Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 9, Abgabe am 21.12.2005

Aufgabe 33

Sei $\varphi\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und sei $f\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ die zugehörige Abbildung.

a) Sei $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein Ideal. Zeige: $\overline{f(V(\mathfrak{b}))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$.

b) Sei φ surjektiv. Zeige, dass f einen Homöomorphismus von $\operatorname{Spec} B$ auf $V(\ker\varphi)$ induziert.

c) Zeige, dass das Bild von f genau dann dicht in $\operatorname{Spec} A$ ist, wenn jedes Element aus $\ker\varphi$ nilpotent ist.

Aufgabe 34

Sei R ein Ring. Zeige, dass $\operatorname{Spec} R$ ein T_0-Raum ist, das heißt, dass für je zwei Punkte in $\operatorname{Spec} R$ eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ existiert, die genau einen der Punkte enthält.

Aufgabe 35

a) Sei X ein topologischer Raum und sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Sei $\mathcal{F}^\dagger$ die zu $\mathcal{F}$ assoziierte Garbe. Zeige, dass der Morphismus $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\dagger$ auf den Halmen Isomorphismen $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}^\dagger_x$, $x \in X$, induziert.

b) Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf Y. Sei $f^{-1}\mathcal{F}$ die zu der Prägarbe

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{F}(V)$$

assoziierte Garbe auf X (die *Urbildgarbe* oder das *inverse Bild von $\mathcal{F}$ unter f*). (Wir nehmen hier den induktiven Limes über alle offenen Teilmengen $V \subseteq Y$, die $f(U)$ enthalten.) Zeige, dass für alle $x \in X$ der Halm $(f^{-1}\mathcal{F})_x$ isomorph ist zu $\mathcal{F}_{f(x)}$.

Aufgabe 36

Sei R ein *diskreter Bewertungsring*, d. h. ein lokaler Hauptidealring, der kein Körper ist. Sei $\mathfrak{m} = (t)$ das maximale Ideal von R. Zeige, dass sich jedes Element von $R \setminus \{0\}$ in der Form $t^n u$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in R^\times$, schreiben läßt und bestimme alle Ideale von R. Beschreibe den topologischen Raum $\operatorname{Spec} R$.

Sei K der Quotientenkörper von R, und $k = R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper. Gib jeweils ein Beispiel an, in dem K und k beide Charakteristik 0, beide Charakteristik $p > 0$ bzw. K Charakteristik 0 und k Charakteristik $p > 0$ hat. Zeige schließlich: hat K Charakteristik $p > 0$, so hat auch k Charakteristik p.