math. Studies, Princeton 1979
24. Langlands, R.P.: Shimura varieties and the Selberg Trace formula. Can. J. Math. **29**, 1292–1299 (1977)
25. Langlands, R.P.: Sur la mauvaise réduction d'une variété de Shimura. Astérisque **65**, 125–154 (1979)
26. Langlands, R.P.: Les débuts d'une formule de traces stable. Notes pour un cours donné à l'Ecole Normale des Jeunes Filles, 1980
27. Mumford, D.: An algebraic surface with K ample, $(K^2)=9$, $p_g=q=0$. Am. J. Math. **101**, 233–244 (1979)
28. Mustafin, G.: Nonarchimedean uniformization. Math. USSR-Sb. **34**, 187–214 (1978)
29. Ono, T.: On Tamagawa numbers. Proc. Symp. Pure Math. **9**, 122–132 (1966)
30. Rapoport, M.: On the bad reduction of Shimura varieties associated to certain unitary groups. In Vorbereitung
31. Rogawski, J.: An application of the building to orbital integrals. Comp. Mat. **42**, 417–423 (1981)
32. Rogawski, J.: Automorphic forms on a unitary group in three variables. In Vorbereitung
33. Schmid, W.: Variation of Hodge structures: the singularities of the period mapping; Invent. Math. **22**, 211–320 (1973)
34. Serre, J.-P.: Facteurs locaux des fonctions zéta des variétés algébriques (définitions et conjectures); Sem. Delange-Pisot-Poitou, 1970
35. Shelstad, D.: Characters and inner forms of a quasi-split group over $\mathbb{R}$. Comp. Math. **39**, 11–46 (1979)
36. Steenbrink, J.: Limits of Hodge structures. Invent. Math. **31**, 229–257 (1976)
37. Tate, J.: Number theoretic background. Proc. Symp. Pure Math. **33**, (T.2) 3–26 (1979)
38. Wallach, N.: On the Selberg trace formula. Bull. AMS **82**, 171–195 (1976)
39. Zink, Th.: Über die schlechte Reduktion einer Shimuravarietät. Comp. Math. im Druck (1982)

Abkürzungen

- SGA 4 Springer Lecture Notes 269, 270, 305
 SGA 4 $\frac{1}{2}$ Springer Lecture Notes 569
 SGA 5 Springer Lecture Notes 589
 SGA 7 Springer Lecture Notes 288, 340