

Complément à l'article de P. Deligne «La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$ »

M. Rapoport (Bures-sur-Yvette)

1. Introduction

Soit X_0 une variété algébrique projective et lisse sur un corps fini qui se relève *avec sa polarisation* en une variété algébrique projective et lisse X sur $\mathbb{C}$. Lorsque la structure de Hodge de $H^k(X, \mathbb{C})$ est très simple, les méthodes de [2] permettent parfois de démontrer la conjecture de Weil sur les valeurs absolues des valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius de $H^k(X_0, \mathbb{Q}_\ell)$.

Désignons par ℓ le niveau de Hodge de $H^k(X, \mathbb{C})$: C'est la borne supérieure des entiers $|q - p|$ pour $p + q = k$ et $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega_X^p) \neq 0$.

k et ℓ ont la même parité et $\ell = -\infty$ si et seulement si $H^k(X, \mathbb{C}) = 0$. Si X est une intersection complète dans un espace projectif, on prendra $k = \dim X$ ($H^k(X, \mathbb{C})$ est le seul groupe de cohomologie intéressant de X [8]), et on appellera ℓ le niveau de Hodge de X .

Si $\ell = 0$ et que X est une intersection complète de dimension $2p$, on sait que $H^{2p}(X)$ est engendré par les classes de cohomologie des cycles algébriques de dimension p sur X (ceci se vérifie cas par cas). On en déduit aisément la conjecture de Weil pour X_0 .

Si $\ell = 1$ et que X est une intersection complète de dimension $2p + 1$, Deligne a récemment vérifié que X_0 vérifie la conjecture de Weil. La démonstration est analogue à celle de [2], en fait plus simple.

On donne au § 2 la liste des intersections complètes pour lesquelles $\ell \leq 1$.

Si $\ell = 2$ et si on pose $k = 2m$, la démonstration de [2] montre que si les conditions D.1 et D.2 ci-dessous sont vérifiées, alors les valeurs absolues des valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius de la *partie primitive* de $H^k(X_0, \mathbb{Q}_\ell)$ vérifient la conjecture de Weil. (Il a un sens de parler de la partie primitive d'un groupe de cohomologie car les variétés algébriques projectives et lisses qui se relèvent en caractéristique zéro vérifient le «théorème de Lefschetz vache».)

On détermine au § 2 les intersections complètes qui vérifient D.1 et au § 3 les intersections complètes qui vérifient D.1 et D.2: ce sont certaines surfaces $K3$ et l'hypersurface de degré 3 dans $\mathbb{P}^5$.

Condition D.1. Les nombres de Hodge $h_0^{p,q}$ de la partie primitive de $H^k(X, \mathbb{C})$ sont nuls pour $|q-p| > 2$ et, posant $k=2m$, on a $h_0^{m+1, m-1} = 1$ et $h_0^{m, m} > 0$.

Condition D.2. Il existe une famille algébrique de variétés algébriques polarisées $(Y_s)_{s \in S}$, i.e. un morphisme projectif et lisse $f: Y \rightarrow S$, et $s_0 \in S$ tels que

a) $Y_{s_0} = X$, comme variété polarisée;

b) soit ψ la forme de polarisation de la cohomologie primitive $H_{\text{prim}}^k(Y_{s_0}, \mathbb{Z})$. Alors, l'image de $\pi_1(S, s_0)$ dans le groupe orthogonal $O(H_{\text{prim}}^k(Y_{s_0}, \mathbb{Z}), \psi)$ est d'indice fini.

2. Intersections complètes de niveau ≤ 2

Dans la table ci-dessous, on donne la liste des intersections complètes de niveau de Hodge ≤ 2 et de dimension $n > \ell$. De plus

a) pour $\ell \leq 1$, on donne les $h_0^{p,q}$ non nuls ($p+q=n$);

b) pour $\ell=2$, on donne la liste des intersections complètes de dimension $n \geq 2$ qui vérifient D.1 et leurs $h_0^{p,q}$ non nuls.

Table 1

$\ell = -\infty$	$V_n(2)$ (n impair)
------------------	------------------------

$\ell = 0$ ($n = 2p > 0$)	$V_n(2)$	$V_n(2, 2)$	$V_2(3)$
$h_0^{p,p} =$	1	$2p+3$	6

$\ell = 1$ ($n = 2p+1 > 1$)	$V_n(2, 2)$	$V_n(2, 2, 2)$	$V_3(3)$	$V_3(2, 3)$	$V_5(3)$	$V_3(4)$
$h^{p, p+1} (= h^{p+1, p}) =$	$p+1$	$2(p+1)^2 + 3(p+1)$	5	20	21	30

$\ell = 2$ ($n = 2p > 2$): $V_n(2, 2, 2)$, $V_n(2, 2, 2, 2)$, $V_4(3)$, $V_4(2, 3)$, $V_4(2, 2, 3)$, $V_4(3, 3)$, $V_6(3)$,
 $V_6(2, 3)$, $V_8(3)$, $V_4(4)$, $V_4(2, 4)$

$\ell = 2$ ($n = 2p$) et $h^{p-1, p+1} = 1$	$V_2(2, 2, 2)$	$V_2(2, 3)$	$V_2(4)$	$V_4(3)$
$h_0^{p,p} =$	19	19	19	20

Explication. $V_n(a_1, \dots, a_d)$ désigne une intersection complète de d hypersurfaces de degrés $a_1, \dots, a_d$ en position générale dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{n+d}$.

Remarque. La table donnée dans [10] est incomplète !

Le reste du paragraphe est consacré à la vérification de cette table. On rassemble d'abord les résultats dont on fera usage.

2.1. Théorème (Hirzebruch [8]). Soit X une intersection complète des d hypersurfaces de degrés $a_1, \dots, a_d$ en position générale dans un espace projectif $\mathbf{P}^{n+d}$, ce qu'on écrit encore comme $X = V_n(a_1, \dots, a_d)$. Soient y, z des indéterminées. On a pour tout $k \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \chi(X, \Omega_X^p(k)) \cdot y^p \cdot z^{n+d} = \frac{(1+z \cdot y)^{k-1}}{(1-z)^{k+1}} \prod_{i=1}^d \frac{(1+z \cdot y)^{a_i} - (1-z)^{a_i}}{(1+z \cdot y)^{a_i} - y(1-z)^{a_i}}.$$

Si $k=0$, on en déduit ([10])

2.2. Corollaire. Soit $H(a_1, \dots, a_d) = \sum_{p, q \geq 0} h_0^{pq} y^p z^q$, où

$$h_0^{pq} = \dim H^q(V_{p+q}(a_1, \dots, a_d), \Omega^p) - \delta_{pq}$$

$$H(a_1, \dots, a_d) = \frac{1}{(1+y)(1+z)} \left[\prod_{i=1}^d \frac{(1+y)^{a_i} - (1+z)^{a_i}}{-(1+y)^{a_i} \cdot z + (1+z)^{a_i} \cdot y} - 1 \right].$$

De là on tire ([10])

2.3. Corollaire. a) $H(a) = \sum_{i, j \geq 0} \frac{\binom{a-1}{i+j+1} y^i z^j}{1 - \sum_{i, j \geq 1} \binom{a}{i+j} y^i z^j}.$

b) Si $|P|$ désigne le nombre d'éléments d'une partie P de $[1, d]$, on a

$$H(a_1, \dots, a_d) = \sum_{\substack{P \subset [1, d] \\ P \neq \emptyset}} (1+y)^{|P|-1} (1+z)^{|P|-1} \prod_{i \in P} H(a_i).$$

2.4. Proposition ([10]). Soit $a_d = \sup(a_i)$ et ℓ un entier $0 \leq \ell < n$, congru à n modulo 2. Pour que le niveau de Hodge de $H^n(X)$ soit $\leq \ell$, il faut et il suffit que $\sum_{i \neq d} (a_i - 1) \leq (\ell + 1) - (a_d - 2) \frac{n - \ell}{2}.$

A l'aide de 2.4, on vérifie facilement que, pour $\ell \leq 2$, les intersections complètes de niveau de Hodge ℓ sont celles énumérées dans la table. Les nombres de Hodge sont calculés à l'aide de 2.3 (les premiers termes des séries $H(a)$, pour les petites valeurs de a , sont calculés dans la démonstration de 2.5).

2.5. Théorème. Les seules intersections complètes qui vérifient D.1 sont de la forme donnée par la table.

Preuve. Nous allons déterminer les intersections complètes de niveau de Hodge $\ell = 2$ et pour lesquelles (posant $\dim X = 2p$) $h^{p+1, p-1} = 1.$

Calculons les $H(a)$ pour les petites valeurs de a (voir 2.3):

$$a=2: H(2) = \frac{1}{1-yz} = 1 + yz + y^2 z^2 + \dots,$$

$$\begin{aligned} a=3: H(3) &= \frac{2+y+z}{1-3yz-y^2z-yz^2} = 2 + (y+z) + 6yz + (5y^2z + 5yz^2) \\ &+ (y^3z + 20y^2z^2 + yz^3) + (21y^3z^2 + 21y^2z^3) \\ &+ (8y^4z^2 + 70y^3z^2 + 8y^2z^4) + (y^5z^2 + 84y^4z^3 + 84y^3z^4 + y^2z^5) \\ &+ (45y^5z^3 + 252y^4z^4 + 45y^5z^3) + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a=4: H(4) &= \frac{3+3y+3z+y \cdot z}{1-6yz-6y^2z-6yz^2-y^3z-y^2z^2-yz^3} = 3 + (3y+3z) \\ &+ (y^2+19yz+z^2) + (30y^2z+30yz^2) \\ &+ (21y^3z+141y^2z^2+21yz^3) + \dots. \end{aligned}$$

On déduit de ces formules que la seule variété de la forme $V_n(3)$ ($2 \leq n \leq 8$) qui vérifie D.1 est $V_4(3)$. La seule variété $V_n(4)$ ($2 \leq n \leq 4$) qui vérifie D.1 est $V_2(4)$.

On voit donc que dans la table $\ell=2$ $V_6(3)$, $V_8(3)$, $V_4(4)$ ne vérifient pas D.1. Un calcul à l'aide de 2.3 montre que $V_4(2,3)$ ne vérifie pas D.1.

Soit C la classe des séries formelles $\sum a_{pq} y^p z^q \in \mathbb{Z}[[y, z]]$ qui vérifient:

$$(*) \quad a_{pq} = a_{qp}, \quad a_{pq} \geq 0.$$

C est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[[y, z]]$. Introduisons un ordre dans C en déclarant que $\sum a'_{pq} y^p z^q \geq \sum a_{pq} y^p z^q$ si $a'_{pq} \geq a_{pq} \forall pq$.

2.6. Lemme. Soit $(a_1, \dots, a_k)$, tel que $h^{p+1, p-1}(V_n(a_1, \dots, a_k)) > 1$. Soit $(a'_1, \dots, a'_d)$ ($d \geq k$), tel que $a_i \leq a'_i$ ($i = 1, \dots, k$). Alors

$$h^{p+1, p-1}(V_n(a'_1, \dots, a'_k, \dots, a'_d)) > 1.$$

Preuve. Par 2.3.b) on a que

$$\begin{aligned} H(a'_1, \dots, a'_d) &\geq \sum_{\substack{P' \subset [1, k] \\ P' \neq \emptyset}} (1+y)^{|P'|-1} \cdot (1+z)^{|P'|-1} \cdot \prod_{i \in P'} H(a'_i) \\ &+ \sum_{\substack{P'' \subset [k+1, d] \\ P'' \neq \emptyset}} (1+y)^{|P''|-1} \cdot (1+z)^{|P''|-1} \cdot \prod_{i \in P''} H(a'_i) \\ &\geq H(a_1, \dots, a_k). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

On déduit de ce lemme que $V_4(2,2,3)$, $V_4(3,3)$, $V_6(2,3)$, $V_4(2,4)$ ne vérifient pas D.1.

Considérons maintenant $V_n(2, 2, 2)$ ($n > 2$): De 2.3.b) on déduit que

$$\begin{aligned} H(2, 2, 2) &\geq (1+y)^2 (1+z)^2 \cdot H(2)^3 \geq (1+y)^2 \cdot (1+z)^2 \cdot H(2)^2 \\ &\geq (y^2 + z^2) \cdot H(2)^2 = (y^2 + z^2) \left(\sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(y \cdot z)^p \right). \end{aligned}$$

Posons $n = 2 \cdot p$ ($p > 1$). Le coefficient avant $y^{p+1} z^{p+1}$ est $\geq p > 1$. Donc $V_n(2, 2, 2)$ ($n > 2$) ne vérifie pas D.1. Du lemme 2.6, on tire que $V_n(2, 2, 2, 2)$ ($n > 2$) ne vérifie pas D.1 non plus.

On a donc examiné toute la table 1 $\ell = 2$ et il reste à considérer les surfaces $V = V_2(a_1, \dots, a_d)$. On a que $\Omega_V^2 = \mathcal{O}_V(-d-3 + \sum a_i)$ [11] et donc $H^0(V, \Omega_V^2) = 1 \Leftrightarrow \Omega_V^2 = \mathcal{O}_V \Leftrightarrow -d-3 + \sum a_i = 0$ (voir (*) dans 3.2). (D'ailleurs comme $\text{Pic}(V) = 0$, cela signifie que V est une surface $K3$.) La dernière équation a comme seules solutions celles dans la table. Q.E.D.

3. Les intersections complètes qui vérifient D.1 et D.2

3.1. A cause du théorème 2.5 le seul cas intéressant à considérer (les surfaces $K3$ étant traitées dans [2]) est le cas d'une hypersurface V de degré 3 dans $\mathbf{P}^5$.

Nous allons démontrer que V vérifie la condition D.2 et allons réduire cette question à une question sur les variations de structures de Hodge. Nous noterons par $\mathbf{P}$ l'espace projectif de dimension 5, par $j: V \rightarrow \mathbf{P}$ l'injection et par N le faisceau normal de V dans $\mathbf{P}$. Le choix d'une équation homogène $f=0$ pour V détermine un isomorphisme entre $j^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3)$ et N .

3.2. **Proposition.** a) $\dim_{\mathbf{C}} H^1(V, Tg_V) = 20$;

b) le morphisme canonique $H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3)) \rightarrow H^0(V, N)$ est surjectif à noyau isomorphe à $\mathbf{C}$.

Preuve. a) Pour cela nous démontrerons que

- (i) $H^i(V, Tg_V) = 0 \quad i > 1$.
- (ii) $H^0(V, Tg_V) = 0$.
- (iii) $\chi(V, Tg_V) = -20$.

Pour (i) citons le résultat de Akizuki et Nakano [1]: $H^i(V, \Omega_V^k(-s)) = 0$ pour $s > 0$ et $j+k < \dim V$. Par dualité de Serre,

$$H^i(V, Tg_V) = H^{4-i}(V, \Omega_V \otimes K_V),$$

où K_V désigne le faisceau canonique de V . Par FAC [11] on a que $K_V \simeq \mathcal{O}_V((-5-1)+3) = \mathcal{O}_V(-3)$. Donc $H^i(V, Tg_V) = 0$ pour $4-i+1 < 4$, c'est-à-dire pour $i > 1$. Cela prouve (i).

(ii) est un fait général pour les hypersurfaces non-singulières de degré ≥ 3 dans $\mathbf{P}^r$ ($r \geq 3$) [9, 14.2].

Pour (iii) rappelons d'abord le résultat suivant contenu dans FAC [11]:

$$(*) \quad \begin{cases} H^i(\mathbf{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(k)) = 0 & 0 < i < r \quad \text{et} \\ \chi(\mathbf{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^r}(k)) = \binom{r+k}{r}. \end{cases}$$

De la suite exacte

$$(3.2.1) \quad 0 \rightarrow Tg_V \rightarrow j^* Tg_{\mathbf{P}} \rightarrow N \rightarrow 0$$

on tire que $\chi(V, Tg_V) = \chi(V, j^* Tg_V) - \chi(V, N)$.

En tensorisant la suite exacte

$$(3.2.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow j^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow 0 \quad \text{avec } \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3),$$

on obtient

$$(3.2.3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3) \rightarrow j^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3) \rightarrow 0.$$

Donc

$$\chi(V, N) = \chi(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3)) - \chi(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}})$$

et cela égale par (*)

$$= \binom{5+3}{5} - \binom{5}{5} = 55.$$

En tensorisant (3.2.2) avec $Tg_{\mathbf{P}}$ on obtient

$$(3.2.4) \quad 0 \rightarrow Tg_{\mathbf{P}}(-3) \rightarrow Tg_{\mathbf{P}} \rightarrow j^* Tg_{\mathbf{P}} \rightarrow 0.$$

Donc $\chi(V, j^* Tg_{\mathbf{P}}) = \chi(\mathbf{P}, Tg_{\mathbf{P}}) - \chi(\mathbf{P}, Tg_{\mathbf{P}}(-3))$.

Pour calculer les derniers termes on utilise la suite exacte «d'Euler»

$$(3.2.5) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)^6 \rightarrow Tg_{\mathbf{P}} \rightarrow 0.$$

Donc $\chi(\mathbf{P}, Tg_{\mathbf{P}}) = 6 \cdot \chi(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)) - \chi(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}})$

(resp. $\chi(\mathbf{P}, Tg_{\mathbf{P}}(-3)) = 6 \cdot \chi(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2)) - \chi(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-3))$).

Avec (*) on a

$$\chi(\mathbf{P}, Tg_{\mathbf{P}}) = 6 \cdot \binom{5+1}{5} - 1 = 35 \quad (\text{resp. } \chi(\mathbf{P}, Tg_{\mathbf{P}}(-3)) = 6 \cdot 0 - 0 = 0).$$

Donc $\chi(V, Tg_V) = 35 - 55 = -20$ et cela démontre (iii) et par suite a).

b) La suite exacte longue de cohomologie associée à (3.2.3) a la forme

$$0 \rightarrow H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3)) \rightarrow H^0(V, N) \rightarrow H^1(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow \dots$$

et on conclut avec (*). Cela démontre b).

3.3. Soit $\tilde{V} \rightarrow S$ la famille universelle des hypersurfaces de degré 3 dans $\mathbf{P}^5$. A chaque $g \in H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3))$ on associe la courbe dans S formée des points correspondants aux variétés d'équation $f + \lambda g = 0$, λ variable. Si $g' \in H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3))$ a le même image comme g dans $H^0(V, N)$, g et g' diffère par un multiple $k \cdot f$ de f (3.2.b).

Les deux courbes correspondant à g et g' définissent donc la même direction tangente en s_0 et cela établit un isomorphisme entre $H^0(V, N)$ et $Tg_{s_0}(S)$.

La droite affine $\mathbf{A}^1_\lambda$ s'envoie de la façon décrite, par un morphisme $h_g: \mathbf{A}^1_\lambda \rightarrow S$, et on obtient, par changement de base, une famille $\tilde{V}_{\mathbf{A}^1}$ d'hypersurfaces de degré 3 dans $\mathbf{P}^5_{\mathbf{A}^1}$ sur $\mathbf{A}^1$. Le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ sur $\mathbf{A}^1$ se relève trivialement sur $\mathbf{P}^5_{\mathbf{A}^1}$, en un champ de vecteurs encore noté $\frac{\partial}{\partial \lambda}$.

Remarquons enfin que l'application de Kodaira-Spencer $KS: Tg_{s_0}(S) \rightarrow H^1(V, Tg_V)$ est surjective [9, th. 14.1], c'est-à-dire «chaque déformation infinitésimale de V reste dans l'espace projectif donné».

3.4 L'application $\varphi: Tg_{s_0}(S) \rightarrow Tg$ (espace de modules de structures de Hodge polarisées) se factorise par le morphisme de Kodaira-Spencer KS :

$$\begin{array}{ccc} Tg_{s_0}(S) & \xrightarrow{\varphi} & Tg \\ KS \downarrow & \nearrow \psi & \\ H^1(V, Tg_V) & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(espace de modules de structures} \\ \text{de Hodge polarisées).} \end{array}$$

Ce dernier espace tangent est canoniquement isomorphe à

$$\sum_{0 \leq i' < i \leq 4} \text{Hom}(H_{\text{prim}}^{i, i'}(V), H_{\text{prim}}^{i-1, i'+1}(V)) \quad [7],$$

ce qui est dans notre cas est $\text{Hom}(H^{3,1}(V), H_{\text{prim}}^{2,2}(V))$ (voir table § 2).

3.5. **Théorème.** *Si φ est surjectif, V vérifie la condition D.2.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 6.4 de [2] ou du théorème D.2 dans [6].

3.6. Soit $B^q(k \cdot V)$ (resp. $A^q(k \cdot V)$) l'espace vectoriel des formes différentielles (resp. formes différentielles fermées) de degré q sur $\mathbf{P}^r$ qui ont au pis un pôle d'ordre k le long de V . Désignons par A^q (resp. B^q) la réunion $\bigcup A^q(k \cdot V)$ (resp. $\bigcup B^q(k \cdot V)$). Il y a une application canonique $A^q \rightarrow H^q(\mathbf{P} - V)$, telle que $A^q/dB^{q-1} = H^q(\mathbf{P} - V)$. Le composé avec le cobord $\partial: H^q(\mathbf{P} - V) \rightarrow H^{q+1}(\mathbf{P}, \mathcal{H}_V) \xrightarrow{\sim} H^{q-1}(V)$ est appelé l'opérateur résidu $R: A^q \rightarrow H^{q-1}(V)$ [5].

On sait que R envoie $A^q(k \cdot V)$ sur $H_{\text{prim}}^{q-1,0}(V) + \dots + H_{\text{prim}}^{q-k,k-1}(V)$ avec pour noyau $dB^{q-1}((k-1) \cdot V)$ et que $R_k: A^q(k \cdot V) \rightarrow H_{\text{prim}}^{q-k,k-1}(V)$ définit un isomorphisme $\bar{R}_k$ entre $A^q(k \cdot V)/(dB^{q-1}((k-1) \cdot V) + A^q((k-1) \cdot V))$ et $H^{q-k,k-1}(V)$ [5, 8.6].

3.7. Lemme [5; 2.11]. Soit $\Omega = \sum_{\alpha=0}^r (-1)^\alpha \cdot z_\alpha \cdot dz_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_\alpha} \wedge \dots \wedge dz_r$ ($z_0, \dots, z_r$ désignant les coordonnées homogènes dans $\mathbf{P}^r$). Chaque élément de $A^r(k \cdot V)$ est de la forme $P \cdot \frac{\Omega}{f^k}$, où $\deg P = k \cdot d - (r+1)$ avec $d = \deg f = 3$. De plus, $P \cdot \frac{\Omega}{f^k} \in A^r((k-1) \cdot V) + dB^{r-1}((k-1) \cdot V)$ si et seulement si P est dans l'idéal $\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_r} \right)$ de l'anneau gradué $\mathbf{C}[z_0, \dots, z_r]$.

3.8. Corollaire. L'élément $P \cdot \frac{\Omega}{f^k}$ est dans le noyau de

$$R_k: A^r(k \cdot V) \rightarrow H_{\text{prim}}^{r-k,k-1}(V)$$

si et seulement si

$$P \in \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_r} \right) \subset \mathbf{C}[z_0, \dots, z_r].$$

Preuve. Cela suit de 3.6 et de 3.7. Q. E. D.

3.9. Soit $t \in T_{g_{s_0}}(S)$. L'application φ (3.4) se calcule comme suit. Soit $g \in H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3))$ un représentant de t (3.3) et $h_g: \mathbf{A}_\lambda^1 \rightarrow S$ le morphisme correspondant (3.3). Désignons encore par $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ le champ de vecteurs (3.3) sur $\mathbf{P}_{\lambda_\lambda}^5$.

Alors $\varphi(t): H^{3,1}(V) \rightarrow H_{\text{prim}}^{2,2}(V)$ (3.4) est donné par $\nabla \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)$, où ∇ désigne la connexion de Gauss-Manin [4].

Comme ∂ est horizontal par rapport à ∇ (étant défini sur la cohomologie entière) le diagramme

$$(3.9.1) \quad \begin{array}{ccc} H^q(\mathbf{P}-V) & \xrightarrow{\partial} & H^{q-1}(V) \\ \downarrow \nabla \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) & & \downarrow \nabla \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \\ H^q(\mathbf{P}-V) & \xrightarrow{\partial} & H^{q-1}(V) \end{array}$$

est commutatif. $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ agit sur A^q comme dérivée de Lie et le diagramme

$$(3.9.2) \quad \begin{array}{ccc} A^q/dB^{q-1} & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \lambda}} & A^q/dB^{q-1} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^q(\mathbf{P}-V) & \xrightarrow{\nabla \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)} & H^q(\mathbf{P}-V) \end{array}$$

(3.6.) commute [3, prop. 7.7]. On en déduit que le diagramme

$$(3.9.3) \quad \begin{array}{ccc} A^q(k \cdot V)/(dB^{q-1}((k-1) \cdot V) + A^q((k-1) \cdot V)) & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial \lambda}} & A^q((k+1) \cdot V)/(dB^{q-1}(k \cdot V) + A^q(k \cdot V)) \\ \downarrow \bar{R}_k & & \downarrow \bar{R}_{k+1} \\ H_{\text{prim}}^{q-k, k-1}(V) & \xrightarrow{\nabla(\frac{\partial}{\partial \lambda})} & H_{\text{prim}}^{q-k-1, k}(V) \end{array}$$

commute.

3.10. Lemme. $A^5(1 \cdot V) = 0$ et $\dim A^5(2 \cdot V) = 1$. On a $A^5(2 \cdot V) \xrightarrow{\sim} H^{3,1}(V)$.

Preuve. Les deux premières formules résultent de ce que $\Omega_{\mathbf{P}}^5 \simeq \mathcal{O}(-6)$. L'application de $A^5(2 \cdot V)$ dans $H^{3,1}(V)$ est surjective (3.6), donc bijective puisque $\dim H^{3,1}(V) = 1$.

Soit $\omega_0 = P \cdot \frac{\Omega}{f^k} \in A^q(k \cdot V)$ (3.7) et prolongeons ω_0 en une forme différentielle fermée ω_λ sur $\mathbf{P}_\lambda$ à un pôle d'ordre k le long de $\tilde{V}_\lambda$, la fibre sur λ déduit par h_g . Alors la dérivée de Lie de ω_0 est l'image de $\frac{\partial}{\partial \lambda}(\omega_\lambda) \Big|_{\lambda=0}$ dans $A^q((k+1) \cdot V)/(dB^{q-1}(k \cdot V) + A^q(k \cdot V))$. Si on écrit $\omega_\lambda = P(\lambda) \cdot \frac{\Omega}{f(\lambda)^k}$ cet image est la classe de

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} P(\lambda) \Big|_{\lambda=0} \cdot \frac{\Omega}{f^k} - k \cdot P \cdot \frac{\Omega}{f^{k+1}} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} (f(\lambda)) \Big|_{\lambda=0}.$$

Si on prend $\omega_\lambda = \frac{P \cdot \Omega}{(f + \lambda g)^k}$, l'image est la classe de $-k \cdot P \cdot \frac{\Omega}{f^{k+1}} \cdot g$.

3.11. Lemme. Le noyau de l'application φ (3.4) est contenu dans le noyau de KS.

Preuve. Soit $t \in Tg_{s_0}(S)$, et $g \in H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3))$ un représentant de t (3.3). $t \in \text{Ker } \varphi$ signifie alors que $\nabla \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) (H^{3,1}(V)) = 0$ dans $H_{\text{prim}}^{2,2}(V)$ (3.9). R_2 est un isomorphisme entre $A^5(2 \cdot V)$ et $H^{3,1}$ (3.10) et le diagramme (3.9.3) commute. Donc $t \in \text{Ker } \varphi$ si et seulement si $\frac{\partial}{\partial \lambda} (A^5(2 \cdot V)) \subset \text{Ker } R_3$ (3.9). Choisissons $\frac{\Omega}{f^2}$ comme générateur de $A^5(2 \cdot V)$ (3.10), (3.7). Alors $t \in \text{Ker } \varphi$ signifie que $\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\Omega}{f^2} \right) = -2g \frac{\Omega}{f^2}$ est dans $dB^4 + A^5(2V)$. D'après (3.10) cela signifie que $g \in \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_5} \right)$.

Pour voir que $KS(t) = 0$ il suffit de démontrer que si $g = \sum a_{ij} \cdot z_i \cdot \frac{\partial f}{\partial z_j}$, alors l'hypersurface définie par l'équation $f + \lambda g$ est isomorphe au

deuxième ordre près, à V . En effet, le changement de coordonnées $z_i \rightarrow z'_i = z_i + \lambda \cdot \sum_j a_{ij} \cdot z_j$ définit un isomorphisme entre $(f + \lambda g = 0)$ et $f(z'_1, \dots, z'_5) \bmod \lambda^2$ (développement de Taylor).

3.12. Théorème. *V vérifie la condition D.2.*

Preuve. Comme $\text{Ker } \varphi \subset \text{Ker } KS$ (3.11), donc (3.4) $\text{Ker } \varphi = \text{Ker } KS$, ψ est injectif. Mais $\dim_{\mathbb{C}} H^1(V, Tg_V) = 20$ (3.2) et $\dim_{\mathbb{C}} Tg$ (espace modulaire des structures de Hodge polarisées) $= \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}(H^{3,1}, H^{2,2}_{\text{prim}}) = 20$ (table 1, § 2). Donc ψ est aussi surjectif. Il suit que φ est surjectif et on conclut avec (3.5). Q.E.D.

Bibliographie

1. Akizuki, Y., Nakano, S.: Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems. Proc. Jap. Acad. **30**, 266 – 272 (1954).
2. Deligne, P.: La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$. Inventiones math. **15**, 206 – 226 (1972).
3. Deligne, P.: Equations Différentielles à Points Singuliers Réguliers. Lecture Notes in mathematics **163**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.
4. Deligne, P.: Travaux de Griffiths; Sémin. Bourbaki 376-Mai 1970. dans: Lecture Notes in mathematics **180**, pp. 213 – 239. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.
5. Griffiths, P.A.: Periods of rational integrals I. Annals of Math. **90**, 460 – 495 (1969).
6. Griffiths, P.A.: Periods of rational integrals III. Publ. Math. IHES **38**, 125 – 180 (1971).
7. Griffiths, P.A.: On the periods of integrals on algebraic manifolds. Rice Univ. Studies 1968.
8. Hirzebruch, F.: New topological methods in algebraic geometry, 3rd ed. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
9. Kodaira, K., Spencer, D.C.: On the deformation of complex structure. Ann. of Math. **67**, 328 – 466 (1958).
10. SGA 7 XI: Cohomologie des intersections complètes (distribué par l'Institut des Hautes Études Scientifiques).
11. Serre, J.-P.: Faisceaux algébriques cohérents (FAC). Ann. of Math. **62**, 197 – 278 (1955).

M. Rapoport
Institut des Hautes Etudes Scientifiques
35, Route de Chartres
F-91 Bures-sur-Yvette
France

(Reçu le 6 août 1971)