Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. U. Görtz

SS 2004

Lineare Algebra II

Präsenzaufgaben, Teil 1

Aufgabe 5

Sei X eine Menge und sei K ein Körper. Sei V die Menge aller Abbildungen von X nach K. Dann ist V ein K-Vektorraum, wenn man Addition und Skalarmultiplikation elementweise definiert, das heißt:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x),\\ (af)(x) &:= af(x)\end{aligned}$$

für $f, g, \in V$, $a \in K$, $x \in X$.

Seien $x_1, \dots, x_n \in X$, $n \geq 1$ paarweise verschiedene Elemente, und sei

$$W = \{f \in V;\ f(x_i) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\}.$$

a) Zeige, dass W ein Untervektorraum von V ist.

b) Bestimme $\dim_K(V/W)$.

Aufgabe 6

Sei K ein Körper, und seien V und W Vektorräume über K. Mit V^* bezeichnen wir den Dualraum von V.

a) Zeige, dass die Abbildung

$$V^* \times W \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W), \quad (\varphi, w) \mapsto (v \mapsto \varphi(v)w)$$

bilinear ist und daher eine Abbildung $\Phi\colon V^* \otimes_K W \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W)$ induziert.

b) Seien nun V und W endlich-dimensional. Zeige, dass die Abbildung Φ aus Teil a) ein Isomorphismus ist.

c) Sei nun $V = W = K[X]$ der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in K. Ist die Abbildung Φ auch in diesem Fall ein Isomorphismus?

Aufgabe 7

Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\beta\colon V \times V \longrightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform.

Es sei

$$V^\perp = \{v \in V;\ \beta(v, v') = 0 \text{ für alle } v' \in V\}.$$

Zeige, dass β auf $V/V^\perp$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform induziert.