Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 10, Abgabe am 11.01.2006

Aufgabe 37

Sei X ein Schema. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

i) X ist zusammenhängend.

ii) Es existiert in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ kein Element $e \neq 0, 1$ mit $e^2 = e$.

iii) Es existiert keine Zerlegung $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = R_1 \times R_2$ in von Null verschiedene Ringe R_1, R_2.

Aufgabe 38

a) Sei X ein Schema, $x \in X$. Sei $Y = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ und sei $y \in Y$ der abgeschlossene Punkt. Zeige, dass es einen natürlichen Morphismus $Y \longrightarrow X$ gibt, der y auf x abbildet und dadurch eindeutig bestimmt ist, dass er auf den Halmen in y bzw. x die Identität induziert.

b) Zeige, dass das Bild des in a) definierten Morphismus genau aus den Punkten besteht, die zu x *spezialisieren*, d. h. in deren Abschluss x liegt.

Aufgabe 39

a) Sei X ein quasi-kompaktes Schema. Zeige, dass X einen abgeschlossenen Punkt besitzt.

b) Sei X ein quasi-kompaktes Schema, das genau einen abgeschlossenen Punkt hat. Zeige, dass X isomorph ist zum Spektrum eines lokalen Ringes.

Aufgabe 40

Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal. Zeige, dass der von der Projektion $R \longrightarrow R/\mathfrak{a}$ induzierte Morphismus $\operatorname{Spec} R/\mathfrak{a} \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ eine abgeschlossene Immersion ist.