



Bonn, den 03.07.2002

Berechenbarkeitstheorie

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 1

Sei $T \subseteq 2^{<\mathbb{N}}$ ein unendlicher rekursiver Baum.

- Beweisen Sie: Wenn $[T] = \{f\}$ gilt, so ist f rekursiv.
- Beweisen Sie, daß $[T]$ ein Element g besitzt, so daß $g \equiv_T A$ gilt, wobei A eine rekursiv abzählbare Menge ist.

Aufgabe 2

Es sei T eine nichtleere Teilmenge von $X^{<\mathbb{N}}$ ($X = 2$ oder $X = \mathbb{N}$).

Zeigen Sie: Wenn T ein perfekt Baum ist, so hat $[T]$ 2^{\aleph} -viele Elemente.

Hinweis: Zeigen Sie, daß eine Injektion $F : 2^{\aleph} \rightarrow [T]$ existiert. Definieren Sie dafür zuerst eine Injektion $F_0 : 2^{<\mathbb{N}} \rightarrow T$, so daß $F_0(\sigma) \upharpoonright F_0(\tau)$ aus $\sigma \upharpoonright \tau$ folgt für alle $\sigma, \tau \in 2^{<\mathbb{N}}$.

Aufgabe 3

Vollenden Sie den Beweis aus der Vorlesung, daß es 2^{\aleph} -viele (d.h. Kontinuum-viele) $\underline{a}, \underline{b}$ mit $\underline{a} \upharpoonright_T \underline{b}$ gibt.

Hinweis: In der Beweisskizze war noch zu zeigen, daß $[T]$ 2^{\aleph} -viele unvergleichbare $f \in 2^{\aleph}$ enthält.

- Zeigen Sie, daß T perfekt ist.
- Zeigen Sie: Für $f, g \in [T]$ folgt $[f]_T \upharpoonright_T [g]_T$ aus $f \neq g$.

Aufgabe* 4

Sei $\{b_n\}$ eine abzählbare Menge von nicht-rekursiven Graden. Beweisen Sie, daß eine abzählbare Menge von Graden $\{a_n\}$ existiert, so daß gilt:

- $\forall m, n (n \neq m \Rightarrow \underline{a}_m \upharpoonright_T \underline{a}_n)$,
- $\forall m, n (\underline{a}_m \upharpoonright_T \underline{b}_n)$.

Hinweis: Kombinieren Sie die Konstruktionen aus den Beweisen der Sätze 2 und 4 aus §4. Setzen Sie als Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} R_{\langle e, n, m \rangle} &: \chi_{A_m} \neq \varphi_e^{B_n}, \\ S_{\langle e, n, m \rangle} &: \chi_{B_m} \neq \varphi_e^{A_n}, \\ T_{\langle e, n, m \rangle} &: \chi_{A_n} \neq \varphi_e^{A_m} \text{ (für } n \neq m \text{)}. \end{aligned}$$

Homepage der Vorlesung:

<http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Welch.html>

Newsgroup: uni-bonn.math.logik