Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2004**
Dr. U. Görtz

Lineare Algebra II

11. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 13.07.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

a) Zeige, dass keine Matrix $A \in GL_2(\mathbb{R})$ existiert, so dass sowohl $A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} {}^tA$ als auch $A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} {}^tA$ Diagonalmatrizen sind.

b) Sei K ein Körper, $a, b \in K$. Zeige: es gibt genau dann eine Matrix $A \in GL_2(K)$ mit

$$A \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix},$$

wenn die Gleichung $ax^2 + by^2 = 1$ eine Lösung $x, y \in K$ besitzt.

Aufgabe 2

Sei V_n der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ mit reellen Koeffizienten, und sei $b\colon V_n \times V_n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$b(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q'(x)dx.$$

a) Zeige, dass b eine Bilinearform ist, schreibe b als Summe einer symmetrischen Bilinearform b_s und einer antisymmetrischen Bilinearform b_a und forme b_s in einen Ausdruck um, in dem kein Integral mehr auftritt.

b) Berechne den Signaturtyp von b_s und gib eine Basis von V_n an, bezüglich der b_s durch eine Diagonalmatrix mit Einträgen 1, 0, -1 beschrieben wird.

c) Bestimme eine Basis von V_4, bezüglich der b_a durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 3

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = M_n(\mathbb{R})$ sei mit der symmetrischen Bilinearform

$$b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad b(A,B) = \operatorname{Spur}(AB)$$

versehen. Für $A \in V$ sei $V_A = \{p(A);\ p \in \mathbb{R}[X]\}$. Die Einschränkung von b auf $V_A \times V_A$ werde mit b_A bezeichnet.

a) Sei $V_s \subset V$ der Unterraum der symmetrischen, und $V_a \subset V$ der Unterraum der antisymmetrischen Matrizen. Untersuche, ob die Einschränkung von b auf $V_s \times V_s$ (bzw. auf $V_a \times V_a$) positiv definit, negativ definit oder indefinit ist.

b) Bestimme den Signaturtyp von b.

c) Zeige: Sind $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ähnlich, so haben b_A und b_B denselben Signaturtyp.

d) (*Zusatzaufgabe*) Berechne den Signaturtyp von b_A und gib eine Basis von V_A an, bezüglich der b_A durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & & \\ 0 & -1 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 4

Sei (V, β) ein quadratischer Raum über $\mathbb{R}$, und sei $n = \dim V$. Für $k = 1, \ldots, n$ sei d_k die k-te Hauptdeterminante der Fundamentalmatrix B_β bezüglich einer beliebigen Basis. Es sei $d_k \neq 0$ für alle k. Zeige, dass der Trägheitsindex von (V, β) gerade gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $1, d_1, d_2, \ldots, d_n$ ist.