Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

Lineare Algebra II

4. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 18.05.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei V ein unitärer Vektorraum, φ ein Endomorphismus von V und φ^* die zu φ adjungierte Abbildung. Zeige: Es gilt $\operatorname{Spur}(\varphi \circ \varphi^*) \geq 0$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn φ die Nullabbildung ist.

Aufgabe 2

Sei V ein unitärer Vektorraum, φ ein Endomorphismus von V und φ^* die zu φ adjungierte Abbildung. Zeige, dass φ genau dann normal ist, wenn ein Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ existiert, so dass $\varphi^* = p(\varphi)$.

Aufgabe 3

Sei $n \geq 2$ und sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Seien $v_1, \dots, v_k \in V$ und $\mu_1, \dots, \mu_k$ positive reelle Zahlen. Wir definieren Endomorphismen f und g von V durch

$$\begin{aligned} f(w) &= \sum_{i=1}^{k} \mu_i (v_i, w) v_i, \\ g(w) &= \sum_{i=1}^{k} \mu_i \left((v_i, v_i) w - (v_i, w) v_i \right). \end{aligned}$$

Zeige:

a) $g = \operatorname{Spur}(f) \cdot \operatorname{id}_V - f$.

b) f und g sind selbstadjungiert.

c) Alle Eigenwerte von f und g sind ≥ 0.

d) Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Eigenwerte von g zu linear unabhängigen Eigenvektoren, so gilt $\lambda_1 + \lambda_2 \geq \lambda_3$.

e) Wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ den Raum V erzeugen, so gilt in c) und d) sogar $>$.

Aufgabe 4 (Cayley-Transformation)

a) Zeige, dass die Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1, z \neq 1\},\ x \mapsto (x-i)(x+i)^{-1}$$

und

$$\psi\colon \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1, z \neq 1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \mapsto i(1-z)^{-1}(1+z)$$

zueinander inverse Abbildungen sind. Veranschauliche die Abbildungen anhand einer Skizze.

Der Teil a) wird im folgenden auf den Fall höherer Dimension $n \geq 1$ verallgemeinert. Wir setzen

$$\begin{aligned} H &= \{A \in M_n(\mathbb{C});\ A \text{ hermitesch}\}, \\ U &= \{B \in U(n);\ 1 \text{ ist kein Eigenwert von } B\}. \end{aligned}$$

b) Sei $A \in H$ und $B \in U$. Zeige:

$$\begin{aligned} \Phi(A) &:= (A - iE_n)(A + iE_n)^{-1} \in U, \\ \Psi(B) &:= i(E_n - B)^{-1}(E_n + B) \in H, \\ \Phi(A)A &= A\Phi(A), \\ \Psi(B)B &= B\Psi(B). \end{aligned}$$

c) Sei weiter $A \in H$ und $B \in U$. Zeige, dass für alle $C \in U(n)$ gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(CAC^{-1}) &= C\Phi(A)C^{-1} \\ \Psi(CBC^{-1}) &= C\Psi(B)C^{-1} \end{aligned}$$

d) Zeige, dass $\Phi\colon H \longrightarrow U$ und $\Psi : U \longrightarrow H$ zueinander inverse Abbildungen sind.

e) Sei $A \in H$. Zeige, dass genau dann $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist, wenn $\Phi(A)$ symmetrisch ist.

f) Sei $A \in H$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige: $V(\lambda, A) = V(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}, \Phi(A))$.