Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 3, Abgabe am 09.11.2005

Aufgabe 9

Sei X ein topologischer Raum, und sei $\varphi\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben abelscher Gruppen auf X.

a) Zeige, dass die Zuordnung $U \mapsto \ker(\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U))$, $U \subseteq X$ offen, in natürlicher Weise eine Garbe definiert.

b) Zeige, dass die Zuordnung $U \mapsto \operatorname{im}(\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U))$, $U \subseteq X$ offen, in natürlicher Weise eine Prägarbe definiert. Gib ein Beispiel an, in dem diese Prägarbe keine Garbe ist.

Aufgabe 10

Sei X ein topologischer Raum und sei $\varphi\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf X. Zeige: Der Morphismus φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für alle $x \in X$ die auf den Halmen induzierte Abbildung $\varphi_x\colon \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 11

Sei X ein topologischer Raum, und sei $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie auf X (d. h. $\mathcal{B}$ ist eine Menge von offenen Teilmengen von X, und jede offene Teilmenge von X lässt sich als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ schreiben).

Für jedes $U \in \mathcal{B}$ sei eine Menge $\mathcal{F}(U)$, und für $V \subseteq U$, $V, U \in \mathcal{B}$ seien Restriktionsabbildungen $r_U^V\colon \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ mit $r_U^U = \mathrm{id}_U$, $r_V^W \circ r_U^V = r_U^W$ für $W \subseteq V \subseteq U$, $U, V, W \in \mathcal{B}$ gegeben. Dabei seien die Garbenaxiome für Familien $(U_i)_i$ von Mengen $U_i \in \mathcal{B}$ mit $\bigcup_i U_i \in \mathcal{B}$ erfüllt.

Zeige: Es gibt eine eindeutig bestimmte Garbe $\mathcal{G}$ auf X, so dass für alle Mengen $U \in \mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{G}(U) = \mathcal{F}(U)$, und so dass die Restriktionsabbildungen von $\mathcal{G}$ für $V \subseteq U$, $V, U \in \mathcal{B}$, mit denen von $\mathcal{F}$ übereinstimmen.

Hinweis: Wende die Konstruktion der zu einer Prägarbe assoziierten Garbe an.

Aufgabe 12

Wir betrachten $\mathbb{C}$ in der üblichen Weise als topologischen Raum. Sei $\mathcal{O}$ die Garbe abelscher Gruppen mit

$$\mathcal{O}(U) = \{f\colon U \longrightarrow \mathbb{C};\ f \text{ holomorph}\}, \quad U \subseteq \mathbb{C} \text{ offen.}$$

Sei $\mathcal{O}^\times$ die Garbe abelscher Gruppen (bzgl. der Multiplikation) mit

$$\mathcal{O}^\times(U) = \{f\colon U \longrightarrow \mathbb{C};\ f \text{ holomorph}, f(u) \neq 0 \text{ für alle } u \in U\},\ U \subseteq \mathbb{C} \text{ offen.}$$

Wir bezeichnen mit $\exp\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ die Exponentialabbildung.

a) Zeige, dass die folgende Vorschrift einen Morphismus von Garben abelscher Gruppen definiert ($U \subseteq \mathbb{C}$ offen):

$$\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}^\times(U), \quad f \mapsto \exp \circ f.$$

Wir bezeichnen diesen Morphismus wieder mit $\exp\colon \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^\times$.

b) Zeige, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ die auf den Halmen induzierte Abbildung surjektiv ist.

c) Gib eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ an, so dass die Abbildung $\mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}^\times(U)$ nicht surjektiv ist.