**Prof. Dr. M. Rapoport**
**Dr. U. Görtz**

**SS 2004**

# Lineare Algebra II

## 9. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 29.06.04 in der Vorlesung

### Aufgabe 1

a) Die Matrix $A \in M_n(K)$ habe Jordansche Normalform. Bestimme eine Matrix $S \in GL_n(K)$, so dass $S^{-1} \cdot {}^tA \cdot S$ Jordansche Normalform hat.

b) Zeige, dass jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ zu ihrer transponierten Matrix ${}^tA$ ähnlich ist.

c) Zeige, dass sich jede Matrix aus $M_n(\mathbb{C})$ als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen schreiben läßt, von denen mindestens eine invertierbar ist.

### Aufgabe 2

Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl.

a) Sei $k \geq 1$ eine ganze Zahl, und sei $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Zeige, dass eine Matrix $B \in GL_N(\mathbb{C})$ existiert mit $B^k = A$. Ist es notwendig vorauszusetzen, dass $A$ invertierbar ist?

b) Bestimme eine Matrix $B \in M_3(\mathbb{Q})$, so dass $B^3 = A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 3

Sei $K$ ein Körper, und sei $f$ ein trigonalisierbarer Endomorphismus des $n$-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Das charakteristische Polynom $\chi_f$ und das Minimalpolynom $\mu_f$ von $f$ stimmen überein.

ii) In der Jordanschen Normalform gibt es zu jedem Eigenwert nur einen Jordanblock.

iii) Für alle Eigenwerte $\lambda$ von $F$ gilt: $\dim V(\lambda, f) = 1$.

iv) Es gibt ein $v \in V$, so dass $(v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ eine Basis von $V$ ist.

v) Es gibt eine Basis $B$ von $V$, so dass $f$ bezüglich $B$ die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 1 & & 0 & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & * \end{pmatrix}$$

vi) Es gibt eine Basis $B$ von $V$, so dass $f$ bezüglich $B$ die folgende Form hat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

wobei $\chi_f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.

vii) Für jede Zerlegung $\chi_f = p \cdot q$ von Polynomen in $K[X]$ gilt:

$$\operatorname{im} p(f) = \ker q(f).$$

**Aufgabe 4**

Schreibe die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -8 & -10 \\ -1 & 0 & 8 & 10 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})$$

in der Form $A = D + N$, wobei $D$ eine diagonalisierbare Matrix und $N$ eine nilpotente Matrix ist und drücke $D$ und $N$ als Polynome in $A$ aus.