MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN
Prof. Dr. Philip Welch

Bonn, den 24.04.2002

Berechenbarkeitstheorie

Aufgabe 2

1. Zeigen Sie, dass die durch

$$\sigma(x) = \text{ Anzahl der Divisoren von } x,$$
$$\pi(x) = \text{ Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich } x$$

definierten Funktionen $\sigma, \pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ p.r. sind.

2. Finden Sie eine p.r. Funktion $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $x * y \leq f(x, y)$ gilt.
Hieraus folgt, dass wir $*$ p.r. definieren können durch

$$x * y = \min_{z \leq f(x,y)} (\mathrm{Seq}(z) \wedge \ldots).$$

Hinweis: Finden Sie zunächst eine Funktion $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $x * y \leq p_{\mathrm{lh}(x)+\mathrm{lh}(y)}^{h(x,y)}$.

3. **(Simultane Definition durch Rekursion)** Die Funktionen g_1, g_2, h_1 und h_2 seien p.r.
Wir definieren f_1 und f_2 durch

$$\begin{aligned} f_1(0, \vec{x}) &= g_1(\vec{x}), \\ f_2(0, \vec{x}) &= g_2(\vec{x}), \\ f_1(y+1, \vec{x}) &= h_1(\vec{x}, y, f_1(y, \vec{x}), f_2(y, \vec{x})), \\ f_2(y+1, \vec{x}) &= h_2(\vec{x}, y, f_1(y, \vec{x}), f_2(y, \vec{x})). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass f_1 und f_2 p.r. sind.
Hinweis: Beweisen Sie, dass $\bar{f}(y, \vec{x}) = \prec f_1(y, \vec{x}), f_2(y, \vec{x}) \succ$ p.r. ist. Die Funktionen f_1 und f_2 können durch p.r mit $\bar{f}$ und Komposition mit ℓ und r gewonnen werden.

4.* **(Wertverlaufsrekursion)** Die Funktion f sei total rekursiv. Wir definieren

$$\bar{f}(y, \vec{x}) = \langle f(0, \vec{x}), \ldots, f(y-1, \vec{x}) \rangle.$$

Dies ist (noch) keine explizite Definition von $\bar{f}$, weil sie von der Größe des Wertes y abhängig ist. Wir definieren statt dessen

$$\bar{f}(y, \vec{x}) \simeq \mu z \, (\mathrm{Seq}(z) \wedge \mathrm{lh}(z) = y \wedge (\forall i < y)((z)_{i+1} = f(i, \vec{x}))).$$

Beachten Sie, dass dann $f(y-1, \vec{x}) \simeq (\bar{f}(y, \vec{x}))_y$ gilt.
Betrachten Sie nun eine beliebige total rekursive Funktion g. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\begin{aligned} f(0, \vec{x}) &= k, \\ f(y, \vec{x}) &\simeq g(\bar{f}(y, \vec{x}), y, \vec{x}) \end{aligned}$$

($k \in \mathbb{N}$ eine Konstante) ist eine rekursive Funktion f definiert.
Hinweis: Es reicht zu bemerken, dass $\bar{f}$ rekursiv ist.

(b) Falls g p.r. ist, ist auch f p.r.