Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 12, Abgabe am 25.01.2006

Aufgabe 45

Gib ein Beispiel eines Schemas X an, in dem ein Punkt $x_0 \in X$ existiert, so dass die Halme $\mathcal{O}_{X,x}$, $x \neq x_0$ sämtlich reduziert sind, der Halm $\mathcal{O}_{X,x_0}$ jedoch nicht.

Hinweis: Betrachten zum Beispiel in der affinen Ebene den schema-theoretischen Duchschnitt des Achsenkreuzes mit einer verdickten Koordinatenachse.

Aufgabe 46

a) Zeige: ist $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata, und ist X reduziert, so faktorisiert f über $Y_{\mathrm{red}} \longrightarrow Y$. Insbesondere induziert jeder Morphismus $X \longrightarrow Y$ einen natürlichen Morphismus $X_{\mathrm{red}} \longrightarrow Y_{\mathrm{red}}$, so dass die Zuordnung $X \mapsto X_{\mathrm{red}}$ ein Funktor ist.

b) Gib ein Beispiel eines Morphismus $X \longrightarrow Y$ an, derart dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_{\mathrm{red}} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y_{\mathrm{red}} \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

nicht kartesisch ist.

Aufgabe 47

a) Sei X ein integres Schema und sei $\eta \in X$ der generische Punkt. Zeige, dass der Halm $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ein Körper ist. Dieser Körper heißt der (rationale) Funktionenkörper von X und wird mit $K(X)$ bezeichnet.

b) Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von integren Schemata, der dominant ist, d. h. dass $f(X)$ dicht in Y ist. Zeige, dass f eine Inklusion $K(Y) \longrightarrow K(X)$ der Funktionenkörper induziert.

c) Sei X ein integres Schema, $x \in X$. Zeige, dass der natürliche Morphismus $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow X$ dominant ist, und dass wir so $\mathcal{O}_{X,x}$ auf natürliche Weise als Unterring von $K(X)$ auffassen können. Ist nun $U \subseteq X$ eine nichtleere, offene Teilmenge, so ist $\eta \in U$ und wir erhalten eine Abbildung $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \longrightarrow K(X)$. Zeige, dass diese Abbildung injektiv ist, und dass gilt:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Aufgabe 48

Sei $\mathscr{P}$ eine Eigenschaft von Morphismen von Schemata, für die gilt:

i) Jede abgeschlossene Immersion hat die Eigenschaft $\mathscr{P}$.
ii) Die Eigenschaft $\mathscr{P}$ ist stabil unter Komposition.
iii) Die Eigenschaft $\mathscr{P}$ ist stabil unter Basiswechsel.

Zeige, dass dann gilt:

a) Sind $X_1 \longrightarrow Y_1$, $X_2 \longrightarrow Y_2$ Morphismen mit $\mathscr{P}$, so hat auch der induzierte Morphismus $X_1 \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} X_2 \longrightarrow Y_1 \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} Y_2$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$.

b) Sind $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$ Morphismen, hat $g \circ f$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$ und ist g separiert, so hat f die Eigenschaft $\mathscr{P}$. (*Hinweis:* Der Graph-Morphismus $\Gamma_f\colon X \longrightarrow X \times_Z Y$ entsteht durch Basiswechsel aus $\Delta_{Y/Z}$.)

c) Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ ein Morphismus mit $\mathscr{P}$, so hat auch $f_{\mathrm{red}}\colon X_{\mathrm{red}} \longrightarrow Y_{\mathrm{red}}$ die Eigenschaft $\mathscr{P}$.