

Berechenbarkeitstheorie

Aufgabenblatt 9

Das Mathematische Institut sucht DRINGEND studentische Hilfskräfte für die Anfängervorlesungen. Interessierte Studenten mögen sich per e-mail oder Telefon bei Herrn Dr. Torsten Hefer (hefer@math.uni-bonn.de; 0228/73-5278) melden.

Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie, daß $B \in \Sigma_n$ aus $B \leq_m A \wedge A \in \Sigma_n$ folgt.

(b) A und B seien definiert durch

$$\langle x, y \rangle \in A \Leftrightarrow \forall z < y \ R(x, y, z),$$

$$\langle x, y \rangle \in B \Leftrightarrow \exists z < y \ R(x, y, z).$$

Zeigen Sie, daß $A, B \in \Sigma_n$ aus $R \in \Sigma_n$, und $A, B \in \Pi_n$ aus $R \in \Pi_n$ folgt.

Aufgabe 2

Die Mengen Fin, Cof und Rec seien definiert durch

$$\text{Fin} = \{e \mid W_e \text{ ist endlich}\},$$

$$\text{Cof} = \{e \mid \overline{W}_e \text{ ist endlich}\},$$

$$\text{Rec} = \{e \mid W_e \text{ ist rekursiv}\}.$$

Zeigen Sie, daß $\text{Fin} \in \Sigma_2$, $\text{Cof} \in \Sigma_3$ und $\text{Rec} \in \Sigma_3$ gilt.

Aufgabe 3

Es gelte $n \geq 1$. Beweisen Sie, daß $B \leq_1 A$ aus $B \leq_m A$ mit $A = \emptyset^{(n)}$ folgt.

Bemerkung: Es ist auch möglich folgendes zu zeigen: Es gelte $n \geq 1$, $B \leq_1 A$ aus $B \leq_m A$ mit $B = \emptyset^{(n)}$ folgt. Mit Aufgabe 3 folgt daraus, daß man die Σ_n -Vollständigkeit von A statt mit $B \leq_1 A$ auch durch „ $A \in \Sigma_n$ und für alle $B \in \Sigma_n$ gilt $B \leq_m M$ “ zeigen kann.

Aufgabe 4

Beweisen Sie das

$$\text{Tot} =_{\text{def}} \{e \mid W_e = \mathbb{N}\},$$

Π_2 -Vollständig ist ist.

Homepage der Vorlesung:

<http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Welch.html>

Newsgroup: uni-bonn.math.logik