Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 11, Abgabe am 18.01.2006

Aufgabe 41

a) Seien $Y_1 \subseteq X$, $Y_2 \subseteq X$ offene Unterschemata. Zeige, dass der natürliche Morphismus $Y_1 \times_X Y_2 \longrightarrow X$ eine offene Immersion ist, und dass man mittels dieser Immersion den zugrundeliegenden topologischen Raum von $Y_1 \times_X Y_2$ identifizieren kann mit dem Durchschnitt der zugrundeliegenden topologischen Räume von Y_1 und Y_2, aufgefasst als offene Teilmengen von X.

b) Die Aussage in a) ist ebenfalls richtig, wenn man *offen* durch *abgeschlossen* ersetzt.

c) Sei $Y \longrightarrow X$ eine offene oder abgeschlossene Immersion. Zeige, dass die Diagonale $Y \longrightarrow Y \times_X Y$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 42

a) Sei X ein Schema, $x \in X$. Sei ferner $\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ das maximale Ideal des lokalen Rings in x. Dann ist $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ein $\kappa(x)$-Vektorraum, und wir bezeichnen mit $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ seinen Dualraum. Der Raum $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$ heißt der *Zariski-Tangentialraum* von X in x und wird auch mit $T_{X,x}$ bezeichnet.

Sei nun k ein Körper, X ein k-Schema und $x \in X$ ein Punkt mit Restklassenkörper $\kappa(x) = k$. Sei $Z := \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Sei $z \in Z$ der einzige Punkt von Z. Sei $\varphi \in (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$. Zeige, dass es einen eindeutig bestimmten k-Algebrenhomomorphismus $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ gibt, dessen Einschränkung auf $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ die Form $m \mapsto \varepsilon\varphi(m)$ hat. Zeige, dass man so eine Bijektion

$$(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* \longrightarrow \{f \in \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} k}(Z, X);\ f(z) = x\}$$

erhält.

b) Gib ein Beispiel einer endlich erzeugten integren k-Algebra R über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und eines abgeschlossenen Punktes $x \in \operatorname{Spec} R$ an, so dass $\dim_{\kappa(x)} T_{\operatorname{Spec} R,x} > \dim R$ ist. *H*inweis: Untersuche die Situation im Fall $R = k[X_1, \dots, X_n]/(f)$, $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, $f(0, \dots, 0) = 0$, $x = (X_1, \dots, X_n)$.

c) Gib ein Beispiel eines k-Schemas $X = \operatorname{Spec} R$ an, so dass für alle Punkte $x \in X$ gilt: $\dim_{\kappa(x)} T_{X,x} > \dim X$. (Hier bezeichne $\dim X := \sup_{x \in X} \dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim R$ die Dimension von X.)

Aufgabe 43

a) Beschreibe das Faserprodukt $Z = \operatorname{Spec}\mathbb{C} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{R}} \operatorname{Spec}\mathbb{C}$. (Was ist der zugrundeliegende topologische Raum, wie sieht die Strukturgarbe aus? Wie kann man die beiden Abbildungen $Z \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{C}$ beschreiben?)

b) Zeige an einem Beispiel: ist $X \longrightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata, sind p_1, p_2 die beiden Projektionen $X \times_Y X \longrightarrow X$, ist $\Delta\colon X \longrightarrow X \times_Y X$ die Diagonalabbildung, und ist $z \in X \times_Y X$ mit $p_1(z) = p_2(z)$, so gilt im allgemeinen nicht $z \in \Delta(X)$.

Aufgabe 44

Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, $d \equiv -1 \mod 4$. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeige, dass $O_K := \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}$ in K ist. (*Hinweis:* Ein Element aus K ist genau dann ganz über $\mathbb{Z}$, wenn die Koeffizienten seines Minimalpolynoms in $\mathbb{Z}$ liegen.) Der Ring O_K heißt der Ring der ganzen Zahlen von K.

Beschreibe für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ die Faser des natürlichen Morphismus $\operatorname{Spec} O_K \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ über $\mathfrak{p}$.