Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 6, Abgabe am 30.11.2005

Aufgabe 21

Sei $Q \subseteq \mathbb{P}^3(k)$ eine glatte Quadrik. Zeige, dass $Q \cong \mathbb{P}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k)$.

Hinweis: Segre-Einbettung.

Aufgabe 22

Sei $n \geq 1$. Betrachte den Morphismus

$$\pi\colon \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(k), \quad (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0 : \dots : x_n).$$

a) Sei $0 \leq i \leq n$ und sei $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n);\ x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Wir wissen, dass U_i isomorph ist zu $\mathbb{A}^n(k)$ vermöge

$$f\colon U_i \longrightarrow \mathbb{A}^n(k), \quad (x_0 : \dots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}).$$

Gib einen Isomorphismus $g\colon \pi^{-1}(U_i) \longrightarrow (\mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^n(k)$ an, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & (\mathbb{A}^1(k) \setminus \{0\}) \times \mathbb{A}^n(k) \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\
U_i \arrow[r, "f"] & \mathbb{A}^n(k)
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

b) Sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine abgeschlossene Teilmenge, und sei $\overline{Z} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ der Abschluß von $\pi^{-1}(Y) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\}$ in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$. Zeige: Y ist genau dann irreduzibel, wenn $\overline{Z}$ irreduzibel ist.

Aufgabe 23

Sei $X = \{((x, y), (u : v)) \in \mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k);\ xu - yv = 0\}$.

a) Zeige, dass X eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k)$ ist.

b) Bezeichne $f\colon X \longrightarrow \mathbb{A}^2(k)$ die Einschränkung der Projektionsabbildung $\mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \longrightarrow \mathbb{A}^2(k)$ auf X. Die Fasern $f^{-1}(x)$ von f über Punkten $x \in \mathbb{A}^2(k)$ sind abgeschlossene Untervarietäten von X. Zeige, dass für $x \neq (0, 0)$ die Faser $f^{-1}(x)$ aus einem Punkt besteht, und dass $f^{-1}((0, 0)) \cong \mathbb{P}^1(k)$.

c) Bezeichne $g\colon X \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$ die Einschränkung der Projektionsabbildung $\mathbb{A}^2(k) \times \mathbb{P}^1(k) \longrightarrow \mathbb{P}^1(k)$. Zeige, dass alle Fasern von g isomorph zu $\mathbb{A}^1(k)$ sind.

d) Zeige, dass X nicht isomorph ist zu $\mathbb{A}^1(k)\times\mathbb{P}^1(k)$. *Hinweis:* Bestimme jeweils den Raum der globalen Schnitte der Strukturgarbe, d. h. $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$ und $\mathrm{Hom}(\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{P}^1(k), \mathbb{A}^1(k))$. Beachte dazu, dass $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^1(k), \mathbb{A}^1(k)) = k$.

Aufgabe 24 *Gruppenvarietäten*

Eine Prävarietät G heißt Gruppenvarietät, wenn die zugrundeliegende Menge von G eine Gruppe ist und die Abbildungen $m\colon G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$, und $i\colon G \longrightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$, Morphismen von Prävarietäten sind.

a) Zeige, dass jede Gruppenvarietät eine Varietät ist.

b) Wir identifizieren den Raum $M_n(k)$ der $n \times n$-Matrizen über k mit $\mathbb{A}^{n^2}(k)$. Zeige, dass $GL_n(k) \subseteq M_n(k)$ eine affine offene Teilmenge ist. Wir können $GL_n(k)$ also als affine Varietät auffassen. Zeige, dass $GL_n(k)$ mit der durch die Multiplikation von Matrizen gegebenen Gruppenstruktur eine Gruppenvarietät ist.