Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II

10. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 06.07.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl und sei $V = M_n(\mathbb{C})$ der n^2-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen $(n \times n)$-Matrizen. Für $A \in M_n(\mathbb{C})$ betrachte die lineare Abbildung

$$\ell_A \colon V \longrightarrow V, \qquad X \mapsto AX - XA.$$

a) Zeige für $m \geq 0$:

$$\ell_A^m(X) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} A^{m-i} X A^i.$$

b) Zeige: Ist A nilpotent oder unipotent, so ist ℓ_A nilpotent.

c) Gib eine Jordanbasis und die Jordansche Normalform von ℓ_A an, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

d) *(Zusatzaufgabe)* Löse c) für eine beliebige nilpotente Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ in Jordanscher Normalform.

Aufgabe 2

Sei wieder $n \geq 1$ eine ganze Zahl und sei $V = M_n(\mathbb{C})$ der n^2-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen $(n \times n)$-Matrizen. Für $A \in M_n(\mathbb{C})$ sei ℓ_A die in Aufgabe 1 definierte Abbildung, und für $S \in GL_n(\mathbb{C})$ sei i_S die Abbildung

$$i_S \colon V \longrightarrow V, \qquad X \mapsto SXS^{-1}.$$

Zeige:

a) $i_{ST} = i_S \circ i_T$, $\ell_{SAS^{-1}} = i_S \circ \ell_A \circ i_S^{-1}$, $\ell_{A+B} = \ell_A + \ell_B$.

b) Aus $AB = BA$ folgt $\ell_A \circ \ell_B = \ell_B \circ \ell_A$.

c) Ist S unipotent, so auch i_S. (*Hinweis:* Schreibe $i_S - \mathrm{id}_V$ als Komposition von ℓ_S mit einem Automorphismus m_S von V, welcher mit ℓ_S kommutiert, und wende 1 b) an.)

d) Ist A bzw. S diagonalisierbar, so auch ℓ_A bzw. i_S.

e) Ist $A = H + N$ (bzw. $S = H \cdot U$) die additive (bzw. multiplikative) Jordanzerlegung von A (bzw. S) in eine halbeinfache Matrix H und eine nilpotente Matrix N (bzw. unipotente Matrix U), so ist $\ell_A = \ell_H + \ell_N$ (bzw. $i_S = i_H \circ i_U$) die entsprechende Jordanzerlegung des Endomorphismus ℓ_A (bzw. i_S) von V.

Aufgabe 3

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K, und sei f ein trigonalisierbarer Endomorphismus von V. Zeige, dass f genau dann halbeinfach ist, wenn jeder f-invariante Unterraum von V ein f-invariantes Komplement besitzt.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper. Für $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ und $\lambda \in K$ betrachte den Endomorphismus $\Phi_{ij}(\lambda)\colon M_n(K) \longrightarrow M_n(K)$, definiert durch

$$\Phi_{ij}(\lambda)(A) = T_{ji}(\lambda)\, A\, T_{ij}(\lambda),$$

wobei $T_{ij}(\lambda)$ auf der Diagonalen den Eintrag 1, an der Stelle (i, j) den Eintrag λ und ansonsten den Eintrag 0 hat.

a) Zeige, dass $\Phi_{ij}(\lambda)$ die Mengen der symmetrischen, der schiefsymmetrischen und (für $K = \mathbb{R}$) der positiv definiten symetrischen Matrizen jeweils auf sich abbildet.

b) Es gelte $1 + 1 \neq 0$ in K. Zeige, dass man jede symmetrische Matrix durch wiederholtes Anwenden von Transformationen $\Phi_{ij}(\lambda)$ in eine Diagonalmatrix überführen kann.

c) Sei $K = \mathbb{R}$. Zeige, dass man jede positiv definite symmetrische Matrix in $M_n(\mathbb{R})$ durch wiederholtes Anwenden von Transformationen $\Phi_{ij}(\lambda)$ mit $i < j$ in eine Diagonalmatrix überführen kann, und zeige anhand eines Beispiels, dass dies nicht für beliebige symmetrische Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$ möglich ist.