Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II
Präsenzaufgaben, Teil 3

Aufgabe 5

a) Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeige, dass für $x, y \in V$ genau dann $||x|| = ||y||$ gilt, wenn $x + y \perp x - y$ ist.

b) Sei nun $V \neq 0$ ein unitärer Vektorraum. Zeige, dass $x, y \in V$ existieren, für die die Aussage von Teil a) nicht gilt, dass sie aber für alle $x, y \in V$ mit $\langle x, y\rangle = 0$ weiterhin gilt.

c) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Jeder positiv definiten hermiteschen Form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V kann man eine Norm $||\cdot||$ auf V zuordnen durch $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ für $v \in V$. Zeige durch Konstruktion eine Umkehrabbildung, dass diese Zuordnung eine Bijektion

$$\begin{aligned} &\{\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{C};\ \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ hermitesch, positiv definit}\} \\ \longrightarrow\ &\{||\cdot||\colon V \longrightarrow \mathbb{R}; ||\cdot|| \text{ Norm auf } V, \text{ die (P) erfüllt }\}, \end{aligned}$$

wobei (P) die sogenannte Parallelogrammgleichung ist:

$$\text{(P)} \qquad ||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2(||v||^2 + ||w||^2) \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Aufgabe 6

a) Zeige, dass die Vorschrift

$$\varphi \mapsto D_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{R} \longrightarrow SO(2, \mathbb{R})$ definiert.

b) Ist $S_0 \in O(2, \mathbb{R}) \setminus SO(2, \mathbb{R})$ eine fixierte Spiegelung, zum Beispiel $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, dann hat jede Matrix $S \in O(2, \mathbb{R}) \setminus SO(2, \mathbb{R})$ die Form $S = S_0 D_\varphi$ für geeignetes φ.

c) Zeige, dass für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt: $S_0 D_\varphi = D_{-\varphi} S_0$, also $S_0 D_\varphi = (D_{\frac{\varphi}{2}})^{-1} S_0 D_{\frac{\varphi}{2}}$. Ist $g_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ die Spiegelungsgerade von S_0, so ist $g = D_{-\frac{\varphi}{2}}(g_0)$ die Spiegelungsgerade von $S_0 D_\varphi$.

Aufgabe 7

Untersuche die folgenden Matrizen auf die Eigenschaften *symmetrisch, hermitesch, orthogonal, unitär* und *normal.*

a) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & i & i-1 \\ \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i & 0 \\ -i & -i & i-1 \end{pmatrix}$,

c) $\frac{1}{125}\begin{pmatrix} 75 & 60 & 80 \\ 60 & 53 & -96 \\ 80 & -96 & -3 \end{pmatrix}$,

d) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8

Sei $A \in GL_n(\mathbb{C})$ hermitesch. Zeige, dass A^{-1} hermitesch ist.