Prof. Dr. M. Rapoport **SS 2004**
Dr. U. Görtz

Lineare Algebra II

Klausur

Aufgabe 1

Sei $A \in M_6(\mathbb{C})$ eine Matrix mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mu_A(X) = (X-1)^2(X-2)^3$,
ii) $\dim V(2, A) = 1$.

Bestimme die Jordansche Normalform von A.

(12 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$, und sei $A = D + N$ die Jordan-Zerlegung von A, aufgefaßt als Element von $M_n(\mathbb{C})$, in eine diagonalisierbare Matrix $D \in M_n(\mathbb{C})$ und eine nilpotente Matrix $N \in M_n(\mathbb{C})$. Zeige, dass dann D und N schon in $M_n(\mathbb{R})$ liegen.

(15 Punkte)

Aufgabe 3

Berechne zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$$

die Polarzerlegung $A = PS$, wobei P symmetrisch und positiv definit und $S \in O(3, \mathbb{R})$ ist.

(16 Punkte)

Aufgabe 4

Betrachte den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimme eine Orthonormalbasis durch Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens auf die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(14 Punkte)

Aufgabe 5

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl der Matrizen $A \in O(n, \mathbb{R})$, die obere Dreiecksmatrizen sind.

(13 Punkte)

Aufgabe 6

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $(\cdot, \cdot)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukte auf V. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, so dass $(v, w) = a\langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in V$.

ii) Für alle $v, w \in V$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ gilt $(v, w) = 0$.

(1+14 Punkte)

Aufgabe 7

Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Sei (V, β) ein nichtausgearteter quadratischer Raum über K. Zeige:

a) Ist $U \subseteq V$ ein total isotroper Unterraum von V, so gilt $\dim U \leq \frac{1}{2} \dim V$.

b) Ist $\dim V = 2n$ gerade, und existiert ein total isotroper Unterraum $U \subseteq V$ der Dimension n, so ist V isometrisch zum hyperbolischen Raum der Dimension $2n$.

(7+8 Punkte)