Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II

1. Übungsblatt

Abgabe: Dienstag, 27.04.04 in der Vorlesung

Aufgabe 1

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V. Wir bezeichnen mit $\pi_i\colon V \longrightarrow V/U_i$, $i = 1, 2$, die kanonischen Projektionen. Betrachte nun die Abbildung

$$(\pi_1, \pi_2)\colon V \longrightarrow V/U_1 \times V/U_2, \quad x \mapsto (\pi_1(x), \pi_2(x)).$$

Zeige:

a) Die Abbildung (π_1, π_2) ist K-linear.

b) Die Abbildung (π_1, π_2) ist genau dann injektiv, wenn $U_1 \cap U_2 = 0$ gilt.

c) Die Abbildung (π_1, π_2) ist genau dann surjektiv, wenn $U_1 + U_2 = V$ gilt.

Aufgabe 2

Seien K ein Körper und U, V und W Vektorräume über K. Zeige:

a) $V \otimes_K K \cong V$,

b) $U \otimes_K (V \oplus W) \cong (U \otimes_K V) \oplus (U \otimes_K W)$.

Hinweis: Beweise a) und b) mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts. (Die Existenz des Tensorprodukts wurde in der Vorlesung zwar nur für endlich-dimensionale Vektorräume bewiesen; Tensorprodukte existieren aber auch im unendlich-dimensionalen Fall.)

Seien nun V und W endlich-dimensional, und bezeichne W^* den Dualraum von W. Zeige:

c) $\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes_K W^*, K)$,

d) $(V \otimes_K W)^* \cong V^* \otimes_K W^*$.

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Sei $\mathrm{Bil}(V, W)$ der K-Vektorraum aller K-bilinearen Abbildungen von $V \times W$ nach K.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi\colon \mathrm{Hom}(V, W^*) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V, W), \quad \varphi \mapsto ((x, y) \mapsto \varphi(x)(y))$$

ein Isomorphismus ist.

b) Sei jetzt $V = W$. Fixiere eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_m)$ von V. Sei B^* die duale Basis zu B. Sei $f\colon V \longrightarrow V^*$ eine lineare Abbildung, und $\beta = \Psi(f)$ die zugehörige Bilinearform. Zeige, dass die Matrix, die f bezüglich der Basen B und B^* beschreibt, übereinstimmt mit der transponierten Matrix der Strukturmatrix von β zur Basis B.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\beta\colon V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform, und sei $B = B_\beta$ die Fundamentalmatrix von β bezüglich irgendeiner gewählten Basis.

a) Es sei

$$V^\perp = \{v \in V;\ \beta(v, v') = 0 \text{ für alle } v' \in V\}.$$

Zeige, dass $\dim V^\perp = \dim V - \operatorname{rg} B$.

b) Sei nun $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^4$, und sei β bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{Q}^4$ durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimme eine Basis von $V^\perp$.

Organisatorische Hinweise zur Nachklausur zur Linearen Algebra I

- **Termin:** Samstag, 24. April 2004, 9 Uhr s.t., Dauer: 2 Stunden
- **Ort:** Wolfgang-Paul-Hörsaal: Übungsgruppen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
  Großer Hörsaal Mathematik: Übungsgruppen 10, 11, 12, 13
- **Anmeldung:** Bitte melden Sie sich, falls noch nicht geschehen, möglichst bald im Internet für die Klausur an:
  http://www.math.uni-bonn.de/people/ugoertz/nachklausur.html
  Wenn Sie keinen Internetzugang haben, bitten Sie bitte einen Kommilitonen oder Ihren Übungsgruppenleiter, die Anmeldung für Sie durchzuführen. Für die Anmeldung benötigen Sie Ihre Matrikelnummer.
- Bitte bringen Sie Papier und einen geeigneten Stift (blau oder schwarz; **kein Bleistift**) mit. Andere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.
- Bitte halten Sie bei der Nachklausur Ihren Studentenausweis bereit.