Hodge-Theorie auf kompakten Riemannschen Flächen

Niklas Lipski

Geboren am 14. Dezember 1992 in Osnabrück

1. August 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Matthias Lesch

Mathematisches Institut

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Auf den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lässt sich zu einer vorgegebenen diskreten Verteilung von Null- und Polstellen nach dem Weierstraßschen Produktsatz stets eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ angeben, deren Ordnungen mit denen der gegebenen Verteilung übereinstimmen. Auf einer kompakten Riemannschen Fläche X folgt allerdings aus dem Residuensatz, dass sich alle Ordnungen zu Null addieren. Mithilfe der *Hodge-Theorie* werden wir sehen, dass während der Raum $\mathscr{M}(X)$ der meromorphen Funktionen auf X unendlichdimensional ist, der Raum $\mathscr{O}_D(X)$ der durch eine vorgegebene Null- und Polstellenverteilung D nach unten beschränkten meromorphen Funktionen stets endlichdimensional ist.
Das zentrale Ergebnis dieser Arbeit, das *Theorem von Riemann-Roch*, stellt eine überraschende Verbindung dieser Zahlen zu dem Geschlecht g der Fläche her. Wir finden also ein Indextheorem, welches analytische Größen mit einer topologischen Invariante verknüpft.
Um das Problem in einem geeigneten Kontext zu behandeln, zeigen wir eine elementare Beziehung zwischen den *Divisoren* genannten Null- und Polstellenverteilungen und *holomorphen Linienbündeln* L über der Fläche X auf. Im ersten Kapitel wiederholen wir daher kurz die wichtigsten Ergebnisse über Vektorbündel.
Die Dimensionen der Funktionenräume $\mathscr{O}_D(X)$, welche nach Transformation des Problems in den Kontext von Bündeln holomorphen Schnitten eines Linienbündels entsprechen, analysieren wir anschließend mithilfe der *Dolbeault-Kohomologie*, welche die Anzahl von bündelwertigen Differenzialformen misst. Das zweite Kapitel beschäftigt sich daher mit Differentialformen und Dolbeault-Kohomologie.
In Kapitel 3 beweisen wir schließlich das Riemann-Rochsche Theorem und liefern einige erste Anwendungen. Unter anderem sehen wir unter Verwendung von Überlagerungstheorie, dass das Theorem eine Existenzaussage von holomorphen Überlagerungsabbildungen $X \to \hat{\mathbb{C}}$ liefert. Damit können wir beispielsweise alle kompakten Riemannschen Flächen mit Geschlecht $g = 0$ klassifizieren.
Im vierten Kapitel entwickeln wir mithilfe der Hodge-Theorie die in den ersten Kapiteln benutzten Endlichkeitsaussagen. Dazu benutzen wir eine Hodge-Zerlegung, welche wir in dieser Arbeit allerdings nicht beweisen. Außerdem stellen wir einen Zusammenhang zwischen den Kohomologiegruppen und *harmonischen Differentialformen* her, der unter anderem über das Prinzip der *Serre-Dualität* eine Erklärung der Dolbeault-Kohomologie in Termen von holomorphen Funktionen und Differentialformen mit eingeschränktem Null- und Polstellen liefert.

Neben rudimentären Kenntnissen in der Theorie der Riemannschen Flächen werde ich auch die grundlegenden Eigenschaften von Vektorbündeln und deren Schnitten voraussetzen. Eine Einführung zum Thema Riemannsche Flächen findet sich in [For77] und [Lam05]. Für die grundlegende Theorie von Vektorbündeln siehe zum Beispiel [Zin10].

1 Komplexe Vektorbündel

1.1 Vektorbündel

Die Theorie von Vektorbündeln über differenzierbaren Mannigfaltigkeiten erlaubt eine angemessene Beschreibung von nur lokal trivialen Objekten wie Tangentialräumen in einem globalen Kontext. Die Schnitte eines Vektorbündels verallgemeinern den Funktionsbegriff auf Mannigfaltigkeiten.

Definition 1.1 (Vektorbündel)**.** *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Das Tripel (E, π, M) oder kurz $E \to M$ bzw. E heißt glattes $\mathbb{K}$-Vektorbündel vom Rang n über M, falls:*

1. *E ist eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : E \to M$ eine Submersion*
2. *Für alle $p \in M$ ist $E_p := \pi^{-1}(\{p\})$ ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum*
3. *Für alle $p \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq M$ von p und ein Diffeomorphismus $\varphi : E \restriction U := \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K}^n$, sodass für alle $q \in U$ die Abbildung $\varphi \restriction E_q \colon E_q \to \{q\} \times \mathbb{K}^n$ ein $\mathbb{K}$-linearer Isomorphismus ist und das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
E \restriction U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{K}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

   wobei pr_1 *die Projektion auf die erste Komponente ist.*

E wird auch *Totalraum*, E_p *Faser* und (U, φ) *Bündelkarte* oder *lokale Trivialisierung* genannt. Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M mit lokalen Trivialisierungen (φ_i), dann heißt $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ *Bündelatlas.* Im Folgenden betrachten wir ausschließlich glatte Vektorbündel.

Definition 1.2. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.*

1. *Ein Vektorbündel $E \to M$ heißt trivial, falls es eine Bündelkarte (U, φ) mit $U = M$, dh. eine globale Trivialisierung gibt.*
2. *Ein Vektorbündel $E \to M$ heißt Linienbündel, falls sein Rang gleich 1 ist.*

Definition 1.3. *Seien $E, F \to M$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M mit zugehörigen Projektionen π_E, π_F. Eine glatte Abbildung $\phi\colon E \to F$ heißt Bündelhomomorphismus, falls $\phi \circ \pi_F = \pi_E$ und ϕ faserweise ein Vektorraumhomomorphismus ist, das heißt $\phi \restriction E_p\colon E_p \to F_p$ ist $\mathbb{K}$-linear. Ist ϕ zusätzlich faserweise ein Vektorraumisomorphismus, so heißt ϕ Bündelisomorphismus und wir schreiben $E \cong F$.*

Ist $E \to M$ ein Vektorbündel mit Bündelatlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, dann wirken Kartenwechsel auf den Fasern linear und damit aufgrund des kommutativen Diagramms

$$\begin{tikzcd}
U_i \cap U_j \times \mathbb{K}^n \arrow[r, "\varphi_j^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & E \restriction U_i \cap U_j \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\pi"] & U_i \cap U_j \times \mathbb{K}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& U_i \cap U_j &
\end{tikzcd}$$

linear auf die zweite Komponente: $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(p, v) = (p, g_{ij}(p)v)$ mit $g_{ij}(p) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ bzgl. der Standardbasis. Die glatten Funktionen $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ heißen *Übergangsfunktionen*, die Menge (g_{ij}) heißt *Cozyklus* des Atlas (U_i, φ_i). Aus den Eigenschaften der Karten folgt sofort:

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik} \quad \text{auf } U_i \cap U_j \cap U_k \text{ (Cozykelrelation)} \tag{1}$$

Insbesondere ist $g_{ii} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ und $g_{ij}^{-1} = g_{ji}$. Umgekehrt kann man zu jedem Cozyklus ein entsprechendes Vektorbündel konstruieren, dies sagt der folgende Satz.

Satz 1.4. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung und $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ glatt mit $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$. Dann gibt es ein Vektorbündel $E \to M$ vom Rang n und einen Bündelatlas $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, dessen Übergangsfunktionen gerade die gegebenen g_{ij} sind.*

Beweis. [Zin10, S.7] □

Lemma 1.5. *Seien $E, F \to M$ zwei Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M und nach evtl. Verfeinerung lokal trivialisierender Umgebungen zu einer offenen Überdeckung (U_i)*

$$g_{ij}^E, g_{ij}^F : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$$

die entsprechenden Übergangsfunktionen. Dann gilt $E \cong F$ genau dann, wenn es glatte Funktionen $h_i : U_i \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ gibt, sodass

$$g_{ij}^E = h_i g_{ij}^F h_j^{-1}$$

Beweis. Der Beweis ist eine einfache Übung. □

Beispiel 1.6. *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m.*

1. *$M \times \mathbb{K}^n$ ist offenbar ein triviales Vektorbündel über M und wird das triviale Bündel vom Rang n genannt.*

2. *Ist $g_{ij} = \mathrm{id_n}$ ein Cozyklus, so definiert der zugeordnete Bündelatlas wegen $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i = \mathrm{id}_{\mathrm{M}\times\mathbb{K}^{\mathrm{n}}}$ eine globale Bündelkarte und damit ein triviales Bündel.*

3. *Das Tangentialbündel TM, dessen Fasern die Tangentialräume T_pM sind, ist ein Vektorbündel vom Rang m. Sind $x_1^i, \dots, x_m^i$ lokale Koordinaten von M, so sind*
$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1^i}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_m^i}\right|_p$$
Basen von T_pM. Der Cozyklus ist aufgrund der Kettenregel gegeben durch die Matrix
$$g_{ij}(p) = \left(\left.\frac{\partial x_\beta^j}{\partial x_\alpha^i}\right|_p\right)_{\alpha,\beta=1}^m .$$

Definition 1.7. *Die Operationen $\oplus, \otimes, \wedge, \cdot^*$ von Vektorräumen übertragen sich in natürlicher Weise auf Vektorbündel. Seien $E, F \to M$ n- bzw. m-rangige $\mathbb{K}$-Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M mit nach evtl. Verfeinerung gemeinsamer trivialisierender offener Überdeckung $\bigcup_{i\in I} U_i = M$ und g_{ij}^E, g_{ij}^F die entsprechenden Übergangsfunktionen.*

1. *$E \oplus F \to M$ ist das Vektorbündel mit den Fasern $(E \oplus F)_p = E_p \oplus F_p$ und den Übergangsfunktionen*
$$\begin{pmatrix} g_{ij}^E & 0 \\ 0 & g_{ij}^F \end{pmatrix} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(n+m, \mathbb{K}).$$

2. *$E \otimes F \to M$ ist gegeben durch die Fasern $(E \otimes F)_p = E_p \otimes F_p$ und die Übergangsfunktionen*
$$g_{ij}^E \otimes g_{ij}^F : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(nm, \mathbb{K}).$$

3. *$\Lambda^k E \to M$ mit den Fasern $(\Lambda^k E)_p = \Lambda^k E_p$ ist charakterisiert durch*
$$\Lambda^k g_{ij}^E : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}\left(\tbinom{n}{k}, \mathbb{K}\right).$$

4. *$E^* \to M$ mit $(E^*)_p = (E_p)^*$ besitzt die Übergangsfunktionen*
$$\left(g_{ij}^E\right)^{-T} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}).$$

Dieser Zugang wurde aus [GH78, S.67] *adaptiert.*

Lemma 1.8. *Ist $L \to M$ ein $\mathbb{K}$-Linienbündel, dann gilt $L \otimes L^* \cong M \times \mathbb{K}$.*

Beweis. Sei $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ ein Bündelatlas von L mit zugehörigen Übergangsfunktionen $g_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathbb{K}^*$. Dann besitzt $L \otimes L^*$ die Übergangsfunktionen $g_{ij} \otimes g_{ij}^{-T} = g_{ij}/g_{ij} = 1$ und ist somit isomorph zum trivialen Bündel. □

Im Kontext der Riemannschen Flächen besitzen unsere Mannigfaltigkeiten sogar eine holomorphe Struktur. Wir können daher auch von holomorphen Cozyklen sprechen. Dies ermöglicht eine sinnvolle Definition von holomorphen Vektorbündeln über Riemannschen Flächen. Im Folgenden betrachten wir komplexe Vektorbündel. Die nachfolgende Definition stammt aus [For77, S.196].

Definition 1.9. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $E \to X$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang n mit Bündelatlas $\mathscr{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Sei (g_{ij}) der zugeordnete Cozyklus. $\mathscr{A}$ heißt holomorpher Bündelatlas, falls alle $g_{ij} : X \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ holomorph sind, das heißt holomorph in jeder Komponenten.*

Zwei Bündelatlanten $\mathscr{A}$ und $\mathscr{A}'$ von E heißen holomorph äquivalent, falls $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ ein holomorpher Bündelatlas ist. Eine holomorphe Struktur auf E ist eine Äquivalenzklasse bezüglich dieser Äquivalenzrelation. Ein komplexes Vektorbündel zusammen mit einer holomorphen Struktur heißt holomorphes Vektorbündel.

Sei X eine Riemannsche Fläche. Aufgefasst als reelle glatte Mannigfaltigkeit der Dimension 2 besitzt X zu jedem $p \in X$ den reellen Tangentialraum $T_{p\mathbb{R}}X$. Wir definieren den *komplexifizierten Tangentialraum* als $T_{p\mathbb{C}}X = T_{p\mathbb{R}}X \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, das heißt mit lokalen Koordinaten x, y um p ist

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p \otimes 1, \quad \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \otimes 1, \quad \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p \otimes i, \quad \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \otimes i$$

eine $\mathbb{R}$-Basis von $T_{p\mathbb{C}}X$. Unter den kanonischen Identifikationen bildet $\left\{\partial_x|_p, \partial_y|_p\right\}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $T_{p\mathbb{C}}X$ und wir erhalten das komplexifizierte Tangentialbündel $T_{\mathbb{C}}X$ von X. Ein Basiswechsel auf den Fasern zu den Wirtinger-Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

führt auf eine Zerlegung der Fasern $T_{p\mathbb{C}}X = T_p^{1,0}X \oplus T_p^{0,1}X$ wobei $T_p^{1,0}X := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\partial_z|_p\right\}$ und $T_p^{0,1}X := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\partial_{\bar{z}}|_p\right\}$, welche aufgrund der holomorphen Kartenwechsel erhalten bleibt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z^\alpha} &= \frac{\partial z^\beta}{\partial z^\alpha}\frac{\partial}{\partial z^\beta} + \frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial z^\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} = \frac{\partial z^\beta}{\partial z^\alpha}\frac{\partial}{\partial z^\beta}\\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} &= \frac{\partial z^\beta}{\partial \bar{z}^\alpha}\frac{\partial}{\partial z^\beta} + \frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial \bar{z}^\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} = \frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial \bar{z}^\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}.\end{aligned}$$

Somit induziert diese eine Zerlegung

$$T_{\mathbb{C}}X = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X \tag{2}$$

des komplexifizierten Tangentialbündels. Insbesondere ist $T^{1,0}X$ ein holomorphes Linienbündel über X, da die Übergangsfunktionen holomorph sind.

Bemerkung 1.10. *Viele Überlegungen aus der Kategorie glatter Vektorbündel übertragen sich direkt auf holomorphe Vektorbündel. So können wir von holomorphen Trivialisierungen oder Bündelhomomorphismen sprechen und Satz* 1.4[1] *und Lemma* 1.5 *gelten ebenso in der holomorphen Kategorie.*[2] *Falls $E, F \to X$ holomorphe Vektorbündel sind, dann sind auch $E \oplus F$, $E \otimes F$, $\Lambda^k E$ und E^* holomorphe Vektorbündel über X, wie sich leicht an den Übergangsfunktionen sehen lässt.*

1.2 Schnitte von Vektorbündeln

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{K}^n$ eine glatte Funktion. Dann können wir f auch als Abbildung $M \to M \times \mathbb{K}^n$ in das triviale Bündel auffassen, mit der Eigenschaft, dass $\pi \circ f = \mathrm{id}_M$ gilt. Ersetzen wir $M \times \mathbb{K}^n$ durch ein beliebiges Vektorbündel E, haben solche glatte Abbildungen $M \to E$ aufgrund der lokalen Trivialität von Vektorbündeln nur lokal das Verhalten einer Funktion. Diese Abbildungen werden Schnitte genannt.

Definition 1.11. *Sei $E \to M$ ein Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M und $U \subseteq M$ offen. Eine glatte Abbildung $f\colon U \to E$ heißt Schnitt von E über U, falls $\pi \circ f = \mathrm{id}_U$. Die Menge aller Schnitte von E über U bezeichnen wir mit $\Gamma(U, E)$.*

Definition 1.12. *Sei $E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang n über einer glatten Mannigfaltigkeit M. Ein Rahmen von E über einer offenen Menge $U \subseteq M$ ist ein Tupel*

$$(s_1, \ldots, s_n) \in \Gamma(U, E)^n$$

sodass für alle $p \in U$ die Menge $\{s_1(p), \ldots, s_n(p)\}$ eine Basis von E_p ist.

[1] Einen Beweis für holomorphe Cozykel findet sich in [For77, S.197].

[2] Dazu muss nur an den richtigen Stellen „glatt“ durch „holomorph“ ersetzt werden, dies soll hier aber nicht weiter ausgeführt werden.

Ein Rahmen ist also eine Art Basis des Bündels E. Lokal existiert immer ein Rahmen, denn ist $\varphi\colon E \restriction U \to U \times \mathbb{K}^n$ eine lokale Trivialisierung von E und $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$, dann ist $\varphi^{-1}(\,\cdot\,, e_1), \dots, \varphi^{-1}(\,\cdot\,, e_n)$ ein Rahmen von E über U.

Ist $E \to M$ ein Vektorbündel vom Rang n, $f \in \Gamma(U, E)$ ein Schnitt und (U_i, φ) eine lokale Trivialisierung von E, dann gilt

$$\varphi \circ f(p) = (p, f_i(p)) \quad \text{auf } U \cap U_i$$

für eine glatte Funktion $f_i : U \cap U_i \to \mathbb{K}^n$. f_i heißt *lokale Darstellung* von f. Die lokalen Darstellungen eines Schnittes f über U genügen

$$f_i = g_{ij} f_j \quad \text{auf } U \cap U_i \cap U_j \ . \tag{3}$$

Ist umgekehrt eine offene Menge $U \subseteq M$ überdeckt von Bündelkarten (U_i, φ_i) von M, dann definiert eine Menge von glatten Funktionen $f_i\colon U_i \to \mathbb{K}^n$, welche die Eigenschaft (3) besitzt, einen Schnitt $f \in \Gamma(U, E)$.
Falls keine Verwechselungsgefahr besteht, benutzen wir für einen Schnitt f und seine lokalen Darstellungen das gleiche Symbol.

Definition 1.13. *Sei $E \to X$ ein holomorphes Vektorbündel über einer Riemannschen Fläche X und $U \subseteq X$ offen. Ein Schnitt $f \in \Gamma(U, E)$ heißt holomorph, falls alle seine lokalen Darstellungen holomorph sind. Die Menge aller holomorphen Schnitte von E über U bezeichnen wir mit $\mathscr{O}(U, E)$.*

Ist $x \in X$, $U \subseteq X$ eine offene Umgebung von x und $f \in \mathscr{O}(U \setminus \{x\}, E)$, dann hat nach evtl. Verkleinerung von U der Schnitt f in einer lokalen Trivialisierung φ_i von E die Darstellung $f_i = (f_1^i, \dots, f_n^i) \in \mathscr{O}(U \setminus \{x\})^n$. Falls keines der f_k^i eine wesentliche Singularität in x hat, können wir eine Ordnung von f in x definieren als

$$\operatorname{ord}(f, x) := \min_{1 \le k \le n} \operatorname{ord}(f_k^i, x)$$

Ist φ_j eine weitere lokale Trivialisierung um x und f_j die entsprechende lokale Darstellung von f, dann gilt $f_i = g_{ij} f_j$ mit der biholomorphen Übergangsfunktion g_{ij}. Sei f_i^k die Komponente mit minimaler Ordnung $m \in \mathbb{Z}$ in x. Dann ist

$$f_k^i = (g_{ij})_{k1} f_1^j + \ldots + (g_{ij})_{kn} f_n^j,$$

wobei alle $(g_{ij})_{kl}$ biholomorphe Funktionen sind. Also besitzt eine Komponente von f_j in x ebenfalls die Ordnung m und keine Komponente besitzt eine kleinere Ordnung. Damit ist $\operatorname{ord}(f, x)$ unabhängig von der Bündelkarte. Falls $\operatorname{ord}(f, x) = -m < 0$, so heißt x Polstelle der Ordnung m von f.

Definition 1.14. *Ein meromorpher Schnitt von E über einer offenen Menge $U \subseteq X$ ist ein holomorpher Schnitt $f \in \mathscr{O}(\tilde{U}, E)$ mit $\tilde{U} \subseteq U$ offen, sodass $U \setminus \tilde{U}$ diskret in U ist und alle $x \in U \setminus \tilde{U}$ Polstellen von f sind. Die Menge der meromorphen Schnitte von E über U schreiben wir als $\mathscr{M}(U, E)$.*

Sind $s, f \in \Gamma(U, L)$ Schnitte eines $\mathbb{K}$-Linienbündels mit trivialisierenden Umgebungen (U_i) und zugehörigen Übergangsfunktionen g_{ij} über einer glatten Mannigfaltigkeit M, dann können wir eine glatte Funktion $f/s : \tilde{U} \subseteq U \to \mathbb{K}$ definieren, wo lokale Darstellungen von s nicht verschwinden. Dazu setzen wir

$$\frac{f}{s} = \frac{f_i}{s_i} \quad \text{auf } \tilde{U} \cap U_i,$$

wobei f_i, s_i die lokalen Darstellungen von f und s auf U_i sind. Dann gilt

$$\frac{f_i}{s_i} = \frac{g_{ij} f_j}{g_{ij} s_j} = \frac{f_j}{s_j} \quad \text{auf } \tilde{U} \cap U_i \cap U_j,$$

somit ist f/s wohldefiniert. Allgemeiner können wir Schnitten $s \in \Gamma(U, L)$ und $s' \in \Gamma(U, L')$ von $\mathbb{K}$-Linienbündeln einen Schnitt $s'/s \in \Gamma(\tilde{U}, L' \otimes L^*)$ zuordnen, wo s nicht verschwindet, indem wir für $f \in \Gamma(\tilde{U}, L)$

$$\frac{s'}{s} : f \mapsto \frac{s'}{s} \cdot f := s' \cdot \frac{f}{s} \in \Gamma(\tilde{U}, L')$$

setzen. Für $L = L'$ ist $\Gamma(\tilde{U}, L' \otimes L^*) = \Gamma(\tilde{U}, M \times \mathbb{K}) = C^\infty(\tilde{U}, \mathbb{K})$ und wir erhalten wieder den obigen Spezialfall.

Analog definiert man den Quotienten zweier meromorpher Schnitte $s \in \mathscr{M}(U, L)$ und $s' \in \mathscr{M}(U, L')$ von holomorphen Linienbündeln L und L'. Da in diesem Fall $U \setminus \tilde{U}$ diskret ist, erhält man einen meromorphen Schnitt auf ganz U.

1.3 Divisoren und holomorphe Linienbündel

Eine interessante Problemstellung auf Riemannschen Flächen ist die Anzahl von meromorphen Funktionen mit vorgegebenem Null- und Polstellenverhalten. Ordnen wir zu einer gegebenen Funktion $f \in \mathscr{M}(X)$ jedem Punkt x der Riemannschen Fläche X seine Ordnung $\operatorname{ord}(f, x)$ zu, extrahieren wir die Information über das Null- und Polstellenverhalten von f in einem Divisor. Es stellt sich heraus, dass es auf Riemannschen Flächen eine fundamentale Beziehung zwischen Divisoren und holomorphen Linienbündeln gibt. Dieser Abschnitt orientiert sich an [Huy05, S.77 ff.] und [For77, S.199 ff.].

Definition 1.15 (Divisor)**.** *Sei X eine Riemannsche Fläche. Eine Abbildung $D : X \to \mathbb{Z}$ heißt Divisor auf X, falls $\operatorname{supp} D$ diskret ist. Die Menge aller Divisoren auf X bezeichnen wir mit $\operatorname{Div}(X)$.*

$\operatorname{Div}(X)$ bildet mit der herkömmlichen Addition eine abelsche Gruppe, welche man via $D \leq D' :\Leftrightarrow \forall x \in X \; D(x) \leq D'(x)$ partiell ordnen kann.

Ist $U \subseteq X$ offen und $f \in \mathscr{M}(U)$ eine meromorphe Funktion, dann ist die Funktion

$$(f) : U \to \mathbb{Z} \quad x \mapsto \operatorname{ord}(f, x)$$

für $U = X$ ein Divisor und wird der Divisor von f genannt. Allgemeiner ist für einen meromorphen Schnitt $s \in \mathscr{M}(U, E)$ eines holomorphen Vektorbündels E die Abbildung (s) analog definiert.

Lemma 1.16. *Für eine Funktion $f \in \mathscr{M}(U)$ und Schnitte $s, s' \in \mathscr{M}(U, E)$ eines holomorphen Vektorbündels E gelten die Rechenregeln*

$$(fs) = (f) + (s) \tag{4}$$

$$(s'/s) = (s') - (s). \tag{5}$$

Insbesondere ist $(1/f) = (1) - (f) = -(f)$.

Beweis. Da für Schnitte $s \in \mathscr{M}(U, E)$ die Ordnung über die lokalen Darstellungen von s definiert ist, folgt die Aussage sofort aus der entsprechenden Aussage für meromorphe Funktionen. □

Definition 1.17. *Zwei Divisoren $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ heißen äquivalent und wir schreiben $D \sim D'$, falls $D - D' = (f)$ für ein $f \in \mathscr{M}(X) \setminus \{0\}$ gilt. Ein Divisor heißt Hauptdivisor, falls er äquivalent zum Nulldivisor $D = 0$ ist.*

Ist $D \in \mathrm{Div}(X)$ und $s \in \mathscr{M}(U, E)$ ein meromorpher Schnitt mit $(s) \geq D \restriction U$, so nennt man s ein *Vielfaches von D über U*. Wenn wir den Vektorraum der meromorphen Vielfachen von $-D$ über U mit $\mathscr{O}_D(U, E)$ bezeichnen, gilt

$$D \leq D' \Rightarrow \mathscr{O}_D(U, E) \subseteq \mathscr{O}_{D'}(U, E).$$

Sind D, D' äquivalente Divisoren, dh. $D' - D = (f)$ für ein $f \in \mathscr{M}(X)$, dann sind $\mathscr{O}_D(U, E)$ und $\mathscr{O}_{D'}(U, E)$ über die Multiplikation mit f isomorph. Zukünftig schreiben wir auch $\mathscr{O}_D(U)$ für $\mathscr{O}_D(U, X \times \mathbb{C})$.

Definition 1.18. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $D \in \mathrm{Div}(X)$ ein Divisor. Wir definieren den Grad von D durch*

$$\deg D = \sum_{x \in X} D(x).$$

Da X kompakt ist, sind nur endlich viele Summanden ungleich Null.

Lemma 1.19. $\deg\colon \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$ *ist ein Gruppenhomomorphismus, der Hauptdivisoren auf die Null abbildet. Insbesondere haben äquivalente Divisoren denselben Grad.*

Beweis. Sind $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ zwei Divisoren, dann gilt

$$\deg(D + D') = \sum_{x \in X} D(x) + D'(x) = \sum_{x \in X} D(x) + \sum_{x \in X} D'(x) = \deg D + \deg D'.$$

Ist D ein Hauptdivisor, das heißt $D = (f)$ mit $f \in \mathscr{M}(X) \setminus \{0\}$, dann gilt aufgrund des Residuensatzes [For77, S. 74]:

$$\deg D = \sum_{x \in X} D(x) = \sum_{x \in X} \mathrm{ord}(f, x) = 0.$$

□

Genau wie $\mathrm{Div}(X)$ mit der Addition eine abelsche Gruppe wird, kann man auch auf holomorphen Linienbündeln eine Gruppenstruktur definieren. Dazu verwenden wir als Verknüpfung das Tensorprodukt auf Bündeln und als neutrales Element das triviale Bündel $X \times \mathbb{C}$. Nach Lemma 1.8 ist $L \otimes L^* \cong X \times \mathbb{C}$, also wird L^* zum inversen Bündel von L. Da wir außerdem einen kanonischen holomorphen Bündelisomorphismus $L \otimes L' \cong L' \otimes L$ haben, bilden die holomorphen Linienbündel über einer Riemannschen Fläche modulo holomorpher Isomorphie eine abelsche Gruppe.

Definition 1.20 (Picard-Gruppe)**.** *Wir nennen die abelsche Gruppe*

$$\mathrm{Pic}(X) := (\{L \to X \mid L \textit{ holomorphes Linienbündel}\}/_{\cong}, \otimes, X \times \mathbb{C})$$

die Picard-Gruppe von X. Hier steht $\cong$ für holomorph isomorph.

Wir stellen jetzt einen Zusammenhang zwischen der abelschen Gruppe der Divisoren und der Picard-Gruppe der holomorphen Linienbündel auf X her.

Lemma 1.21. *Wir haben einen Homomorphismus abelscher Gruppen*

$$\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$$

mit dem wir einem Divisor D eine Klasse von holomorphen Linienbündeln $[L]$ zuordnen können, sodass jeder Respräsentant L von $[L]$ einen nichttrivialen Schnitt $s \in \mathscr{M}(X, L)$ besitzt mit $D = (s)$. Außerdem gilt für alle offenen $U \subseteq X$, dass die Vektorräume $\mathscr{O}_D(U)$ und $\mathscr{O}(U, L)$ unabhängig vom Repräsentanten L isomorph sind.

Beweis. 1. Sei $D \in \mathrm{Div}(X)$. Da X als Mannigfaltigkeit zweitabzählbar ist, gibt es einen holomorphen Atlas (U_i, z_i) von X, sodass wir auf jedem U_i eine meromorphe Funktion s_i finden mit $(s_i) = D \restriction U_i$. Dann sind

$$g_{ij} := \frac{s_i}{s_j} \colon U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$$

holomorph nach evtl. holomorpher Fortsetzung[3] und erfüllen die Cozykelrelation. Damit definieren die g_{ij} eine Äquivalenzklasse holomorpher Linienbündel $[L]$. Da die Funktionen s_i die Beziehung $s_i = g_{ij} s_j$ erfüllen, sind sie die lokalen Darstellungen eines nichttrivialen, meromorphen Schnittes s von L mit $(s) = D$.

Falls $(\tilde{s}_i)$ eine weitere Familie meromorpher Funktionen wie oben mit $(\tilde{s}_i) = D \restriction U_i$ ist und $\tilde{g}_{ij} := \frac{\tilde{s}_i}{\tilde{s}_j} \colon U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$, dann sind die Funktionen $h_i := s_i / \tilde{s}_i \colon U_i \to \mathbb{C}^*$ holomorph. Damit gilt

$$g_{ij} = \frac{s_i}{s_j} = \frac{h_i \tilde{s}_i}{h_j \tilde{s}_j} = h_i \tilde{g}_{ij} h_j^{-1}$$

[3] Dies garantiert der Riemannsche Hebbarkeitssatz.

und damit sind die zugeordneten Bündel nach Lemma 1.7 und Bemerkung 1.10 holomorph isomorph.

2. Falls $D = 0$, so ist jede konstante Funktion $s \neq 0$ eine Abbildung mit $(s) = D$ und wir erhalten über die Übergangsfunktionen $g_{ij} = 1$ ein Linienbündel $L \cong X \times \mathbb{C}$.

3. Sind $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$, und $(s_i), (s_i')$ entsprechende meromorphe Funktionen wie oben, dann ist $s_i \cdot s_i'$ eine zugehörige meromorphe Funktion zu $D + D'$. Sind g_{ij} und g_{ij}' die Übergangsfunktionen von D und D' zugeordneten Bündeln L und L', wird somit $D + D'$ ein Bündel $\tilde{L}$ mit Übergangsfunktionen
$$\tilde{g}_{ij} = \frac{s_i \cdot s_i'}{s_j \cdot s_j'} = g_{ij} \cdot g_{ij}' = g_{ij} \otimes g_{ij}'$$
zugeordnet, welches somit holomorph isomorph zu $L \otimes L^*$ ist.

4. Sei nun $D \in \operatorname{Div}(X)$ mit einem zugeordneten Bündel L und (s_i) meromorphe Funktionen wie oben. Ist $f \in \mathscr{O}(X, L)$ ein Schnitt mit lokalen Darstellungen (f_i), so erhalten wir über f_i/s_i eine global definierte Funktion mit $(f_i/s_i) = (f_i) - (s_i) \geq (s_i) = -D \restriction U_i$, da unter Kartenwechseln wegen
$$\frac{f_i}{s_i} = \frac{g_{ij} f_j}{s_i} = \frac{s_i}{s_j} \frac{f_j}{s_i} = \frac{f_j}{s_j} \quad \text{auf } U_i \cap U_j$$
die Funktion invariant bleibt.

□

Wir werden aus diesem Homomorphismus einen Isomorphismus konstruieren. Um die Surjektivität zu zeigen, benötigen noch einen wesentlichen Existenzsatz.

Satz 1.22. *Sei $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel und $x_0 \in X$. Dann existiert ein Schnitt $s \in \mathscr{M}(X, L) \setminus \{0\}$, welcher höchstens in x_0 einen Pol hat und sonst holomorph ist.*

Beweis. Wir beweisen den Satz unabhängig von den hier entwickelten Aussagen mit Hodge-Theorie im letzten Kapitel, siehe Satz 4.20. □

Lemma 1.23. *Der Homomorphismus* $\operatorname{Div}(X) \to \operatorname{Pic}(X)$ *ist surjektiv.*

Beweis. Dazu geben wir eine Rechtsinverse an. Sei $[L] \in \operatorname{Pic}(X)$ und L ein Repräsentant mit Übergangsfunktionen g_{ij} bezüglich einer trivialisierenden offenen Überdeckung (U_i) von L. Nach Satz 1.22 gibt es einen nichttrivialen meromorphen Schnitt s von L. Wir definieren einen Divisor $D \in \operatorname{Div}(X)$ durch
$$D = (s).$$

Wir zeigen nun, dass ein D wie oben zugeordnetes holomorphes Linienbündel L' holomorph isomorph zu L ist. Die lokalen Darstellungen s_i erfüllen $s_i = g_{ij}s_j$ auf $U_i \cap U_j$ und es gilt $(s_i) = D \upharpoonright U_i$. Damit erhalten wir ein D zugeordnetes Bündel L' über den Cozyklus

$$g'_{ij} = \frac{s_i}{s_j} = \frac{g_{ij}s_j}{s_j} = g_{ij}$$

und somit gilt $L \cong L'$. □

Lemma 1.24. *Zu dem oben konstruierten Homomorphismus besteht*

$$\ker(\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X))$$

genau aus den Hauptdivisoren.

Beweis.

1. Sei $D \in \mathrm{Div}(X)$ ein Hauptdivisor, das heißt $D = (f)$ mit einem $f \in \mathscr{M}(X)\setminus\{0\}$. Dann ist der zugeordnete Cozyklus g_{ij} gegeben durch $g_{ij} = f/f = 1$ und ein zugeordnetes Bündel holomorph isomorph zum trivialen Bündel.

2. Sei $D \in \mathrm{Div}(X)$ ein Divisor, dem ein triviales Bündel zugeordnet wird, das heißt zu einer offenen Überdeckung (U_i) gibt es meromorphe Funktionen $f_i : U_i \to \mathbb{C}$ mit $(f_i) = D \upharpoonright U_i$ und holomorphe Funktionen $h_i : U_i \to \mathbb{C}^*$ sodass

$$\frac{f_i}{f_j} = h_i \cdot 1 \cdot h_j^{-1} = \frac{h_i}{h_j} : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}^*$$

holomorph sind. Also definiert die Abbildung $g := f_i/h_j$ eine globale meromorphe Funktion auf X, da

$$\frac{f_i}{h_i} = \frac{f_j}{h_j} \quad \text{auf } U_i \cap U_j \ .$$

Weil h_i holomorph ist und keine Nullstellen hat, gilt

$$(g) \upharpoonright U_i = (f_i) - (h_i) = (f_i) = D \upharpoonright U_i$$

für jedes U_i, somit ist $D = (g)$ ein Hauptdivisor.

□

Daraus folgt das zentrale Theorem über die Korrespondenz von Divisoren und holomorphen Linienbündeln über Riemannschen Flächen.

Theorem 1.25. *Die Abbildung* $\mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ *induziert einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Div}(X)/_\sim \to \mathrm{Pic}(X)$$

Wir fassen hier kurz die zuvor gezeigten wichtigsten Eigenschaften des Isomorphismus zusammen. Im Folgenden seien D, D' Repräsentanten von $[D], [D'] \in \mathrm{Div}(X)/_\sim$, denen die Äquivalenzklassen der Linienbündel L, L' respektive zugeordnet werden und umgekehrt. Dann gelten die Korrespondenzen

$$\begin{aligned} [D+D'] &\longleftrightarrow [L \otimes L'] \\ [-D] &\longleftrightarrow [L^*] \\ [0] &\longleftrightarrow [X \times \mathbb{C}] \\ [D] &\longleftrightarrow [L] \iff \text{ ex. } s \in \mathscr{M}(X, L) \text{ mit } (s) = D \end{aligned}$$

und $\mathscr{O}_D(U) \cong \mathscr{O}(U, L)$ für jedes offene $U \subseteq X$.

Korollar 1.26. *Ist L ein holomorphes Linienbündel über einer kompakten Riemannschen Fläche X, dann können wir den Grad von L definieren als*

$$\deg L := \deg D$$

für einen L zugeordneten Divisor D.

Der Grad von L ist also nach Wahl eines meromorphen Schnittes $s \neq 0$ gegeben durch $\deg L = (s)$.

2 Differentialformen und Kohomologie

In diesem Kapitel diskutieren wir die komplexen Analoga zu den reellen Differentialformen auf glatten Mannigfaltigkeiten, sowie das Zusammenspiel der Differentialoperatoren d, ∂ und $\bar{\partial}$. Danach entwickeln wir entsprechende Kohomologietheorien und wenden diese auf Differentialformen mit Werten in holomorphen Linienbündeln an. Der erste Teil des Kapitels orientiert sich an [Huy05, S.25 ff.] und [GH78, S.23 ff.].

2.1 Differentialformen und die Dolbeault-Operatoren

Über einer glatten Mannigfaltigkeit sind die Differentialformen vom Grad k definiert als Schnitte der k-ten äußeren Potenz des Kotangentialbündels. Im Kontext Riemannscher Flächen können wir diesem Raum eine feinere Struktur geben. Dazu bemerken wir, dass die Zerlegung (2) des komplexifizierten Tangentialbündels eine entsprechende Zerlegung des dazu dualen *komplexifizierten Kotangentialbündels* induziert:

$$T^*_{\mathbb{C}}X = T^{*1,0}X \oplus T^{*0,1}X.$$

Dabei ist $T^{*1,0}X$ ein holomorphes und $T^{*0,1}X$ ein antiholomorphes Linienbündel. Wir definieren

$$\Lambda^{p,q}T^*X := \Lambda^p T^{*1,0}X \otimes_{\mathbb{C}} \Lambda^q T^{*0,1}X \quad \text{für } p, q = 0, 1, 2.$$

Lemma 2.1. *Wir haben eine natürliche Zerlegung der äußeren Potenzen des komplexifizierten Kotangentialbündels*

$$\Lambda^k T^*_{\mathbb{C}} X \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q} T^* X. \tag{6}$$

Beweis. Für lokale Koordinaten z ist $\mathrm{d}z$ ist ein lokaler Rahmen von $T^{*1,0}X$ und $\mathrm{d}\bar{z}$ ein lokaler Rahmen von $T^{*0,1}X$. Dann sind

$$\mathrm{d}z_I = \underbrace{\mathrm{d}z \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z}_{p\text{-mal}}$$
$$\mathrm{d}\bar{z}_J = \underbrace{\mathrm{d}\bar{z} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\bar{z}}_{q\text{-mal}}$$

lokale Rahmen von $\Lambda^p T^{*1,0}X$ und $\Lambda^q T^{*0,1}X$ und $\mathrm{d}z_I \otimes \mathrm{d}\bar{z}_J$ ein Rahmen von $\Lambda^{p,q}T^*X$. Über die natürliche Einbettung

$$\mathrm{d}z_I \otimes \mathrm{d}\bar{z}_J \mapsto \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$$

von $\Lambda^{p,q}T^*X$ in $\Lambda^{p+q}T^*_{\mathbb{C}}X$ erhalten wir demnach $\binom{1}{p}\binom{1}{q}$ Elemente, die nach Konstruktion linear unabhängig sind. Dies liefert insgesamt[4]

$$\sum_{p+q=k} \binom{1}{p}\binom{1}{q} = \sum_{p=0}^{k} \binom{1}{p}\binom{1}{k-p} = \binom{2}{k}$$

linear unabhängige Elemente und somit einen lokalen Rahmen von $\Lambda^k T^*_{\mathbb{C}} X$. Diese Überlegungen sind rein algebraisch und können ohne Weiteres auf den beliebig-dimensionalen Fall übertragen werden. □

Definition 2.2. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $U \subseteq X$ offen. Dann nennen wir*

1. $\Omega^k_{\mathbb{C}}(U) := \Gamma(U, \Lambda^k T^*_{\mathbb{C}} X)$ *die Menge der Differentialformen vom Grad k über U.*

2. $\Omega^{p,q}(U) := \Gamma(U, \Lambda^{p,q} T^* X)$ *die Menge aller Differentialformen vom Typ (p,q) über U.*

In lokalen Koordinaten z hat ein Element von $\Omega^{p,q}(U)$ also die Form $f\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$ mit einer komplexwertigen glatten Funktion f und $\mathrm{d}z_I = 1, \mathrm{d}z$ bzw. $\mathrm{d}\bar{z}_J = 1, \mathrm{d}\bar{z}$.

Bemerkung 2.3. *Die lokal definierte komplexe Konjugation*

$$\bar{\cdot} \colon \Omega^{p,q}(U) \to \Omega^{q,p}(U)$$
$$\overline{f\mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J} := \bar{f}\mathrm{d}\bar{z}_I \wedge \mathrm{d}z_J$$

ist ein $\mathbb{C}$-antilinearer Isomorphismus. Aus den Rechenregeln des Wirtinger-Kalküls folgt sofort die Wohldefiniertheit.

[4] Hier benutzen wir die Vandermonde-Identität.

Die Zerlegung der Bündel (6) impliziert eine Zerlegung von $\mathbb{C}$-Vektorräumen

$$\Omega^k_{\mathbb{C}}(U) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(U), \tag{7}$$

da der Typ einer Differentialform invariant unter Kartenwechseln ist.
Seien $\pi^{p,q} \colon \Omega^\bullet_{\mathbb{C}}(U) \to \Omega^{p,q}(U)$ die Projektionen auf die Komponenten. Die reelle äußere Ableitung $\mathrm{d} \colon \Omega^\bullet(U) \to \Omega^{\bullet+1}(U)$ definiert durch $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung eine *komplexe äußere Ableitung*

$$\mathrm{d} \colon \Omega^\bullet_{\mathbb{C}}(U) \to \Omega^{\bullet+1}_{\mathbb{C}}(U).$$

Ist $\omega \in \Omega^{p,q}(U)$, also in lokalen Koordinaten z gegeben durch $\omega = f \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$, wobei f eine komplexwertige glatte Funktion und $\mathrm{d}z_I = 1, \mathrm{d}z$ bzw. $\mathrm{d}\bar{z}_J = 1, \mathrm{d}\bar{z}$, dann gilt

$$\mathrm{d}(f \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J) = \frac{\partial f}{\partial z} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$$

und daher $\mathrm{d}\omega \in \Omega^{p+1,q}(U) \oplus \Omega^{p,q+1}(U)$.

Definition 2.4. *Wir definieren die Dolbeault-Operatoren* $\partial_{p,q} \colon \Omega^{p,q}(U) \to \Omega^{p+1,q}(U)$ *und* $\bar{\partial}_{p,q} \colon \Omega^{p,q}(U) \to \Omega^{p,q+1}(U)$ *durch*

$$\begin{aligned} \partial_{p,q} &:= \pi^{p+1,q} \circ \mathrm{d} \restriction \Omega^{p,q}(U); \\ \bar{\partial}_{p,q} &:= \pi^{p,q+1} \circ \mathrm{d} \restriction \Omega^{p,q}(U), \end{aligned}$$

welche wir $\mathbb{C}$*-linear zu Operatoren* $\partial, \bar{\partial}$ *auf* $\Omega_{\mathbb{C}}(U) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k_{\mathbb{C}}(U)$ *fortsetzen. Damit gilt* $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$*.*

In lokalen Koordinaten z wirken diese Operatoren auf $\omega = f \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J$ wie zuvor daher via

$$\begin{aligned} \partial(f \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J) &= \frac{\partial f}{\partial z} \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J; \\ \bar{\partial}(f \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J) &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \mathrm{d}\bar{z} \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J. \end{aligned}$$

Die Rechenregeln der äußeren Ableitung vererben sich auf die Dolbeault-Operatoren.

Satz 2.5. *Sind* $\omega \in \Omega^{p,q}(U)$ *und* $\eta \in \Omega^{p',q'}(U)$*, dann gilt*

$$\begin{aligned} \partial(\omega \wedge \eta) &= \partial\omega \wedge \eta + (-1)^{p+q} \omega \wedge \partial\eta; \\ \bar{\partial}(\omega \wedge \eta) &= \bar{\partial}\omega \wedge \eta + (-1)^{p+q} \omega \wedge \bar{\partial}\eta; \\ \partial^2 = \bar{\partial}^2 &= 0, \qquad \partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial. \end{aligned}$$

Beweis. Wir benutzen $\mathrm{d} = \partial + \bar\partial$ und zählen den Typ der auftretenden Summanden.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \underbrace{\partial(\omega \wedge \eta)}_{p+p'+1,q+q'} + \underbrace{\bar\partial(\omega \wedge \eta)}_{p+p',q+q'+1} \\
\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^{p+q}\omega \wedge \mathrm{d}\eta \\
&= (\partial\omega + \bar\partial\omega) \wedge \eta + (-1)^{p+q}\omega \wedge (\partial\eta + \bar\partial\eta) \\
&= \underbrace{\partial\omega \wedge \eta}_{p+p'+1,q+q'} + \underbrace{\bar\partial\omega \wedge \eta}_{p+p',q+q'+1} + \underbrace{(-1)^{p+q}\omega \wedge \partial\eta}_{p+p'+1,q+q'} + \underbrace{(-1)^{p+q}\omega \wedge \bar\partial\eta}_{p+p',q+q'+1}
\end{aligned}$$

Aufgrund der Zerlegung (7) folgt die Behauptung. Für den zweiten Teil benutzen wir

$$0 = \mathrm{d}^2 = (\partial + \bar\partial)^2 = \partial^2 + \partial\bar\partial + \bar\partial\partial + \bar\partial^2$$

und argumentieren genauso. □

Definition 2.6. *Ist X eine Riemannsche Fläche und $U \subseteq X$ offen, dann ist $\Lambda^{p,0}T^*X$ ein holomorphes Vektorbündel. Wir nennen*

$$\mathscr{O}^p(U) := \mathscr{O}(U, \Lambda^{p,0}T^*X)$$

die holomorphen $(p,0)$-Formen auf U.

Aus den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen folgt sofort, dass eine glatte Funktion $f\colon U \subseteq X \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph ist, falls $\bar\partial f = 0$. Mit obiger Definition ist $\omega \in \Omega^{p,0}(U)$ genau dann holomorph, falls $\bar\partial\omega = 0$. Holomorphe $(p,0)$-Formen ω lassen sich in lokalen Koordinaten z daher schreiben als

$$\omega = f \underbrace{\mathrm{d}z \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}z}_{p\text{-mal}}$$

mit einer holomorphen Funktion f.

2.2 de-Rham- und Dolbeault-Kohomologie

Aus der Theorie der glatten Mannigfaltigkeiten kennen wir bereits die *de-Rham-Kohomologie.* Analog dazu können wir auf einer Riemannschen Fläche X den *komplexifizierten de-Rham-Komplex* betrachten, indem wir $\Omega^k(X)$ durch $\Omega^k_{\mathbb{C}}(X)$ und d durch seine $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung ersetzen:

$$0 \longrightarrow \Omega^0_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2_{\mathbb{C}}(X) \xrightarrow{\mathrm{d}} 0\,.$$

Wegen $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ ist $\operatorname{ran}(\mathrm{d} : \Omega^{\bullet-1}_{\mathbb{C}} \to \Omega^{\bullet}_{\mathbb{C}}) \subseteq \ker(\mathrm{d} : \Omega^{\bullet}_{\mathbb{C}} \to \Omega^{\bullet+1}_{\mathbb{C}})$. Wir können daher ein komplexes Gegenstück zur de-Rham Kohomologie definieren.

Definition 2.7. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Für $k = 0, 1, 2$ definieren wir die komplexifizierten de-Rham Kohomologiegruppen über*

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X; \mathbb{C}) := \frac{\ker(\mathrm{d} : \Omega^k_{\mathbb{C}}(X) \to \Omega^{k+1}_{\mathbb{C}}(X))}{\operatorname{ran}(\mathrm{d} : \Omega^{k-1}_{\mathbb{C}}(X) \to \Omega^k_{\mathbb{C}}(X))}.$$

Allerdings liefert die Betrachtung der komplexifizierten de-Rham-Kohomologie keine neuen Informationen gegenüber der reellen. Aufgrund der Konstruktion ist $H^k_{\mathrm{dR}}(X; \mathbb{C})$ nämlich mit $H^k_{\mathrm{dR}}(X)$ verknüpft.

Satz 2.8. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann gilt für $k = 0, 1, 2$:*

$$H^k_{\mathrm{dR}}(X; \mathbb{C}) = H^k_{\mathrm{dR}}(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Beweis. Für den kurzen, rein algebraischen Beweis siehe [Mad, S. 3]. □

Ein anderer Ansatz ist, statt der äußeren Ableitung d den in der Zerlegung $\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}$ auftauchenden Dolbeault-Operatoren eine Kohomologietheorie zuzuordnen. Die Wirkung der Operatoren $\partial, \bar{\partial}$ auf Differentialformen aus $\Omega^{p,q}(X)$ auf einer Riemannschen Fläche X können wir in folgendem, bis auf Vorzeichen kommutativen Diagramm festhalten

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & \\
\Omega^{1,0}(X) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "\bar{\partial}"] & \Omega^{1,1}(X) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "\bar{\partial}"] & 0 \\
\Omega^{0,0}(X) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "\bar{\partial}"] & \Omega^{0,1}(X) \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "\bar{\partial}"] & 0
\end{tikzcd}$$

Da $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ gilt, eignen sich auch diese Operatoren für eine Kohomologietheorie. Wegen $\overline{\partial\omega} = \bar{\partial}\bar{\omega}$ haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^{0,\bullet}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar{\cdot}"] & \Omega^{1,\bullet}(X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\bar{\cdot}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^{\bullet,0}(X) \arrow[r, "\bar{\partial}"] & \Omega^{\bullet,1}(X) \arrow[r, "\bar{\partial}"] & 0
\end{tikzcd}$$

wobei die komplexen Konjugationen $\bar{\cdot}$ jeweils Isomorphismen sind. Eine solche Abbildung heißt Kokettenisomorphismus und induziert einen Isomorphismus der entsprechenden Kohomologien[5]. Also genügt es, die Kohomologie des $\bar{\partial}$-Operators zu betrachten. Am Ende des Kapitels werden wir sehen, dass diese Wahl eine Kohomologietheorie auf Differentialformen mit Werten in holomorphen Bündeln zulässt.

[5]Dies lässt sich einfach überprüfen, indem man bemerkt, dass Kozykel auf Kozykel und Koränder auf Koränder abgebildet werden. Siehe auch [Hat01, S.111].

Definition 2.9. *Die Dolbeault-Kohomologiegruppen sind gegeben durch*

$$H^k_{\bar\partial}(X) := \frac{\ker(\bar\partial : \Omega^{0,k}(X) \to \Omega^{0,k+1}(X))}{\operatorname{ran}(\bar\partial : \Omega^{0,k-1}(X) \to \Omega^{0,k}(X))}.$$

Bemerkung 2.10. *Allgemeiner kann man auch die Gruppen* $H^{p,q}_{\bar\partial}(X) = \ker \bar\partial_{p,q} / \operatorname{ran} \bar\partial_{p,q-1}$ *betrachten, im Kontext Riemannscher Flächen folgt allerdings aus einer allgemeineren Version der Serre-Dualität, dass* $H^{1,0}_{\bar\partial}(X) \cong H^{0,1}_{\bar\partial}(X)$ *und* $H^{1,1}_{\bar\partial}(X) \cong H^{0,0}_{\bar\partial}(X)$ *gilt. Die benötigte stärkere Version kann nahezu analog wie Theorem* 3.20 *gezeigt werden* [Huy05, S. 171].

Satz 2.11. *Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche, dann gilt*

$$\dim H^0_{\bar\partial}(X) = 1.$$

Beweis. Per definitionem ist $H^0_{\bar\partial}(X) = \ker(\bar\partial : C^\infty(X) \to \Omega^{0,1}(X)) = \mathscr{O}(X)$. Da X kompakt ist, sind dies genau die konstanten Funktionen auf X [For77, S.10]. Insbesondere gilt die Behauptung. □

Wir werden später sehen, dass für kompakte Riemannsche Flächen auch $H^1_{\bar\partial}(X)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum ist.

Definition 2.12. *Für eine kompakte Riemannsche Fläche X heißt*

$$g = \dim H^1_{\bar\partial}(X)$$

das Geschlecht von X.

Da die reelle de-Rham-Kohomologie homotopie-invariant ist [Lee00, S.277], stellen die Dimensionen von sowohl den reellen als auch den komplexifizierten de-Rham-Kohomologiegruppen topologische Invarianten von X dar. Diese Zahlen werden *Betti-Zahlen* genannt.
Die Dimensionen der Dolbeault-Kohomologiegruppen, welche man *Hodge-Zahlen* nennt, hängen hingegen wegen der zugrundeliegenden Zerlegung

$$T^*_{\mathbb{C}}X = T^{*1,0}X \oplus T^{*0,1}X$$

im Allgemeinen von der komplexen Struktur von X ab. Überraschenderweise stimmt das oben definierte Geschlecht g einer kompakten Riemannschen Fläche mit dem topologischen Geschlecht überein[6] und ist insbesondere eine topologische Invariante.

Das Theorem 1.25 über die Korrespondenz von Divisoren und holomorphen Linienbündeln motiviert eine Betrachtung von bündelwertigen Differentialformen und entsprechender Kohomologie.

[6] Wir skizzieren einen Beweis in Kapitel 4.

Definition 2.13 (Bündelwertige Differentialform)**.** *Sei X eine Riemannsche Fläche und $L \to X$ ein holomorphes Lektorbündel. Sei $U \subseteq X$ offen. Dann heißt*

$$\Omega^{p,q}(U, L) := \Gamma(U, \Lambda^{p,q}T^*X \otimes L)$$

die Menge aller Differentialformen vom Typ (p, q) über U mit Werten in L.

Lemma 2.14. *Sind $E, F \to M$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit und $U \subseteq M$ offen, dann haben wir einen kanonischen Isomorphismus*

$$\Gamma(U, E \otimes_{\mathbb{K}} F) \cong \Gamma(U, E) \otimes_{C^\infty(U,\mathbb{K})} \Gamma(U, F).$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und holomorphe Bündel gilt analog in der holomorphen bzw. meromorphen Kategorie

$$\mathscr{O}(U, E \otimes F) \cong \mathscr{O}(U, E) \otimes_{\mathscr{O}(U)} \mathscr{O}(U, F);$$
$$\mathscr{M}(U, E \otimes F) \cong \mathscr{M}(U, E) \otimes_{\mathscr{M}(U)} \mathscr{M}(U, F).$$

Beweis. Sei nach evtl. Verfeinerung $(U_i)_i$ eine trivialisierende offene Überdeckung von E und F. Seien g_{ij}^E und g_{ij}^F die entsprechenden Übergangsfunktionen. Dann sind $g_{ij}^E \otimes g_{ij}^F$ die Übergangsfunktionen von $E \otimes F$. Wir wählen lokale Rahmen $(s_\alpha^i)_\alpha$ von E und $(f_\beta^i)_\beta$ von F auf U_i und definieren eine C^∞-lineare Abbildung

$$\phi\colon \Gamma(U_i, E) \otimes_{C^\infty} \Gamma(U_i, F) \to \Gamma(U, E \otimes F)$$

auf den Rahmen durch

$$\phi(s_\alpha^i \otimes f_\beta^i)(x) := s_\alpha^i(x) \otimes f_\beta^i(x).$$

Dies definiert eine globale Abbildung, denn falls s_α^j und f_β^j lokale Rahmen über U_j sind, so gilt auf $U_i \cap U_j$:

$$\begin{aligned} \phi((g_{ij}^E \otimes g_{ij}^F)(s_\alpha^j \otimes f_\beta^j)) &= (g_{ij}^E s_\alpha^j) \otimes (g_{ij}^F f_\beta^j) \\ &= s_\alpha^i \otimes f_\beta^i. \end{aligned}$$

Da ϕ in offensichtlicher Weise invertierbar ist, erhalten wir den gewünschten Isomorphismus.
Für den holomorphen- bzw. meromorphen Fall konstruiert man den Isomorphismus vollkommen analog. □

Wir können bündelwertige Differentialformen also auch als Elemente von $\Omega^{p,q}(U) \otimes_{C^\infty} \Gamma(U, E)$ auffassen.

Bemerkung 2.15. *Dies liefert eine sinnvolle Verallgemeinerung der herkömmlichen Differentialformen:*

1. *Ist $E = X \times \mathbb{C}$ das triviale Bündel, dann gilt*

$$\Omega^{p,q}(U,E) \cong \Omega^{p,q}(U) \otimes_{C^\infty} C^\infty(U,\mathbb{C}) = \Omega^{p,q}(U).$$

2. *Für $p, q = 0$ haben wir*

$$\Omega^{p,q}(U,E) \cong C^\infty(U,\mathbb{C}) \otimes_{C^\infty} \Gamma(U,E) = \Gamma(U,E).$$

Sind $L, L', \tilde{L} \to X$ holomorphe Linienbündel und $\phi\colon L \otimes L' \to \tilde{L}$ ein Bündelhomomorphismus, dann können wir außerdem ein Dachprodukt

$$\wedge_\phi\colon \Omega^{p,q}(X,L) \otimes \Omega^{p',q'}(X,L') \to \Omega^{p+p',q+q'}(X,\tilde{L})$$

definieren. Dazu schreiben wir $\omega \in \Omega^{p,q}(X,L)$ und $\eta \in \Omega^{p',q'}(X,L')$ in einer trivialisierenden offenen Menge $U \subseteq X$ als $\omega = \alpha \otimes s$ und $\eta = \beta \otimes s'$ mit lokalen Rahmen s von L und s' von L'. Dann setzen wir auf U:

$$\omega \wedge_\phi \eta = (\alpha \otimes s) \wedge_\phi (\beta \otimes s') := (\alpha \wedge \beta) \otimes \phi(s \otimes s').$$

Da alle Terme linear sind, überprüft man leicht, dass $\wedge_\phi$ wohldefiniert ist.[7]

Um auf bündelwertigen Differentialformen eine äußere Ableitung zu definieren, scheint zunächst folgender Ansatz vielversprechend: Nach Wahl von lokalen Koordinaten von X auf $\tilde{U} \subseteq U$ und lokalen Rahmen s_i von E über $U_i \subseteq U$ können wir einen Schnitt $\omega \in \Omega^{p,q}(U,E)$ über $\tilde{U} \cap U_i$ als Linearkombination von Termen der Form $\alpha \otimes s_i$ mit $\alpha \in \Omega^{p,q}(\tilde{U} \cap U_i)$ schreiben. Ein möglicher Ansatz für d wäre:

$$\mathrm{d}(\alpha \otimes s_i) = \mathrm{d}\alpha \otimes s_i.$$

Auf den üblichen Differentialformen ist d zwar wohldefiniert, falls aber s_j ein weiterer lokaler Rahmen von E über $U_j \subseteq U$ ist, haben wir

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(\alpha \otimes s_i) &= \mathrm{d}(\alpha \otimes g_{ij}s_j) = \mathrm{d}(g_{ij}\alpha \otimes s_j) = \mathrm{d}(g_{ij}\alpha) \otimes s_j \\ &= \mathrm{d}g_{ij} \wedge \alpha \otimes s_j + g_{ij}\mathrm{d}\alpha \otimes s_j = \mathrm{d}g_{ij} \wedge \alpha \otimes s_j + \mathrm{d}\alpha \otimes s_i \\ &= \mathrm{d}g_{ij} \wedge \alpha \otimes s_j + \mathrm{d}(\alpha \otimes s_i)\end{aligned}$$

auf $\tilde{U} \cap U_i \cap U_j$, wobei g_{ij} die entsprechende Übergangsfunktion ist. Da im Allgemeinen $\mathrm{d}g_{ij} \neq 0$, ist ein solches d nicht wohldefiniert.

Aufgrund der Korrespondenz von Divisoren und holomorphen Linienbündeln interessieren wir uns vor allem für den Fall holomorpher Übergangsfunktionen. Auch in diesem Fall verschwindet die äußere Ableitung im Allgemeinen nicht, dafür gilt allerdings $\bar{\partial} g_{ij} = 0$. Damit können wir den $\bar{\partial}$-Operator wohldefinieren.

[7] Diese allgemeine Definition stammt aus [Bal, S. 3].

Definition 2.16 ($\bar\partial$-Operator)**.** *Sei X eine Riemannsche Fläche, $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel und $U \subseteq X$ offen. Wähle lokale Koordinaten und einen holomorphen lokalen Rahmen s von L über $\tilde U \subseteq U$. Dann hat ein Element von $\Omega^{p,q}(U,L)$ über $\tilde U$ die Form $\alpha \otimes s$ mit $\alpha \in \Omega^{p,q}(\tilde U)$. Wir definieren einen Operator $\bar\partial : \Omega^{p,q}(U,L) \to \Omega^{p,q+1}(U,L)$ lokal über:*

$$\bar\partial(\alpha \otimes s) := \bar\partial\alpha \otimes s.$$

Damit ist der $\bar\partial$-Operator wohldefiniert. Sind nämlich s_i, s_j zwei holomorphe lokale Rahmen von L über offenen Mengen $U_i, U_j \subseteq X$ respektive, dann besitzt ein Element $\omega \in \Omega^{p,q}(U,L)$ über $U_i \cap U_j$ die Darstellung $\omega = \alpha \otimes s_i = \alpha \otimes g_{ij} s_j$ mit $\alpha \in \Omega^{p,q}(U_i \cap U_j)$ und einer holomorphen Funktion g_{ij} auf $U_i \cap U_j$ und

$$\begin{aligned}\bar\partial(\alpha \otimes s_i) &= \bar\partial\alpha \otimes s_i;\\ \bar\partial(\alpha \otimes g_{ij}s_j) &= \bar\partial(g_{ij}\alpha \otimes s_j) = \bar\partial(g_{ij}\alpha) \otimes s_j\\ &= g_{ij}\bar\partial\alpha \otimes s_j = \bar\partial\alpha \otimes s_i.\end{aligned}$$

Damit ist der $\bar\partial$-Operator unabhängig von der Wahl des holomorphen Rahmens von L. Diese Konstruktion stammt aus [GH78, S.70].

Lemma 2.17. *Ist $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel und $U \subseteq X$ offen, dann gilt*

$$\ker \bar\partial \restriction \Omega^{p,0}(U,L) = \mathscr{O}(U, \Lambda^{p,0}T^*X \otimes L).$$

Beweis. Sei $\omega \in \ker \bar\partial \restriction \Omega^{p,0}(U,L)$, das heißt wie oben gilt lokal $\omega = \alpha \otimes s$ mit $\bar\partial\alpha = 0$ und s holomorph. Da die Übergangsfunktionen von $\Lambda^{p,0}T^*X \otimes L$ holomorph sind, sind alle lokalen Darstellungen von ω holomorph. Ist umgekehrt ω ein holomorpher Schnitt von $\Lambda^{p,0}T^*X \otimes L$ über U, dann ist ω lokal von der Form $\alpha \otimes s$ mit holomorphen Schnitten α, s und damit gilt $\bar\partial(\alpha \otimes s) = \bar\partial\alpha \otimes s = 0$. ☐

Definition 2.18. *Für holomorphe Linienbündel $L \to X$ über einer Riemannschen Fläche und einer offenen Menge $U \subseteq X$ nennen wir*

$$\mathscr{O}^p(U,L) := \mathscr{O}(U, \Lambda^{p,0}T^*X \otimes L)$$

die holomorphen $(p,0)$-Formen mit Werten in L über U.

Da der $\bar\partial$-Operator auf gewöhnlichen komplexen Differentialformen $\bar\partial^2 = 0$ erfüllt, gilt dies per definitionem auch für den $\bar\partial$-Operator auf komplexen Differentialformen mit Werten in holomorphen Linienbündeln. Wir haben also einen Kokettenkomplex

$$0 \longrightarrow \Omega^{0,0}(X,L) \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{0,1}(X,L) \xrightarrow{\bar\partial} 0$$

mit $\operatorname{ran}(\bar\partial : \Omega^{0,\bullet-1} \to \Omega^{0,\bullet}) \subseteq \ker(\bar\partial : \Omega^{0,\bullet} \to \Omega^{0,\bullet+1})$. Wir können also eine bündelwertige Dolbeault-Kohomologie definieren.

Definition 2.19. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel. Dann heißen die Vektorräume*

$$H^k_{\bar\partial}(X, L) := \frac{\ker(\bar\partial : \Omega^{0,k}(X, L) \to \Omega^{0,k+1}(X, L))}{\operatorname{ran}(\bar\partial : \Omega^{0,k-1}(X, L) \to \Omega^{0,k}(X, L))}$$

die Dolbeault-Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in L von X.

Diese Gruppen entsprechen im Fall des trivialen Bündels $L = X \times \mathbb{C}$ den herkömmlichen Dolbeault-Kohomologiegruppen.

Satz 2.20. *Falls X eine kompakte Riemannsche Fläche und $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel ist, dann sind die Dolbeault-Kohomologiegruppen $H^k_{\bar\partial}(X, L)$ endlichdimensional.*

Beweis. Der Satz ist ein Corollar aus dem Hodge-de-Rham Theorem des $\bar\partial$-Operators, welches wir später behandeln. □

3 Der Satz von Riemann-Roch

3.1 Der Satz und seine Anwendungen

Wir betrachten im Folgenden eine kompakte Riemannsche Fläche X. Per definitionem gilt für die Dolbeault-Kohomologie von X:

$$\dim H^0_{\bar\partial}(X) - \dim H^1_{\bar\partial}(X) = 1 - g.$$

Diese Zahl heißt die *$\bar\partial$-Euler-Charakteristik von X*. Wie sich herausstellt, ist die rechte Seite eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeit X, also ist auch die $\bar\partial$-Euler-Charakteristik invariant. Gibt es ein ähnliches Resultat für die Dolbeault-Kohomologie mit Werten in einem holomorphen Linienbündel L? Die Antwort ist so schön wie man es sich nur wünschen kann:

Theorem 3.1 (Riemann-Roch)**.** *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel über X. Dann gilt*

$$\dim H^0_{\bar\partial}(X, L) - \dim H^1_{\bar\partial}(X, L) = 1 - g + \deg L$$

Wir beweisen das Riemann-Rochsche Theorem im zweiten Teil des Kapitels. Vorher diskutieren wir einige Konsequenzen.

Wir haben bereits gesehen, dass die einzigen holomorphen Funktionen auf einer kompakten Riemannschen Fläche die konstanten Funktionen sind. Die Anzahl der meromorphen Funktionen ist aber im Allgemeinen ungleich höher, so sind z.B. auf der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ Polynome $p : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$$

mit $a_n \neq 0$ meromorphe Funktionen mit einem n-fachen Pol bei ∞. Wir haben also

$$\dim \mathscr{O}(\hat{\mathbb{C}}) = 1 \quad \text{und} \quad \dim \mathscr{M}(\hat{\mathbb{C}}) = \infty.$$

Genauer können wir zu einer vorgegebenen maximalen Polordnung $k \in \mathbb{N}$ mindestens eine meromorphe Funktion auf $\hat{\mathbb{C}}$, nämlich $p_k : z \mapsto z^k$, angeben. Dabei sind die p_k paarweise linear unabhängig für verschiedene Indizes. Wir können nun eine allgemeinere Version dieser Beobachtung herleiten.

Satz 3.2 (Riemann)**.** *Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $D \in \operatorname{Div}(X)$ ein Divisor, dann gilt:*

$$\dim \mathscr{O}_D(X) \geq 1 - g + \deg D.$$

Beweis. Sei L ein D zugeordnetes holomorphes Linienbündel. Dann gilt

$$\begin{aligned} H^0_{\bar\partial}(X, L) &= \ker(\bar\partial : \Omega^{0,0}(X, L) \to \Omega^{0,1}(X, L)) \\ &= \mathscr{O}(X, \Lambda^{0,0} T^* X \otimes L) \\ &= \mathscr{O}(X, L) \cong \mathscr{O}_D(X) \end{aligned}$$

Und $\deg D = \deg L$ per definitionem. □

Der Satz liefert also die Existenz von nichtkonstanten meromorphen Funktionen zu vorgegebenen Polstellen, solange man Divisoren mit $\deg D > g$ vorgibt. Die nachfolgenden Anwendungen sind größtenteils aus [For77, S.120] übernommen.

Beispiel 3.3. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit Geschlecht g. Dann gilt:*

1. $\dim \mathscr{M}(X) = \infty$. *Falls* $\dim \mathscr{M}(X) = k < \infty$, *wähle einen Divisor D mit* $\deg D \geq k + g$. *Dann ist* $\dim \mathscr{M}(X) \geq \dim \mathscr{O}_D(X) \geq k + 1$.

2. *Zu einem vorgegebenem Punkt $x_0 \in X$ gibt es eine nichtkonstante Funktion $f \in \mathscr{M}(X)$, welche höchstens in x_0 einen Pol mit maximaler Ordnung* $1+g$ *hat und sonst holomorph ist. Betrachte dazu den Divisor*

$$D(x) = \begin{cases} 1 + g & \text{falls } x = x_0 \\ 0 & \text{falls } x \neq x_0 \end{cases}.$$

Eine interessante Interpretation der wie im obigen Beispiel erhaltenen meromorphen Funktionen mit beschränkter Polordnung ist die einer Überlagerungsabbildung $X \to \hat{\mathbb{C}}$. Die dazu benötigte Überlagerungstheorie findet sich z.B. in [For77, S. 18 ff.].

Lemma 3.4. *Sind X, Y Riemannsche Flächen, X kompakt und $f \colon X \to Y$ eine nichtkonstante meromorphe Funktion, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass f eine n-blättrige Überlagerungsabbildung ist.*

Beweis. Siehe [For77, S. 22 ff.] und insbesondere [For77, S. 28]. □

Satz 3.5. *Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g, dann gibt es eine holomorphe Überlagerung $X \to \hat{\mathbb{C}}$ mit maximal $1+g$ Blättern.*

Beweis. In Beispiel 2.3 haben wir gesehen, dass es eine nichtkonstante meromorphe Funktion $f\colon X \to \mathbb{C}$ gibt, welche den Wert ∞ höchstens $1+g$ mal annimmt. Also gilt für ein n wie in Lemma 3.4 die Beziehung $n \leq 1+g$. Aufgefasst als holomorphe Funktion $X \to \hat{\mathbb{C}}$ ist f die gesuchte Überlagerungsabbildung. □

Korollar 3.6. *Jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht $g = 0$ ist holomorph isomorph zu $\hat{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Nach Satz 3.5 gibt es eine holomorphe Überlagerungsabbildung $f\colon X \to \hat{\mathbb{C}}$ mit Blätterzahl 1. Damit ist f global invertierbar, lokal biholomorph und damit biholomorph. □

Man kann mit dieser Methodik auch Riemannsche Flächen höheren Geschlechts klassifizieren [Lam05, S.260].

3.2 Der Beweis des Riemann-Rochschen Theorems

Um den Satz von Riemann-Roch zu beweisen, benötigen wir einige Vorüberlegungen. Sei im Folgenden X eine kompakte Riemannsche Fläche und $L, L' \to X$ zwei holomorphe Linienbündel, sodass es Schnitte $s \in \mathscr{M}(X, L) \setminus \{0\}$ und $s' \in \mathscr{M}(X, L') \setminus \{0\}$, sowie $x_0 \in X$ und $m \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$((s') - (s))\,(x) = m \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}.$$

Lemma 3.7. *Wir definieren eine Abbildung*

$$\iota : \Omega^{0,\bullet}(X, L) \to \Omega^{0,\bullet}(X, L')$$

wie folgt: Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$, über der wir ein Element $\omega \in \Omega^{0,\bullet}(X, L)$ schreiben können als $\omega = \alpha \otimes f$ mit $\alpha \in \Omega^{0,\bullet}(U)$ und einem holomorphen lokalen Rahmen $f \in \mathscr{O}(U, L)$ von L. Setze

$$\iota : \alpha \otimes f \mapsto \alpha \otimes \frac{f}{s} \cdot s'.$$

Dann ist ι wohldefiniert und ein injektiver Kokettenhomomorphismus, dh. ι ist $\mathbb{C}$-linear und es gilt $\bar{\partial} \circ \iota = \iota \circ \bar{\partial}$.

Beweis. Offenbar hängt ι nicht von der Wahl des holomorphen Rahmens ab, denn für zwei holomorphe lokale Rahmen f_i, f_j von L mit $f_i = g_{ij} f_j$ gilt

$$\alpha \otimes f_i = g_{ij}\alpha \otimes f_j \mapsto g_{ij}\alpha \otimes \frac{f_j}{s} \cdot s' = \alpha \otimes \frac{f_i}{s} \cdot s'.$$

Da $(s) \leq (s')$, gilt $(f/s \cdot s') = (f) - (s) + (s') \geq (f) \geq 0$, somit ist der Term $f/s \cdot s'$ sogar eine holomorphe lokale Darstellung eines Schnittes von L'. Also bildet ι nach $\Omega^{0,\bullet}(X, L')$ ab. ι ist offensichtlich injektiv, da wir eine Linksinverse lokal definieren können durch

$$\omega \otimes \frac{f}{s} \cdot s' \mapsto \omega \otimes \frac{f}{s} \cdot \frac{s'}{s'} \cdot s = \omega \otimes f.$$

Genau wie ι ist diese Abbildung offensichtlich unabhängig von der gewählten Karte. ι ist $\mathbb{C}$-linear, da wir eine Linearkombination zweier Elemente von $\Omega^{0,\bullet}(X, L)$ lokal schreiben können als

$$\lambda(\alpha \otimes f) + \mu(\beta \otimes f) = (\lambda\alpha + \mu\beta) \otimes f$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Außerdem rechnen wir leicht nach, dass ι und $\bar{\partial}$ kommutieren:

$$\bar{\partial} \circ \iota(\omega \otimes f) = \bar{\partial}(\omega \otimes \frac{f}{s} \cdot s') = \bar{\partial}\omega \otimes \frac{f}{s} \cdot s' = \iota(\bar{\partial}\omega \otimes f) = \iota \circ \bar{\partial}(\omega \otimes f),$$

wobei hier benutzt wurde, dass $f/s \cdot s'$ ein holomorpher lokaler Rahmen für L' ist. □

Die Abbildung ι wie im Lemma gibt uns eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^{0,\bullet}(X, L) \xrightarrow{\iota} \Omega^{0,\bullet}(X, L') \xrightarrow{\mathrm{pr}} \frac{\Omega^{0,\bullet}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,\bullet}(X,L))} \longrightarrow 0$$

wobei pr die natürliche Projektion $\omega \mapsto [\omega]$ ist. Über die Definition $\bar{\partial}[\omega] := [\bar{\partial}\omega]$ können wir den $\bar{\partial}$-Operator auch auf den Quotientenraum anwenden. Diese Operation ist wohldefiniert, denn falls $[\omega] = [\eta]$, so hat die Differenz $\omega - \eta$ lokale Darstellungen der Form

$$\omega - \eta = \alpha \otimes \frac{f}{s} \cdot s'$$

mit einer glatten Form α und einem holomorphen lokalen Rahmen f von L. Dann gilt allerdings schon

$$\bar{\partial}[\omega - \eta] = \left[\bar{\partial}(\omega - \eta)\right] = \left[\bar{\partial}\alpha \otimes \frac{f}{s} \cdot s'\right] = [0].$$

Per definitionem kommutiert also pr mit $\bar{\partial}$ und ist damit ebenfalls ein Kokettenhomomorphismus.

Unter diesen Bedingungen induziert die kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen eine lange exakte Sequenz auf der Kohomologie[8]:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0_{\bar\partial}(X,L) \arrow[r] & H^0_{\bar\partial}(X,L') \arrow[r] & \mathscr{H}^0(L',L) \arrow[dll, rounded corners] \\ & H^1_{\bar\partial}(X,L) \arrow[r] & H^1_{\bar\partial}(X,L') \arrow[r] & \mathscr{H}^1(L',L) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

wobei die Vektorräume $\mathscr{H}^\bullet(L',L)$ gegeben sind durch

$$\mathscr{H}^\bullet(L',L) = H^\bullet_{\bar\partial}\left(\frac{\Omega^{0,\bullet}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,\bullet}(X,L))}\right) := \frac{\ker\left(\bar\partial : \frac{\Omega^{0,\bullet}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,\bullet}(X,L))} \to \frac{\Omega^{0,\bullet+1}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,\bullet+1}(X,L))}\right)}{\operatorname{ran}\left(\bar\partial : \frac{\Omega^{0,\bullet-1}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,\bullet-1}(X,L))} \to \frac{\Omega^{0,\bullet}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,\bullet}(X,L))}\right)},$$

das heißt

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^0(L',L) &= \ker\left(\bar\partial : \frac{\Omega^{0,0}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,0}(X,L))} \to \frac{\Omega^{0,1}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,1}(X,L))}\right) \\ \mathscr{H}^1(L',L) &= \frac{\frac{\Omega^{0,1}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,1}(X,L))}}{\operatorname{ran}\left(\bar\partial : \frac{\Omega^{0,0}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,0}(X,L))} \to \frac{\Omega^{0,1}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,1}(X,L))}\right)}. \end{aligned}$$

Lemma 3.8. *Für die Vektorräume $\mathscr{H}^\bullet(L',L)$ gelten die Dimensionsgleichungen*

$$\begin{aligned} &\dim \mathscr{H}^0(L',L) = \deg L' - \deg L; \\ &\dim \mathscr{H}^1(L',L) = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für die meromorphen Schnitte $s, s' \neq 0$ von L und L':

$$((s') - (s))\,(x) = m \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases}.$$

Wähle eine um x_0 zentrierte trivialisierende Koordinatenumgebung (U,z). Wir geben einen Isomorphismus

$$\phi_\bullet \colon \frac{\Omega^{0,\bullet}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,\bullet}(X,L))} \longrightarrow E^\bullet,$$

an, wobei wir mit $E^\bullet$ die Mengen

$$\begin{aligned} E^0 &:= \sum_{j=0}^{m-1} z^j \mathbb{C}[[\bar z]] \\ E^1 &:= \sum_{j=0}^{m-1} z^j \mathbb{C}[[\bar z]]\mathrm{d}\bar z \end{aligned}$$

[8] Dies ist ein Anwendung des Zig-Zag-Lemmas aus der homologischen Algebra, siehe z.B. [Hat01, S.116].

bezeichnen, welcher mit $\bar{\partial}$ kommutiert. Dabei ist $\bar{\partial}$ auf $E^\bullet$ auf die naheliegende Weise definiert. Hier bezeichnet $\mathbb{C}[[\bar{z}]]$ den Ring der formalen Potenzreihen in $\bar{z}$. Ein Element $\omega \in \Omega^{0,\bullet}(X, L')$ hat in den gewählten lokalen Koordinaten um x_0 die Form

$$\omega = \begin{cases} f_\omega \\ \mathrm{d}\bar{z} \otimes f_\omega \end{cases}$$

mit einem glatten Schnitt $f_\omega \in \Gamma(U, L')$. Wenn wir $k := (s)(x_0) \in \mathbb{Z}$ schreiben, so sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_0 \colon \omega = f_\omega &\mapsto \frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} \\ \varphi_1 \colon \omega = \mathrm{d}\bar{z} \otimes f_\omega &\mapsto \mathrm{d}\bar{z} \otimes \frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} = \frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} \mathrm{d}\bar{z} \end{aligned}$$

linear und ordnen $\omega \in \Omega^{0,\bullet}(X, L')$ eine glatte Funktion bzw. Form auf U zu. Nach Konstruktion ist diese Abbildung surjektiv. In beiden Fällen können wir der glatten Funktion $f_\omega / s' \cdot z^{k+m}$ seine formale Taylorreihe in $z, \bar{z}$ zuordnen:

$$T : \frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!j!} \partial_z^j \partial_{\bar{z}}^k \left(\frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} \right) \bigg|_{x=x_0} \bar{z}^k.$$

Auch diese Abbildung ist offenbar linear, nach einem Satz von Borel ist die Zuordnung außerdem surjektiv [Nar73, S. 30]. Zusammen mit der Projektion auf die ersten m Summanden in z, das heißt der Abbildung

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \bar{z}^k \mapsto \sum_{j=0}^{m-1} z^j \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \bar{z}^k$$

erhalten wir daher eine surjektive lineare Abbildung

$$\begin{gathered} \tilde{\phi}_\bullet : \Omega^{0,\bullet}(X, L') \to E^\bullet \\ \omega = f_\omega \mapsto \sum_{j=0}^{m-1} z^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} \partial_z^j \partial_{\bar{z}}^k \left(\frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} \right) \bigg|_{x=x_0} \bar{z}^k; \\ \omega = \mathrm{d}\bar{z} \otimes f_\omega \mapsto \sum_{j=0}^{m-1} z^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} \partial_z^j \partial_{\bar{z}}^k \left(\frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} \right) \bigg|_{x=x_0} \bar{z}^k \mathrm{d}\bar{z}. \end{gathered}$$

Wir berechnen nun den Kern von $\tilde{\phi}_\bullet$. Sei ω wie oben. Wegen

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_\bullet(\omega) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} \quad \text{hat Taylorreihe} \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \ldots z^j \bar{z}^k \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{f_\omega}{s'} z^{k} \quad \text{hat Taylorreihe} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \ldots z^j \bar{z}^k \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{f_\omega}{s'} s \quad \text{ist glatt} \\
&\Longleftrightarrow \quad \omega \in \iota(\Omega^{0,\bullet}(X, L))
\end{aligned}$$

ist $\ker \tilde{\phi}_\bullet = \iota(\Omega^{0,\bullet}(X, L))$. Also haben wir einen Isomorphismus

$$\phi_\bullet : \frac{\Omega^{0,\bullet}(X, L')}{\iota(\Omega^{0,\bullet}(X, L))} \longrightarrow E^\bullet.$$

Wir rechnen noch nach, dass $\bar{\partial} \circ \phi = \phi \circ \bar{\partial}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{\partial} \circ \phi_0(\omega) &= \bar{\partial} \sum_{j=0}^{m-1} z^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} \partial_z^j \partial_{\bar{z}}^k \left(\frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} \right) \bigg|_{x=x_0} \bar{z}^k \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} z^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} \bar{\partial} \partial_z^j \partial_{\bar{z}}^k \left(\frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} \right) \bigg|_{x=x_0} \bar{z}^k \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} z^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{j!k!} \partial_z^j \partial_{\bar{z}}^k \left(\partial_{\bar{z}} \left(\frac{f_\omega}{s'} z^{k+m} \right) \right) \bigg|_{x=x_0} \bar{z}^k \mathrm{d}\bar{z} \\
&= \phi_1 \circ \bar{\partial}(\omega).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^0(L', L) &\cong \ker \left(\bar{\partial} : E^0 \to E^1 \right); \\
\mathscr{H}^1(L', L) &\cong \frac{E^1}{\operatorname{ran} \left(\bar{\partial} : E^0 \to E^1 \right)}.
\end{aligned}$$

Betrachte nun $\sum_{j=0}^{m-1} z^j \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \bar{z}^k \in E^0$. Dann gilt

$$\bar{\partial} \sum_{j=0}^{m-1} z^j \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \bar{z}^k = \sum_{j=0}^{m-1} z^j \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{j,k+1} \bar{z}^k \mathrm{d}\bar{z}.$$

Daraus folgt sofort

$$\begin{aligned}
\ker(\bar{\partial}\colon E^0 \to E^1) &= \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j \,\middle|\, a_j \in \mathbb{C} \right\}; \\
\operatorname{ran}(\bar{\partial}\colon E^0 \to E^1) &= E^1
\end{aligned}$$

und damit gilt die Behauptung, denn

$$\deg L' - \deg L = \sum_{x \in X} \left((s') - (s) \right)(x) = \left((s') - (s) \right)(x_0) = m$$

und $\dim \ker(\bar{\partial}\colon E^0 \to E^1) = m$. $\square$

Beweis des Riemann-Rochschen Theorems. Wir betrachten zunächst einige Spezialfälle:

1. Ist $L = X \times \mathbb{C}$ das triviale Linienbündel, so ist $H^k_{\bar{\partial}}(X, L) = H^k_{\bar{\partial}}(X)$ sowie $\deg L = 0$ und der Satz gilt per definitionem.

2. Seien nun $L, L' \to X$ zwei holomorphe Linienbündel mit meromorphen Schnitten $s \in \mathscr{M}(X, L) \setminus \{0\}$, $s' \in \mathscr{M}(X, L') \setminus \{0\}$, sodass

$$\left((s') - (s) \right)(x) = m \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 0 & x \neq x_0 \end{cases},$$

für ein $x_0 \in X$ und $m \in \mathbb{N}$.[9] Betrachte ι wie in Lemma. Wir haben eine kurze exakte Sequenz von $\bar{\partial}$-Kokettenkomplexen

$$0 \longrightarrow \Omega^{0,\bullet}(X, L) \xrightarrow{\iota} \Omega^{0,\bullet}(X, L') \xrightarrow{\mathrm{pr}} \frac{\Omega^{0,\bullet}(X,L')}{\iota(\Omega^{0,\bullet}(X,L))} \longrightarrow 0\ ,$$

wobei ι und pr Kokettenhomomorphismen sind. Dies induziert eine lange exakte Sequenz auf der Kohomologie

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0_{\bar{\partial}}(X, L) \arrow[r] & H^0_{\bar{\partial}}(X, L') \arrow[r] & \mathscr{H}^0(L', L) \arrow[dll, rounded corners] & \\ & H^1_{\bar{\partial}}(X, L) \arrow[r] & H^1_{\bar{\partial}}(X, L') \arrow[r] & \mathscr{H}^1(L', L) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Unter Verwendung von Lemma 3.8 erhalten wir also die exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0_{\bar{\partial}}(X, L) \arrow[r] & H^0_{\bar{\partial}}(X, L') \arrow[r] & \mathscr{H}^0(L', L) \arrow[dll, rounded corners] \\ & H^1_{\bar{\partial}}(X, L) \arrow[r] & H^1_{\bar{\partial}}(X, L') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit $\dim \mathscr{H}^0(L', L) = \deg L' - \deg L$. Wir definieren

$$\begin{aligned} V_L^{L'} &:= \operatorname{ran}\left(H^0_{\bar{\partial}}(X, L') \to \mathscr{H}^0(L', L)\right); \\ W_L^{L'} &:= \mathscr{H}^0(L', L)/V_L^{L'}. \end{aligned}$$

[9] Dieser Teil des Beweises ist im Wesentlichen aus [For77, S.119] übernommen.

Dann gilt mit dem ersten Isomorphiesatz

$$V_L^{L'} \oplus W_L^{L'} = V_L^{L'} \oplus \mathscr{H}^0(L', L)/V_L^{L'} \cong \mathscr{H}^0(L', L)$$

und die exakte Sequenz zerfällt in die beiden kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow H^0_{\bar\partial}(X, L) \longrightarrow H^0_{\bar\partial}(X, L') \longrightarrow V_L^{L'} \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow W_L^{L'} \longrightarrow H^1_{\bar\partial}(X, L) \longrightarrow H^1_{\bar\partial}(X, L') \longrightarrow 0.$$

Da alle auftretenden Mengen endlichdimensionale Vektorräume sind, spalten die Sequenzen und wir erhalten insbesondere die Dimensionsgleichungen

$$\dim H^0_{\bar\partial}(X, L') = \dim \left(H^0_{\bar\partial}(X, L) \oplus V_L^{L'} \right) = \dim H^0_{\bar\partial}(X, L) + \dim V_L^{L'};$$

$$\dim H^1_{\bar\partial}(X, L) = \dim \left(W_L^{L'} \oplus H^1_{\bar\partial}(X, L') \right) = \dim W_L^{L'} + \dim H^1_{\bar\partial}(X, L').$$

Daraus folgt unter der Verwendung von

$$\dim V_L^{L'} + \dim W_L^{L'} = \dim \mathscr{H}(L', L) = \deg L' - \deg L$$

durch Addition der beiden Gleichungen:

$$\dim H^0_{\bar\partial}(X, L) - \dim H^1_{\bar\partial}(X, L) - \deg L = \\ \dim H^0_{\bar\partial}(X, L') - \dim H^1_{\bar\partial}(X, L') - \deg L'.$$

Falls für eines der beiden Linienbündel der Satz von Riemann-Roch gilt, ist eine Seite dieser Gleichung gleich $1 - g$ und somit gilt die Aussage ebenfalls für das andere.

3. Sind L und L' zwei holomorphe Linienbündel mit zugeordneten Divisoren D, D', sodass $D \leq D'$, dann gibt es aufgrund der Kompaktheit von X endlich viele $x_1, \ldots, x_N \in X$ und Divisoren $D_1, \ldots, D_N$, sodass $D < D_1 < \ldots < D_N < D$ und für zwei aufeinanderfolgende Divisoren gilt

$$(D_{i+1} - D_i)(x) = m \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases}.$$

Nach Wahl von entsprechenden holomorphen Linienbündeln (L_i) und Schnitten $s_i \in \mathscr{M}(X, L_i) \setminus \{0\}$ mit $(s_i) = D_i$ gilt die Aussage damit für L und L', falls sie für eines der beiden Bündel gilt.

4. Sei nun $L \to X$ ein beliebiges holomorphes Linienbündel und D ein zugeordneter Divisor. Sei L' ein holomorphes Linienbündel zu dem Divisor $D' := \max\{D, 0\} \geq 0$. Wegen $D' \geq 0$ gilt das Theorem damit für L' und wegen $D \leq D'$ auch für L.

□

4 Hodge-Theorie und Serre-Dualität

4.1 Hermitesche Metriken

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns genauer mit der im Satz von Riemann-Roch auftretenden $\bar{\partial}$-Euler-Charakteristik. Während $\dim H^0_{\bar{\partial}}(X, L)$ im Beweis von Satz 3.2 als Anzahl linear unabhängiger vielfachen Funktionen eines Divisors $-D$ eine sinnvolle Interpretation bekommen hat, ist die Bedeutung von $\dim H^1_{\bar{\partial}}(X, L)$ weniger klar. Der Satz von Serre stellt einen anschaulicheren Bezug zur Anzahl von meromorphen Differentialformen her.
Ein wichtiges Hilfsmittel in diesem Kapitel wird die Hodge-Theorie und insbesondere die Hodge-Zerlegung des $\bar{\partial}$-Operators sein. Dazu müssen wir unsere Bündel mit einer hermiteschen Metrik versehen.

Definition 4.1. *Sei $E \to M$ ein komplexes Vektorbündel über einer glatten Mannigfaltigkeit M. Eine hermitesche Metrik h auf E ist gegeben durch ein hermitesches Skalarprodukt*

$$h_p \colon E_p \times E_p \to \mathbb{C}$$

auf jeder Faser E_p von E, sodass h glatt in p ist, das heißt nach Wahl einer lokalen Trivialisierung (U, φ) von E sind die Abbildungen $h_{ij} \colon U \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$h_{ij}(p) = h_p(\varphi^{-1}(p, e_i), \varphi^{-1}(p, e_j))$$

glatt in p. Das Paar (E, h) heißt hermitesches Vektorbündel.

Hermitesche Skalarprodukte sind per Konvention $\mathbb{C}$-linear im ersten Argument.

Satz 4.2. *Man kann jedes komplexe Vektorbündel $E \to M$ mit einer hermiteschen Metrik ausstatten.*

Beweis. Sei $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ ein Bündelatlas von E mit Rang k und ρ_i eine subordinierte Zerlegung der Eins. Auf $E\restriction U_i$ setzen wir $h^i_p(v, w) := (\varphi_i(v), \varphi_i(w))$, wobei $(\cdot, \cdot)$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^k$ ist. Nach glatter Fortsetzung der $\rho_k h^k$ nach E durch Null definiert

$$h_p := \sum_{i\in I} \rho_i(p) h^i_p$$

eine hermitesche Metrik auf E, da h_p eine Konvexkombination von hermiteschen Skalarprodukten und per Konstruktion glatt in p ist. □

Definition 4.3. *Eine hermitesche Mannigfaltigkeit ist ein Tupel (X, h) bestehend aus einer komplexen Mannigfaltigkeit X und einer hermiteschen Metrik h von $T^{1,0}X$.*

Sei (X, h) eine hermitesche Riemannsche Fläche. Wir zeigen nun, dass sich h zu einer hermiteschen Metrik auf $T_{\mathbb{C}}X$ fortsetzen lässt[10]. Dazu definieren wir

1. $h_x(v, w) := 0$, falls $v \in T_x^{1,0}X$ und $w \in T_x^{0,1}X$.
2. $h_x(v, w) := \overline{h_x(\bar{v}, \bar{w})}$, für $v, w \in T_x^{0,1}X$.

Nach Wahl von lokalen Koordinaten z von X ist ∂_z ein lokaler Rahmen von $T^{1,0}X$ und $\partial_{\bar{z}}$ ein lokaler Rahmen von $T^{0,1}X$. Bezüglich der gewählten Rahmen hat h die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} h_x(\partial_z, \partial_z) & 0 \\ 0 & h_x(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_x(\partial_z, \partial_z) & 0 \\ 0 & h_x(\partial_z, \partial_z) \end{pmatrix} \tag{8}$$

und ist somit glatt in x und ein hermitesches Skalarprodukt auf $T_{x\mathbb{C}}X$. Damit ist h eine hermitesche Metrik auf $T_{\mathbb{C}}X$.

Da h_x eine nichtausgeartete Bilinearform auf den endlichdimensionalen Fasern ist, haben wir einen $\mathbb{C}$-antilinearen Isomorphismus[11]

$$\flat \colon T_{x\mathbb{C}}X \to T_{x\mathbb{C}}^*X \quad v \mapsto h_x(\cdot, v)$$

mit Inverse $\sharp := \flat^{-1}$. Damit induziert h eine hermitesche Metrik h^* auf $T_{\mathbb{C}}^*X$ via

$$h_x^*(v, w) := h_x(\sharp v, \sharp w).$$

Also können wir auch auf $\Lambda^2 T^*X$ eine hermitesche Metrik $\Lambda^2 h^*$ definieren durch

$$\Lambda^2 h_x^*(v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2) := \det\left(h_x^*(v_i, w_j)\right)_{i,j}.$$

Man sieht direkt, dass $\Lambda^2 h^*$ glatt ist und rechnet leicht nach, dass es sich faserweise um ein hermitesches Skalarprodukt handelt. Insgesamt haben wir also das nachfolgende Lemma bewiesen.

Lemma 4.4. *Auf einer Riemannschen Fläche X induziert eine hermitesche Metrik h in natürlicher Weise hermitesche Metriken auf $\Lambda_{\mathbb{C}}^k X$.*

Für diese Metriken schreiben wir zukünftig auch $(\cdot, \cdot)$.

4.2 Der Hodge-Stern-Operator

Auf einer orientierbaren riemannschen Mannigfaltigkeit M mit Dimension m haben wir den bekannten Hodge-Stern-Operator, welcher als $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus

$$* : \Omega^k(M) \to \Omega^{m-k}(M)$$

[10] Diese Strategie wird motiviert von [KN69, S.119].

[11] Beachte, dass dadurch v eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung zugeordnet wird.

auf die Differentialformen wirkt und so einen Isomorphismus

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \cong H^{m-k}_{\mathrm{dR}}(M)$$

induziert. Wir wollen ein analoges Resultat erzielen, um die Dolbeault-Kohomologiegruppe $H^1_{\bar\partial}(X, L)$ zu interpretieren. Dazu wird ein geeigneter Hodge-Stern-Operator auf $\Omega^{p,q}(X, L)$ nützlich sein. Dieses Kapitel orientiert sich an [Huy05, S. 166 ff.] und [Mor07, S.105 ff.].

Lemma 4.5. *Sei X eine hermitesche Riemannsche Fläche. Dann lässt X aufgefasst als reelle Mannigfaltigkeit der Dimension 2 einen reellen Hodge-Stern-Operator zu.*

Beweis. Dazu beweisen wir zwei kleinere Lemmata:

1. *Jede Riemannsche Fläche ist orientierbar.* Dazu genügt es zu zeigen, dass die Ableitungen der Kartenwechsel aufgefasst als Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ positive Determinante haben. X besitzt einen holomorphen Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, dh. die Kartenwechsel $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind holomorph. Wir fassen $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $u := \mathrm{Re}\,(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$ und $v := \mathrm{Im}\,(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})$ auf. Dann gilt mit den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:

$$\det D\left(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \geq 0.$$

   Da stets $\det D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \neq 0$ gilt, folgt die Behauptung.

2. *Eine hermitesche Metrik h auf X induziert eine verträgliche riemannsche Metrik g auf X aufgefasst als reell 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.* Wir setzen

$$g := \mathrm{Re}(h) = \frac{1}{2}(h + \bar h)$$

   wobei $\bar h$ die punktweise definierte komplexe Konjugation ist. Offenbar ist g reellwertig und glatt. Wir überprüfen, dass $g \restriction T_{\mathbb{R}}X$ faserweise ein Skalarprodukt ist, indem wir in lokalen Koordinaten $z = x + iy$ die Identitäten $\partial_x = \partial_z + \partial_{\bar z}$ und $\partial_y = i(\partial_z - \partial_{\bar z})$ benutzen. Man berechnet die Matrixdarstellung bezüglich ∂_x, ∂_y zu:

$$2\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,h(\partial_z, \partial_z) & \mathrm{Im}\,h(\partial_z, \partial_z) \\ \mathrm{Im}\,h(\partial_z, \partial_z) & \mathrm{Re}\,h(\partial_z, \partial_z) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} h(\partial_z, \partial_z) & 0 \\ 0 & h(\partial_z, \partial_z) \end{pmatrix} > 0. \quad (9)$$

   Damit ist g glatt, faserweise ein reelles Skalarprodukt und daher eine riemannsche Metrik. Wir bemerken, dass die sesquilineare Fortsetzung von g wieder die hermitesche Metrik h auf $T_{\mathbb{C}}X$ erzeugt, da (8) und (9) die gleiche Abbildung beschreiben.

□

Sei (X, h) eine hermitesche Riemannsche Fläche und g die in obigem Beweis konstruierte zugehörige riemannsche Metrik auf dem reellen Tangentialraum $T_{\mathbb{R}}X$ von X aufgefasst als reelle Mannigfaltigkeit. Wenn wir analog zu den obigen Überlegungen die von g induzierten riemannschen Metriken $(\cdot, \cdot)$ auf $\Lambda^k T_{\mathbb{R}}X$ betrachten, dann ist der entsprechenden Hodge-Stern-Operator $*\colon \Omega^k(X) \to \Omega^{2-k}(X)$ bekanntlich definiert durch:

$$\omega \wedge *\eta = (\omega, \eta) \cdot \mathrm{vol}, \tag{10}$$

wobei vol die durch die Orientierung von X gegebene, auf 1 normierte Volumenform bezeichnet [Huy05, S.32]. Da wir mit komplexwertigen Differentialformen arbeiten, definieren wir einen $\mathbb{C}$-antilinearen Hodge-Stern-Operator $\bar{*} : \Omega^k_{\mathbb{C}}(X) \to \Omega^{2-k}_{\mathbb{C}}(X)$ durch $\mathbb{C}$-antilineare Fortsetzung des gewöhnlichen Hodge-Stern-Operators auf $\Omega^k(X)$.

Lemma 4.6. *Seien $f, g \in C^\infty(X, \mathbb{C})$ und $\omega, \eta \in \Omega^k_{\mathbb{C}}(X)$. Der Hodge-Stern-Operator $\bar{*} : \Omega_{\mathbb{C}}(X) \to \Omega_{\mathbb{C}}(X)$ hat die folgenden Eigenschaften:*

1. $\bar{*} : \Omega^{p,q}(X) \to \Omega^{1-p,1-q}(X)$;
2. $\bar{*}^2 \restriction \Omega^{p,q}(X) = (-1)^{p+q}\,\mathrm{id}$;
3. $\omega \wedge \bar{*}\eta = (\omega, \eta)\,\mathrm{vol} = \overline{\eta \wedge \bar{*}\omega}$;
4. $(\bar{*}\omega, \bar{*}\eta) = (\eta, \omega)$.

Insbesondere ist $\bar{*}$ ein Isomorphismus $\Omega^{p,q}(X) \cong \Omega^{1-p,1-q}(X)$, bis auf Vorzeichen $(\cdot, \cdot)$-selbstadjungiert und es gilt $\bar{*}1 = \mathrm{vol}$.

Beweis. Die ersten zwei Behauptungen sind in lokalen Koordinaten $z = x + iy$ unter Benutzung von $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}\bar{z} = \mathrm{d}x - i\mathrm{d}y$ leicht ausgerechnet. Die dritte folgt unmittelbar aus (10), da beide Seiten der Gleichung durch sesquilineare Fortsetzung auf komplexwertigen Formen definiert sind und daher die Beziehung erhalten bleibt. Die vierte Beziehung folgt aus den vorhergehenden, da

$$\begin{aligned}
(\bar{*}\omega, \bar{*}\eta)\,\mathrm{vol} &= \bar{*}\omega \wedge \bar{*}\bar{*}\eta \\
&= (-1)^{k(2-k)}\bar{*}\omega \wedge \eta \\
&= (-1)^{k(2-k)}(-1)^{k(2-k)}\eta \wedge \bar{*}\omega \\
&= (\eta, \omega)\,\mathrm{vol}.
\end{aligned}$$

Damit sind die Behauptungen bewiesen. □

Definition 4.7. *Sei X eine Riemannsche Fläche mit hermitescher Metrik. Sei $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel mit hermitescher Metrik h, welche wir über $s \mapsto h(\cdot, s)$ als $\mathbb{C}$-antilinearen Isomorphismus $L \cong L^*$ auffassen. Wir definieren einen Hodge-Stern-Operator*

$$\bar{*}_L \colon \Omega^{p,q}(X, L) \to \Omega^{1-p,1-q}(X, L^*)$$

lokal über $\bar{*}_L(\omega \otimes s) := \bar{*}\omega \otimes h(s)$, wobei $\bar{*}$ der übliche Hodge-Stern-Operator auf $\Omega^{p,q}(X)$ ist[12].

Mit dieser Definition übetragen sich die wesentlichen Eigenschaften von $\bar{*}$ auf $\bar{*}_L$. Über den Hodge-Stern-Operator lässt sich auch auf bündelwertigen Differentialformen ein Skalarprodukt definieren.

Satz 4.8. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit hermitescher Metrik und $L \to X$ ein hermitesches holomorphes Linienbündel. Dann ist die Paarung*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \Omega^{p,q}(X, L) \times \Omega^{p,q}(X, L) \to \mathbb{C}$$
$$\langle \omega, \eta \rangle := \int_X \omega \wedge \bar{*}_L \eta$$

ein Skalarprodukt auf $\Omega^{p,q}(X, L)$. Hier steht $\wedge$ für $\wedge_\phi$ mit der natürlichen Auswertungsabbildung $\phi \colon L \otimes L^* \to X \times \mathbb{C}$.

Beweis. X ist kompakt, daher ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wohldefiniert. Die Sesquilinearität folgt sofort aus der Antilinearität von $\bar{*}_L$. Lokal können wir schreiben $\omega = \alpha \otimes s$ und $\eta = \beta \otimes s'$ mit Schnitten s, s' von L, also gilt

$$\begin{aligned} \omega \wedge \bar{*}_L \eta &= (\alpha \otimes s) \wedge \bar{*}_L(\beta \otimes s') \\ &= (\alpha \otimes s) \wedge (\bar{*}\beta \otimes h(\cdot, s')) \\ &= \alpha \wedge \bar{*}\beta \cdot h(s, s') \\ &= (\alpha, \beta) \operatorname{vol} \cdot h(s, s'). \end{aligned}$$

Damit ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesch. Außerdem gilt mit der obigen Rechnung auch

$$\omega \wedge \bar{*}_L \omega = (\alpha, \alpha) \operatorname{vol} \cdot h(s, s) \geq 0$$

und $\langle \omega, \omega \rangle = 0$ impliziert $\alpha = 0$ oder $s = 0$ und damit $\omega = 0$. □

Die durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\Omega^{p,q}(X, L)$ induzierte Norm bezeichnen wir als $\| \cdot \|$.

Definition 4.9. *Unter denselben Voraussetzungen wie in* Satz 4.8 *definieren wir den Operator*

$$\bar{\partial}^t \colon \Omega^{p,q}(X, L) \to \Omega^{p,q-1}(X, L)$$
$$\bar{\partial}^t := -\bar{*}_{L^*} \circ \bar{\partial} \circ \bar{*}_L,$$

wobei wir wie üblich L mit L^{**} identifizieren.

[12] Diese Definition stammt aus [Huy05, S.168].

Wir zeigen nun, dass die suggestive Schreibweise begründet und $\bar{\partial}^t$ formal adjungiert zu $\bar{\partial}$ ist.

Lemma 4.10 (Partielle Integration)**.** *Sind $\omega \in \Omega^{p,0}(X, L)$ und $\eta \in \Omega^{1-p,0}(X, L^*)$ zwei Differentialformen, dann gilt*

$$\int_X \bar{\partial}\omega \wedge \eta = (-1)^{p+q+1} \int_X \omega \wedge \bar{\partial}\eta.$$

Beweis. Aus der Leibnizregel folgt direkt

$$\bar{\partial}\omega \wedge \eta = (-1)^{p+q+1}\omega \wedge \bar{\partial}\eta - \bar{\partial}(\omega \wedge \eta),$$

es bleibt also zu zeigen, dass das Integral über den letzten Term verschwindet. Wir bemerken zuerst, dass $\omega \wedge \eta \in \Omega^{1,0}(X)$. Damit gilt $\partial(\omega \wedge \eta) = 0$ und daher $\bar{\partial}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}(\omega \wedge \eta)$. Aus dem Satz von Stokes folgt dann die Behauptung:

$$\int_X \bar{\partial}(\omega \wedge \eta) = \int_X \mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \int_{\partial X} \omega \wedge \eta = 0.$$

□

Satz 4.11. *$\bar{\partial}^t$ ist bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ formal adjungiert zu $\bar{\partial}$, das heißt für alle $\omega \in \Omega^{p,q}(X, L)$ und $\eta \in \Omega^{p,q+1}(X, L)$ gilt*

$$\langle \bar{\partial}\omega, \eta \rangle = \langle \omega, \bar{\partial}^t \eta \rangle.$$

Beweis. Für ω, η wie im Satz berechnen wir

$$\begin{aligned}
\langle \omega, \bar{\partial}^t \eta \rangle &= \int_X \omega \wedge (\bar{*}_L \bar{*}_{L^*} \bar{\partial}\, \bar{*}_L \eta) \\
&= (-1)^{p+q+1} \int_X \omega \wedge \bar{\partial}\, \bar{*}_L \eta \\
&= \int_X \bar{\partial}\omega \wedge \bar{*}_L \eta = \langle \bar{\partial}\omega, \eta \rangle
\end{aligned}$$

unter Verwendung einer partiellen Integration und Lemma 4.6. □

Bemerkung 4.12. *Formal adjungierte Differenzialoperatoren sind eindeutig* [Mor07, S. 99]*. Insbesondere ist $\bar{\partial}^t$ der einzige Operator mit dieser Eigenschaft.*

4.3 Der Laplace-Operator und die Hodge-Zerlegung

Definition 4.13 (Laplace-Operator)**.** *Wir nennen den Operator*

$$\begin{aligned}
\Delta : \Omega^{p,q}(X, L) &\to \Omega^{p,q}(X, L) \\
\Delta &:= \bar{\partial}^t \bar{\partial} + \bar{\partial}\, \bar{\partial}^t
\end{aligned}$$

den $\bar{\partial}$-Laplace-Operator. Δ setzt sich zu einem $\mathbb{C}$-linearen Operator auf $\Omega_{\mathbb{C}}(X, L) := \bigoplus_{p,q \in \mathbb{N}} \Omega^{p,q}(X, L) = \Omega_{\mathbb{C}}(X) \otimes \Gamma(X, L)$ fort.

Aus Satz 4.11 folgt sofort, dass Δ bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ formal selbstadjungiert ist.

Lemma 4.14. *Der Laplace-Operator und der Hodge-Stern Operator kommutieren, das heißt*

$$\bar{*}_L\Delta = \Delta\bar{*}_L.$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\bar{*}_L\Delta$ auf $\Omega^{p,q}(X,L)$. Der Übersichtlichkeit halber lassen wir die Indizes in diesem Beweis weg. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\bar{*}\Delta &= \bar{*}(\bar{\partial}^t\bar{\partial} + \bar{\partial}\,\bar{\partial}^t) = \bar{*}(-\bar{*}\,\bar{\partial}\,\bar{*}\,\bar{\partial} - \bar{\partial}\,\bar{*}\,\bar{\partial}\,\bar{*}) \\
&= \Big((-1)^{1+p+q}\,\bar{\partial}\,\bar{*}\,\bar{\partial} - \bar{*}\,\bar{\partial}\,\bar{*}\,\bar{\partial}\,\bar{*}\Big) \\
&= \Big((-1)^{1+p+q-p-q}\,\bar{\partial}\,\bar{*}\,\bar{\partial}\,\bar{*} - \bar{*}\,\bar{\partial}\,\bar{*}\,\bar{\partial}\Big)\,\bar{*} \\
&= (\bar{\partial}\,\bar{\partial}^t + \bar{\partial}^t\bar{\partial})\bar{*} = \Delta\bar{*}.
\end{aligned}$$

□

Definition 4.15. *Wir nennen*

$$\mathscr{H}^{p,q}(X,L) := \ker\Delta\restriction\Omega^{p,q}(X,L)$$

die $\bar{\partial}$-harmonischen (p,q)-Formen mit Werten in L auf X.

Lemma 4.16. *Es gilt*

$$\mathscr{H}^{p,q}(X,L) = \ker\bar{\partial}\restriction\Omega^{p,q}(X,L) \cap \ker\bar{\partial}^t\restriction\Omega^{p,q}(X,L),$$

dh. $\omega \in \Omega^{p,q}(X,L)$ ist genau dann harmonisch, wenn ω $\bar{\partial}$-geschlossen und -kogeschlossen ist.

Beweis. Offenbar ist die rechte Seite der Gleichung in der Linken enthalten. Sei umgekehrt $\omega \in \Omega^{p,q}(X,L)$ mit $\Delta\omega = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \langle\Delta\omega,\omega\rangle \\
&= \langle(\bar{\partial}^t\bar{\partial} + \bar{\partial}\,\bar{\partial}^t)\omega,\omega\rangle \\
&= \langle\bar{\partial}^t\bar{\partial}\omega,\omega\rangle + \langle\bar{\partial}\,\bar{\partial}^t\omega,\omega\rangle \\
&= \langle\bar{\partial}\omega,\bar{\partial}\omega\rangle + \langle\bar{\partial}^t\omega,\bar{\partial}^t\omega\rangle \\
&= \|\bar{\partial}\omega\|^2 + \|\bar{\partial}^t\omega\|^2
\end{aligned}$$

und somit $\bar{\partial}\omega = \bar{\partial}^t\omega = 0$. □

Eine besondere Bedeutung der $\bar{\partial}$-harmonischen Differentialformen besteht darin, dass ihre Anzahl mit der $\bar{\partial}$-Dolbeault-Kohomologie verknüpft ist. Die Grundlage für die darauf aufbauende *Hodge-Theorie* bildet eine Zerlegung des Raumes der Differentialformen, welche *Hodge-Zerlegung* genannt wird.

Theorem 4.17 (Hodge-Zerlegung)**.** *Sei X eine kompakte hermitesche Riemannsche Fläche und $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel mit hermitescher Metrik h. Dann gibt es eine direkte Zerlegung*

$$\Omega^{p,q}(X,L) = \mathscr{H}^{p,q}(X,L) \oplus \bar\partial\,\Omega^{p,q-1}(X,L) \oplus \bar\partial^t\Omega^{p,q+1}(X,L)$$

und $\mathscr{H}^{p,q}(X,E)$ ist endlichdimensional.

Das Theorem kann man in einem allgemeineren Kontext für elliptische Differentialoperatoren formulieren. Die hier benutze Version findet sich in [Huy05, S. 170], für eine allgemeinere Formulierung und die für den Beweis benötigte Theorie, siehe [Wel08, S. 108 ff.].

Als direkte Konsequenz ergibt sich der erwähnte Zusammenhang zwischen harmonischen Formen und der Kohomologie.

Satz 4.18. *Die Projektion*

$$\begin{aligned} \mathscr{H}^{0,k}(X,L) &\to H^k_{\bar\partial}(X,L) \\ \omega &\mapsto [\omega] \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus, das heißt jede Äquivalenzklasse von $H^k_{\bar\partial}(X,L)$ besitzt genau einen harmonischen Respräsentanten.

Beweis.

1. Nach Lemma 4.16 ist $\mathscr{H}^{0,k}(X,L) \subseteq \ker\bar\partial \restriction \Omega^{0,k}(X,L)$, damit ist die Projektion wohldefiniert.
2. Der Kern der Projektion besteht genau aus den $\bar\partial$-geschlossenen harmonischen $(0,k)$-Formen. Da die Zerlegung in Theorem 4.17 direkt ist, ist dieser trivial und die Abbildung somit injektiv.
3. Einen Respräsentanten ω von $[\omega] \in H^k_{\bar\partial}(X,L)$ können wir wegen Theorem 4.17 schreiben als

$$\omega = \omega_{\text{harm}} + \bar\partial\eta + \bar\partial^t\mu$$

mit $\Delta\omega_{\text{harm}} = 0$. Dann ist $[\omega] = [\omega_{\text{harm}} + \bar\partial^t\mu]$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \bar\partial(\omega_{\text{harm}} + \bar\partial^t\mu) = \bar\partial\,\bar\partial^t\mu \\ \Rightarrow 0 &= \langle\bar\partial\,\bar\partial^t\mu, \mu\rangle = \langle\bar\partial^t\mu, \bar\partial^t\mu\rangle = \|\bar\partial^t\mu\|^2 \end{aligned}$$

und damit $[\omega] = [\omega_{\text{harm}}]$, also ist die Projektion surjektiv.

□

Korollar 4.19. *Insbesondere sind die Dolbeault-Kohomologiegruppen endlichdimensional.*

Damit können wir den Satz beweisen, den wir im Kapitel über holomorphe Linienbündel und Divisoren ausgiebig genutzt haben.

Satz 4.20. *Sei $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel und $x_0 \in X$. Dann exisitiert ein Schnitt $s \in \mathscr{M}(X, L) \setminus \{0\}$, welcher höchstens in x_0 einen Pol hat und sonst holomorph ist.*

Beweis. Wähle eine Kartenumgebung (U, z) um x_0, welche L trivialisiert. Dann können wir einen Schnitt $s \in \mathscr{O}(U_i, L) \setminus \{0\}$ wählen. Die meromorphen Schnitte

$$\tilde{s}_j := z^{-j} s$$

sind auf $U \setminus \{x_0\}$ holomorph und besitzen einen Pol der Ordnung j in x_0. Wähle eine offene Menge $\tilde{U} \subseteq U_i$ mit $x_0 \in \tilde{U}$ und eine glatte Funktion ρ auf X, sodass $\rho \restriction \tilde{U} = 1$ und $\rho \restriction (X \setminus U) = 0$. Dann sind die Schnitte $s_j := \rho \tilde{s}_j$ auf $X \setminus \{x_0\}$ glatt. Wir definieren

$$\omega_j := \bar{\partial} s_j \in \Omega^{0,1}(X \setminus \{x_0\}, L).$$

Dann ist $\omega_j \restriction (\tilde{U} \setminus \{x_0\}) = 0$ und ω_j lässt sich durch Null glatt auf ganz X fortsetzen. Sei $k = \dim H^1_{\bar{\partial}}(X, L) < \infty$. Dann sind die zugeordneten Äquivalenzklassen $[\omega_1], \ldots, [\omega_{k+1}]$ linear abhängig, das heißt, es gibt eine nichttriviale Linearkombination $c_1\omega_1 + \ldots + c_{k+1}\omega_{k+1} \in \operatorname{ran} \bar{\partial}_{0,0}$. Also gibt es einen glatten Schnitt g von L auf X mit

$$\bar{\partial} g = c_1\omega_1 + \ldots + c_{k+1}\omega_{k+1} = \bar{\partial}(c_1 s_1 + \ldots + x_{k+1} s_{k+1}).$$

Damit ist $g - c_1 s_1 - \ldots - c_{k+1} s_{k+1}$ ein meromorpher Schnitt von L auf X mit einem Pol der Ordnung $k+1$ in x_0 und keinen weiteren Polstellen.

□

4.4 Serre-Dualität

Satz 4.21. *Seien X eine kompakte Riemannsche Fläche und $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel. Dann ist die Paarung*

$$H^1_{\bar{\partial}}(X, L) \times H^0_{\bar{\partial}}(X, \Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*) \to \mathbb{C}$$
$$([\omega], \eta) \mapsto \int_X \omega \wedge \eta$$

wohldefiniert und nicht entartet.

$\Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*$ ist holomorphes Linienbündel, wodurch die Kohomologiegruppen definiert sind. Mit Lemma 2.17 gilt

$$\begin{aligned} H^0_{\bar{\partial}}(X, \Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*) &= \ker \bar{\partial} \restriction \Omega^{1,0}(X, L^*) \\ &= \mathscr{O}(X, \Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*) \\ &= \mathscr{O}^1(X, L^*). \end{aligned}$$

Wir können daher $H^0_{\bar\partial}(X, \Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*)$ auch als den Raum der holomorphen $(1,0)$-Formen mit Werten in L^* auffassen. Damit ergibt auch die Zuordnung $(\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$ Sinn.

Beweis des Satzes. Wähle hermitesche Metriken auf X und L.

1. Sei $[\omega] = [\omega']$, das heißt $\omega' = \omega + \bar\partial f$ mit $f \in C^\infty(X, \mathbb{C})$. Dann gilt

$$(\omega + \bar\partial f, \eta) \mapsto \int_X \omega \wedge \eta + \int_X \bar\partial f \cdot \eta = \int_X \omega \wedge \eta + \int_X \bar\partial(f\eta),$$

   da $\bar\partial\eta = 0$. Es bleibt also zu zeigen, dass der letzte Summand verschwindet. Dazu bemerken wir, dass $f\eta$ Typ $(1,0)$ hat und somit $\partial(f\eta) = 0$. Dann gilt $\bar\partial(f\eta) = \mathrm{d}(f\eta)$ und mit dem Satz von Stokes folgt wie in Lemma 4.10 die Wohldefiniertheit.

2. Nach Wahl von harmonischen Repräsentanten genügt es zu zeigen, dass die Paarung

$$\mathscr{H}^{0,1}(X, L) \times \mathscr{H}^{0,0}(X, \Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*) \to \mathbb{C}$$
$$(\omega, \eta) \mapsto \int_X \omega \wedge \eta$$

   nichtausgeartet ist. Dazu bemerken wir zuerst, dass

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{0,0}(X, \Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*) &= \ker \bar\partial \restriction \Omega^{1,0}(X, L^*) \cap \ker \bar\partial^t \restriction \Omega^{1,0}(X, L^*) \\ &= \mathscr{H}^{1,0}(X, L^*).\end{aligned}$$

   Sei nun $\omega \in \mathscr{H}^{0,1}(X, L) \setminus \{0\}$. Dann ist wegen $\bar*_L\Delta = \Delta\bar*_L$ auch $\eta = \bar*_L\omega \in \mathscr{H}^{1,0}(X, L^*)$ und

$$(\omega, \eta) \mapsto \int_X \omega \wedge \bar*_L\omega = \langle\omega, \omega\rangle = \|\omega\|^2 \neq 0.$$

   Für $\eta \in \mathscr{H}^{1,0}(X, L^*) \setminus \{0\}$ wählt man $\omega = -\bar*_{L^*}\eta$, wobei L mit L^{**} identifiziert wird. Dann folgt analog $(\omega, \eta) \mapsto \|\bar*_{L^*}\eta\|^2 \neq 0$, da $\bar*$ ein Isomorphismus ist.

□

Theorem 4.22 (Serre-Dualität)**.** *Ist X eine kompakte Riemannsche Fläche und $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel, dann gibt es einen $\mathbb{C}$-linearen Isomorphismus*

$$H^1_{\bar\partial}(X, L) \cong H^0_{\bar\partial}(X, \Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*)^*.$$

Beweis. Der Isomorphismus wird durch die nichtausgeartete Paarung aus 4.21 induziert. □

Als Anwendung können wir nun skizzieren, warum das über die Dolbeault-Kohomologie definierte Geschlecht

$$g = \dim H^1_{\bar\partial}(X)$$

einer kompakten Riemannschen Fläche eine topologische Invariante ist. Wenn wir analog zur Konstruktion des $\bar\partial$-Laplace-Operators, den wir für die Dauer dieser Diskussion $\Delta_{\bar\partial}$ nennen, einen $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}$-Laplace-Operator Δ definieren, taucht schnell die Frage auf, ob es zwischen den beiden Operatoren eine Beziehung gibt. Tatsächlich gilt auf einer Riemannschen Fläche $\Delta = 2\Delta_{\bar\partial}$ [Mor07, S.103] und damit insbesondere

$$\ker \Delta \restriction \Omega^k_{\mathbb{C}}(X) = \ker \Delta_{\bar\partial} \restriction \Omega^k_{\mathbb{C}}(X).$$

Benutzt man die Hodge-Zerlegung des $\mathrm{d}_{\mathbb{C}}$-Operators[13], kann man analog zum Fall des $\bar\partial$-Operators zeigen, dass

$$\ker(\Delta : \Omega^k_{\mathbb{C}}(X) \to \Omega^k_{\mathbb{C}}(X)) \cong H^k_{\mathrm{dR}}(X;\mathbb{C}).$$

Unter Verwendung von $\Delta = 2\Delta_{\bar\partial}$ erhält man damit

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}} H^1_{\mathrm{dR}}(X) &= \dim_{\mathbb{C}} H^1_{\mathrm{dR}}(X, \mathbb{C}) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \ker \Delta \restriction \Omega^1_{\mathbb{C}}(X) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \ker \Delta \restriction \bigoplus\nolimits_{p+q=1} \Omega^{p,q}(X) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \bigoplus\nolimits_{p+q=1} \ker \Delta_{\bar\partial} \restriction \Omega^{p,q}(X) \\
&= \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathscr{H}^{1,0}(X) \oplus \mathscr{H}^{0,1}(X)\right) \\
&= 2 \dim_{\mathbb{C}} H^1_{\bar\partial}(X) = 2g,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt den im Beweis von Satz konstruierten Isomorphismus $\mathscr{H}^{0,1}(X) \cong \mathscr{H}^{1,0}(X)$ benutzt haben. Da die de-Rham-Kohomologie homotopie-invariant ist [Lee00, S.277], ist somit auch das Geschlecht g eine topologische Invariante.[14]

Unter Ausnutzung der Serre-Dualität können wir auch eine alternative Formulierung des Riemann-Rochschen Theorems angeben. Wir nennen im Folgenden

$$\mathscr{O}^1_D(U) := \mathscr{O}_D(U, \Lambda^{1,0}T^*X) = \{\omega \in \mathscr{M}^1(U) | (\omega) \geq -D \restriction U\}$$

die meromorphen vielfachen Differentialformen des Divisors $-D$ über einer offenen Menge $U \subseteq X$. Genau wie im Falle meromorpher Funktionen haben

[13] Auch diese folgt aus einer allgemeineren Theorie, siehe [Wel08, S.108 ff.].

[14] Unter Benutzung eines Satzes von de-Rham, welcher die de-Rham-Kohomologie mit der singulären Kohomologie in Verbindung setzt, kann man damit sogar zeigen, dass g dem topologischen Geschlecht entspricht [Lee00, S.300].

wir für zwei äquivalente Divisoren $D, D' \in \mathrm{Div}(X)$ mit $D' - D = (f)$, wobei $f \in \mathscr{M}(X)$, einen Isomorphismus $\mathscr{O}^1_D(U) \cong \mathscr{O}^1_{D'}(U)$ über die Multiplikation mit f.

Satz 4.23. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $L \to X$ ein holomorphes Linienbündel mit zugeordnetem Divisor D. Dann gilt für die $\bar\partial$-Euler-Charakteristik:*

$$\dim H^0_{\bar\partial}(X, L) - \dim H^1_{\bar\partial}(X, L) = \dim \mathscr{O}_D(X) - \dim \mathscr{O}^1_{-D}(X)$$

Beweis. Wir zeigen $H^1_{\bar\partial}(X, L) \cong \mathscr{O}^1_{-D}(X)$. Unter Verwendung der Serre-Dualität und Lemma 2.14 erhalten wir:

$$\begin{aligned} H^1_{\bar\partial}(X, L) &\cong H^0_{\bar\partial}(X, \Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*)^* \\ &\cong H^0_{\bar\partial}(X, \Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*) \\ &= \mathscr{O}(X, \Lambda^{1,0}T^*X \otimes L^*) \\ &\cong \mathscr{O}(X, \Lambda^{1,0}T^*X) \otimes_{\mathscr{O}(X)} \mathscr{O}(X, L^*) \\ &\cong \mathscr{O}^1(X) \otimes_{\mathscr{O}(X)} \mathscr{O}_{-D}(X) \\ &= \mathscr{O}^1_{-D}(X). \end{aligned}$$

Im Beweis von Satz 3.2 haben wir bereits gesehen, dass $H^0_{\bar\partial}(X, L) \cong \mathscr{O}_D(X)$, damit folgt die Behauptung. □

Korollar 4.24. *Für eine kompakte Riemannsche Fläche X ist das Geschlecht g auch gegeben durch $g = \dim \mathscr{O}^1(X)$.*

Beweis. Ein zugeordneter Divisor des trivialen Bündels $X \times \mathbb{C}$ ist der Nulldivisor. Da $\dim H^0_{\bar\partial}(X, X \times \mathbb{C}) = \dim \mathscr{O}(X) = 1$, folgt mit dem vorigen Satz $g = \dim \mathscr{O}^1(X)$. □

Damit können wir eine alternative Version von Theorem 3.1 formulieren.

Theorem 4.25 (Riemann-Roch II)**.** *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $D \in \mathrm{Div}(X)$ ein Divisor. Dann gilt*

$$\dim \mathscr{O}_D(X) - \dim \mathscr{O}^1_{-D}(X) = 1 - g + \deg D$$

Beweis. Sei $L \to X$ ein dem Divisor D gemäß Satz 1.25 zugeordnetes holomorphes Linienbündel. Dann ist $\deg L = \deg D$ und die Behauptung folgt aus Theorem 3.1. □

Literatur

[Bal] Werner Ballmann. Lectures on kähler manifolds. http://www.math.uni-bonn.de/people/hwbllmnn/.

[For77] Otto Forster. *Riemannsche Flächen.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1977.

[GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley and Sons, Inc., 1978.

[Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, 2001.

[Huy05] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry An Introduction.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[KN69] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, volume 2. John Wiley and Sons, Inc., 1969.

[Lam05] Klaus Lamotke. *Riemannsche Flächen.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[Lee00] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* 2000.

[Mad] Zachary Maddock. Dolbeault cohomology.

[Mor07] Andrei Moroianu. *Lectures on Kähler Geometry.* Cambridge University Press, 2007.

[Nar73] Raghavan Narasimhan. *Analysis on Real and Complex Manifolds.* North-Holland Publishing Company, 1973.

[Wel08] Raymond O. Wells. *Differential Analysis on Complex Manifolds.* Springer-Science + Business Media, LLC, 2008.

[Zin10] Aleksey Zinger. Notes on vector bundles, 2010.