

Bonn, den 05.06.2002

Berechenbarkeitstheorie

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1

Zeigen Sie, daß es rekursive Funktionen $f, g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ gibt, so daß gilt:

$$W_x \cup W_y = W_{f(x,y)} \quad \text{und} \quad W_x \cap W_y = W_{g(x,y)}.$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Es existiert ein n mit $E_n = \{n\}$. (*Erinnerung: $E_n = \text{ran } \varphi_n$.*)

Aufgabe 3

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Es existiert eine n mit $W_n = \{2n\}$.
- (b) Es existiert eine n mit $W_n = \mathbb{N} \setminus \{n\}$.
- (c) Es existiert eine n mit $W_n = \{x \mid \varphi_n(x) \uparrow\}$.
- (d) Es existiert eine n mit $W_n = \{x \mid \exists y[x = 2y \wedge \varphi_n(y) \downarrow]\}$ und $W_n \neq \emptyset$.
- (e) Es existiert eine n mit $W_n = \{x \mid \exists y[x = 2y \wedge \varphi_n(y) \downarrow]\}$ und $W_n = \{3\}$.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt ein f mit $W_{f(x)} = \{f(x) + x\}$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie: Es existiert kein $\varphi_e \in \mathcal{C}$ mit:

Wenn φ_x die charakteristische Funktion χ_F einer endlichen Menge F ist, dann gilt $\varphi_e(x) \downarrow \max F$.

Hinweis: Definieren Sie eine Funktion φ_n mit

$$\varphi_n(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{für } t = \mu s[\varphi_{e,s}(n) \downarrow], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Homepage der Vorlesung:

<http://www.math.uni-bonn.de/people/logic/Lectures/SoSe2002/Welch.html>

Newsgroup: uni-bonn.math.logik