Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2004**
Dr. U. Görtz

Lineare Algebra II

6. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 08.06.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Spiegelungen)

Sei V ein euklidischer Vektorraum, $v \in V \setminus \{0\}$.

a) Zeige:

$$\sigma_v \colon V \longrightarrow V, \quad x \mapsto x - 2\frac{(x,v)}{(v,v)}v$$

ist eine orthogonale Abbildung. (Ist sie auch selbstadjungiert?) Berechne die Eigenwerte und Eigenräume.

b) Zeige: Jedes $\varphi \in O(V)$ mit $\dim V(1,\varphi) = \dim V - 1$ ist von der Form σ_v.

c) Wie sieht die Normalform der Matrizendarstellung von $\sigma_v \circ \sigma_w$ aus?

Aufgabe 2

Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein euklidischer Vektorraum, und sei $\beta \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine alternierende Bilinearform. Zeige, dass eine Orthonormalbasis von V bezüglich $(\cdot,\cdot)$ existiert, so dass die Strukturmatrix von β bezüglich dieser Basis gegeben ist durch eine Block-Diagonalmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} T_1 & & & & & & \\ & T_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & T_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die $T_i \in M_2(\mathbb{R})$ von der Form $T_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}$ für reelle Zahlen $a_i > 0$ sind ($i = 1, \dots, r$).

Aufgabe 3

Die Permutation $\sigma \in S_8$ sei definiert durch $\sigma(i) = i + 1$ für $1 \leq i \leq 7$ und $\sigma(8) = 1$. Bekanntlich ist die Permutationsmatrix P_σ orthogonal. Bestimme eine Matrix $A \in O(8, \mathbb{R})$ so dass $A^{-1}P_\sigma A$ die in der Vorlesung angegebene Normalform für orthogonale Matrizen hat. Wie sieht diese Normalform aus?

Aufgabe 4

Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein euklidischer Vektorraum, $d \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$.

a) Zeige, dass die folgenden Mengen Nullstellenmengen von Quadriken sind:

$$\begin{aligned} E(a,b,d) &= \{v \in V;\ ||a-v|| + ||b-v|| = d\} & \text{falls } ||a-b|| < d, \\ H(a,b,d) &= F(a,b,d) \cup F(a,b,-d) & \text{falls } ||a-b|| > d > 0. \end{aligned}$$

wobei

$$F(a,b,d) = \{v \in V;\ ||a-v|| - ||b-v|| = d\}.$$

Die Punkte a und b heißen *Brennpunkte* der Quadriken.

b) Sei $\dim V = 2$. Zeige, dass jede Ellipse von der Form $E(a,b,d)$ und jede Hyperbel von der Form $H(a,b,d)$ ist. Die Mengen $F(a,b,d)$ heißen dann *Zweige* der Hyperbel $H(a,b,d)$.

c) Sei $V = \mathbb{R}^2$, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Bestimme die Gleichung einer Quadrik, so dass $(0,0)$ ein Brennpunkt ist und die Punkte $(4,3), (3,0), (-12,-5)$ in der Lösungsmenge der Quadrik liegen, und zwar alle auf demselben Zweig, sofern es sich um eine Hyperbel handelt. Wo liegt der andere Brennpunkt, wo liegen die Hauptachsen? Skizziere die Quadrik.