Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 7, Abgabe am 07.12.2005

Aufgabe 25

Ein Integritätsring R heißt *ganzabgeschlossen*, wenn alle Elemente $x \in \mathrm{Quot}(R)$, die ganz über R sind (d. h. zu denen es ein normiertes Polynom $f \in R[X]$ mit $f(x) = 0$ gibt), in R liegen.

a) Zeige, dass jeder faktorielle Ring ganzabgeschlossen ist.

b) Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, und sei $\mathrm{char}\, k \neq 2$. Sei $Z = V(Y^2 - X^2(X+1)) \subseteq \mathbb{A}^2(k)$ (vgl. Aufgabe 8). Der Homomorphismus

$$\begin{aligned}\Gamma(Z_1) = k[X,Y]/(Y^2 - X^2(X+1)) &\longrightarrow k[T^2-1, T(T^2-1)],\\ X \mapsto T^2-1,\ Y &\mapsto T(T^2-1),\end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus. Zeige, dass für $z \in Z$ der Halm $\mathcal{O}_{Z,z}$ genau dann ganzabgeschlossen ist, wenn $z \neq (0,0)$. *Hinweis:* Die Rechnung wird etwas einfacher, wenn man benutzt, dass ein Integritätsring R genau dann ganzabgeschlossen ist, wenn für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subseteq R$ die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ ganzabgeschlossen ist [Atiyah, Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Prop. 5.15].

Aufgabe 26

a) Zeige, dass der Morphismus $Z_1 \longrightarrow Z_2$ aus Aufgabe 8 nicht endlich ist.

b) Gib einen surjektiven Morphismus $\mathbb{A}^1(k) \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ an, zeige, dass alle Fasern endliche Mengen sind, und dass der Morphismus nicht endlich ist.

Aufgabe 27

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper mit überabzählbar vielen Elementen. Sei X eine Prävarietät über k von Dimension ≥ 1, und sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X, $\dim Y_n < \dim X$ für alle n. Zeige, dass $\bigcup_n Y_n \neq X$.

Hinweis: Zeige die Behauptung zunächst für $X = \mathbb{A}^1(k)$ und dann für $X = \mathbb{A}^n(k)$. Behandle nun den Fall affiner Varietäten durch Anwendung des Noetherschen Normalisierungssatzes und beweise schließlich den allgemeinen Fall.

Aufgabe 28

Bezeichne mit W, X, Y, Z die Koordinaten des affinen Raums $\mathbb{A}^4(k)$. Sei V die affine Varietät $V(XW - YZ) \subseteq \mathbb{A}^4(k)$, und sei $U = \{(w,x,y,z) \in V;\ y \neq 0\} \cup \{(w,x,y,z) \in V;\ w \neq 0\}$.

a) Sei $g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ mit $g(u) \neq 0$ für alle $u \in U$. Wir wollen zeigen, dass dann $g(u) \neq 0$ für alle $u \in V$ gilt, d. h. $V(g) \cap V = \emptyset$. Wir nehmen dazu an, dass $V(g) \cap V \neq \emptyset$ und leiten wie folgt einen Widerspruch her. Sei $E = V(Y, W)$. Folgere aus der obigen Annahme, dass $V(g) \cap V = E$. Sei nun $E' = V(X, Z)$. Zeige, dass $V(g) \cap E' = \{(0, 0, 0, 0)\}$, und begründe, dass das ein Widerspruch ist.

b) Wir definieren $h \in \Gamma(U, \mathcal{O}_V)$ durch

$$h(w, x, y, z) = \begin{cases} x/y, & y \neq 0 \\ z/w, & w \neq 0 \end{cases} .$$

Zeige, dass sich h nicht in der Form f/g, $f, g \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$, $g(u) \neq 0$ für alle $u \in U$, schreiben läßt.