Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

SS 2004

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, Teil 4

Aufgabe 5

Sei V ein unitärer Vektorraum, φ ein normaler Endomorphismus von V und φ^* die zu φ adjungierte Abbildung. Zeige: (die Punkte a) und b) wurden schon in der Vorlesung bewiesen)

a) Es gilt $\ker \varphi = \ker \varphi^*$.

b) Ein Vektor $v \in V$ ist genau dann Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ, wenn v Eigenvektor von φ^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ ist.

c) Es gilt $\operatorname{im} \varphi = \operatorname{im} \varphi^*$.

d) Ist ψ ein weiterer normaler Endomorphismus von V, so ist $\varphi \circ \psi = 0$ äquivalent zu $\psi \circ \varphi = 0$.

Aufgabe 6

Sei $A \in O(n, \mathbb{R})$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeige, dass dann A sogar eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 7

Sei $f \colon V \longrightarrow W$ eine bijektive lineare Abbildung zwischen unitären Vektorräumen V und W. Zeige, dass es Orthonormalbasen von V und W gibt, bezüglich derer f durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

Aufgabe 8

Sei $n \geq 1$. Die orthogonale Gruppe $O(n)$ ist kompakt. Aus der Iwasawa-Zerlegung folgt daher, dass $GL_n(\mathbb{R})$ homöomorph ist zu dem Produkt von $\mathbb{R}^N$ ($N = \frac{n(n+1)}{2}$) und einer kompakten Menge.

Bemerkung: Darüberhinaus gilt, dass $O(n)$ eine maximale kompakte Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$ ist, und dass alle maximal kompakten Untergruppen zueinander konjugiert sind.

Analoges gilt für $\mathbb{C}$ und $U(n)$ anstelle von $\mathbb{R}$ und $O(n)$.