Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz **SS 2004**

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, Teil 2

Aufgabe 5

Welche der folgenden Abbildungen

$$(\cdot,\cdot)\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definieren ein Skalarprodukt?

a) $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2$,

b) $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3$,

c) $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3$.

d) Bestimmen Sie in den Fällen, in denen ein Skalarprodukt vorliegt, das orthogonale Komplement des von $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ erzeugten Unterraums.

Aufgabe 6

Wende das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt an.

Aufgabe 7

(Vergleiche Aufgabe 1 des Übungsblatts.)

Es sei

$$\begin{aligned} \beta\colon M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (A, B) &\mapsto \operatorname{Spur}(AB). \end{aligned}$$

Sei $N \geq 1$ und seien $A_1, \dots, A_N \in M_n(\mathbb{R})$ paarweise miteinander kommutierende Matrizen. Ferner gelte für alle i, dass das Minimalpolynom von A_i in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Sei $V \subseteq M_n(\mathbb{R})$ der von den A_i erzeugte Unterraum. Zeige:

$$\beta|_{V\times V}\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist ein Skalarprodukt.