Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2004**
Dr. U. Görtz

Lineare Algebra II

2. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 04.05.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei K ein Körper. Es bezeichne $M_n(K)$ den K-Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über K. Wir definieren

$$\begin{aligned} \beta\colon M_n(K) \times M_n(K) &\longrightarrow K, \\ (A, B) &\mapsto \operatorname{Spur}(AB). \end{aligned}$$

Zeige:

a) β ist eine symmetrische Bilinearform.

b) β ist nicht ausgeartet. (*Hinweis:* Betrachte Matrizen der Form $E_{ij} = (e_{k\ell})$ mit $e_{k\ell} = 1$ falls $(k, \ell) = (i, j)$ und $e_{k,\ell} = 0$ sonst.)

c) Berechne für $n = 2$ die Fundamentalmatrix von β bezüglich der Basis $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ sowie deren Determinante. Warum ist diese nicht Null?

d) Zeige: Für $K = \mathbb{R}$ ist β genau dann ein Skalarprodukt, wenn $n = 1$ ist.

Aufgabe 2

Sei $(V, (\cdot, \cdot))$ ein euklidischer Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n, w \in V$ $(n \geq 1)$. Es gelte

$$\begin{aligned} (v_i, w) &> 0 \qquad \text{für } i = 1, \ldots, n \\ (v_i, v_j) &\leq 0 \qquad \text{für } 1 \leq i, j \leq n, i \neq j \end{aligned}$$

Zeige, dass $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Vollständige Induktion. Im Induktionsschritt konstruiere für $i = 1, \ldots, n-1$ geeignete Linearkombinationen v_i' von v_i und v_n, die auf v_n senkrecht stehen und die Induktionsvoraussetzung erfüllen.

Aufgabe 3

Sei $V \subseteq \mathbb{R}[X]$ der Untervektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)\colon V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\mapsto \int_0^1 p(X)q(X)dX \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt ist.

b) Konstruiere mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis von V bezüglich des in a) definierten Skalarprodukts.

c) Berechne die Strukturmatrix des in a) definierten Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, X, X^2$ von V.

Aufgabe 4

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ($n \geq 1$).

a) Man kann V auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum (der Dimension $2n$) auffassen. Sei $(\cdot,\cdot)\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ein reelles Skalarprodukt auf V. Zeige, dass es genau dann ein hermitesches Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $(v,w) = \mathrm{Re}\langle v,w\rangle$ für alle $v,w \in V$ gibt, wenn $(v,iw) = -(iv,w)$ für alle $v,w \in V$ gilt. Zeige, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dann eindeutig bestimmt ist.

b) Sei nun $v_1,\ldots,v_n$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums V und sei $V_0 \subseteq V$ der von $v_1,\ldots,v_n$ erzeugte $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeige, dass es zu jedem reellen Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf V_0 ein eindeutig bestimmtes hermitesches Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, welches $(\cdot,\cdot)$ fortsetzt.