Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 13, Abgabe am 01.02.2006

Aufgabe 49

a) Sei $Z \subseteq Y$ ein abgeschlossenes Unterschema, sei X ein reduziertes Schema, und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus mit $f(X) \subseteq Z$. Zeige, dass dann f über Z faktorisiert.

b) Seien X ein reduziertes und Y ein separiertes Schema, und seien f und g Morphismen $X \longrightarrow Y$, deren Einschränkungen auf eine dichte offene Teilmenge $U \subseteq X$ übereinstimmen. Zeige, dass dann $f = g$ gilt. *Hinweis:* Die Morphismen f und g induzieren einen Morphismus $h\colon X \longrightarrow Y \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} Y$. Begründe, dass $h(X) \subseteq \Delta_{Y/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}(Y)$ und wende a) an.

c) Gib jeweils ein Gegenbeispiel zu der obigen Aussage an, wo X reduziert, aber Y nicht separiert, bzw. X nicht reduziert, aber Y separiert ist.

Aufgabe 50

Sei k ein Körper. Gib einen Isomorphismus $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1_k) \longrightarrow \mathbb{Z}$ an.

Hinweis: Betrachte die Standardüberdeckung $\mathbb{P}^1_k = U_0 \cup U_1$, $U_0 \cong U_1 \cong \mathbb{A}^1_k$. Sei $V = U_0 \cap U_1 \cong \operatorname{Spec} k[X, X^{-1}]$. Da $\operatorname{Pic}(\mathbb{A}^1_k) = 0$, entsteht jedes Geradenbündel auf $\mathbb{P}^1_k$ durch Verkleben der trivialen Geradenbündel $\mathscr{F} = \mathcal{O}_{U_0}$ und $\mathscr{G} = \mathcal{O}_{U_1}$ via eines Isomorphismus $\mathscr{F}|_V \longrightarrow \mathscr{G}|_V$. Ein solcher Isomorphismus ist durch eine Einheit des Rings $k[X, X^{-1}]$ gegeben ist. Untersuche schließlich, wann zwei Einheiten isomorphe Geradenbündel definieren.

Aufgabe 51

Sei S ein Schema, und sei $\mathscr{F} \subset \mathcal{O}_S^{n+1}$ ein lokalfreier $\mathcal{O}_S$-Modul vom Rang 1.

Zeige, dass $\mathcal{O}_S^{n+1}/\mathscr{F}$ genau dann lokalfrei ist, wenn man S durch offene affine Teilmengen $U = \operatorname{Spec} A$ überdecken kann, so dass für den A-Modul $F = \Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathscr{F}) \subseteq A^{n+1}$ gilt: F wird von einem Element ${}^t(a_0, \dots, a_n) \in A^{n+1}$ erzeugt, und es existiert ein i, für das a_i eine Einheit ist.

Hinweis: Ist F von der angegebenen Form, so kann man leicht einen surjektiven Homomorphismus $A^{n+1} \longrightarrow A^n$ mit Kern F angeben.

Sei andererseits $\mathcal{O}_S^{n+1}/\mathscr{F}$ lokalfrei. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $S = \operatorname{Spec} A$ affin ist und dass $\mathscr{F}$ und $\mathcal{O}_S^{n+1}/\mathscr{F}$ frei sind. Wir erhalten so eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} A^{n+1} \xrightarrow{\beta} A^n \longrightarrow 0$$

mit $\operatorname{im}\alpha = F := \Gamma(\operatorname{Spec} A, \mathscr{F})$. Schreibe $\alpha(1) = {}^t(a_0, \dots, a_n)$.

Begründe, dass ein A-Modulhomomorphismus $\gamma\colon A^n \longrightarrow A^{n+1}$ mit $\beta\circ\gamma = \mathrm{id}_{A^n}$ existiert, und dass man so einen Isomorphismus $A^{n+1} \cong F \oplus \operatorname{im}\gamma$ erhält. Folgere, dass für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subseteq A$ die Abbildung $\alpha \otimes_A A/\mathfrak{m}$ injektiv und folglich das Ideal $(a_0, \ldots, a_n)$ nicht in $\mathfrak{m}$ enthalten ist. Also haben wir eine Überdeckung $\operatorname{Spec} A = \bigcup_i \operatorname{Spec} A_{a_i}$, und diese hat die gewünschten Eigenschaften hat.