Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2004**
Dr. U. Görtz

Lineare Algebra II

5. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 25.05.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei $n \geq 1$.

a) Zeige, dass die Gruppe W_n der Permutationsmatrizen in $GL_n(\mathbb{R})$ eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(n, \mathbb{R})$ ist.

b) Sei $A \in O(n, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, deren Einträge sämtlich nicht-negativ sind. Zeige, dass dann A eine Permutationsmatrix ist.

Aufgabe 2

Sei $n \geq 1$. Zeige, dass für $A \in M_n(\mathbb{R})$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) A ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

ii) Es gibt eine symmetrische positiv definite Matrix $S \in GL_n(\mathbb{R})$ mit ${}^tA = SAS^{-1}$.

iii) Es gibt ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, so dass A bezüglich dieses Skalarprodukts selbstadjungiert ist.

Aufgabe 3

a) Zeige, dass man jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ in der Form

$$A = H_1 + iH_2$$

mit hermiteschen Matrizen H_1, H_2 schreiben kann. Zeige, dass A genau dann normal ist, wenn $H_1H_2 = H_2H_1$ gilt.

b) Sei $A \in GL_n(\mathbb{C})$ und sei $A = HU$ die Polar-Zerlegung (H positiv definit hermitesch, U unitär). Zeige, dass A genau dann normal ist, wenn $HU = UH$ gilt.

Aufgabe 4

Berechne die Polarzerlegung und eine Cartan-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}).$$