Zur Asymptotik des Wärmeleitungskerns auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Oliver Fürst

Geboren am 20. Juni 1992 in Düsseldorf

1. August 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Matthias Lesch

Mathematisches Institut

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Zusammenfassung der Arbeit

In dieser Arbeit wollen wir versuchen, das Verhalten der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf kompakten RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten zu verstehen. Wir werden dazu zunächst Elemente der klassischen Geometrie einführen, welche uns nicht nur die Mittel zur Konstruktion einer asymptotischen Lösung der Wärmeleitungsgleichung liefern, sondern auch, durch die Parallelen zwischen Eigenschaften geodätischer Koordinaten und denen des euklidischen Raumes, uns mit einer gewissen Anschauung ausstatten.
Ferner werden wir mit Methoden der Funktionalanalysis eine Spektralzerlegung des Raumes $L^2(M)$ bezüglich abzählbar vieler Eigenfunktionen des LAPLACE-Operators auf kompakten RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten herleiten.
Durch das Zusammenführen beider Theorien können wir schließlich eine asymptotische Lösung der Wärmeleitungsgleichung konstruieren und sie in Termen geometrischer Größen ausdrücken.
Wir werden uns dabei hauptsächlich an dem Buch „Elliptic operators, topology and asymptotic methods“ von ROE [Roe88, §1, §3, §5, §7] orientieren, jedoch insbesondere näher auf Zusammenhänge und Geodäten eingehen.

1.2 Mathematische Voraussetzungen

In dieser Arbeit werden Elemente der globalen Analysis, sowie der Funktionalanalysis vorausgesetzt, wie sie etwa in [Lee06] (globale Analysis) und [Hir71], beziehungsweise [Rud91] (Funktionalanalysis) dargestellt sind.
Die Sätze dieser Gebiete werden wir in dieser Arbeit nicht beweisen, jedoch wollen wir einige grundlegende Bezeichnungen einführen.
Eine Mannigfaltigkeit M sei hier stets glatt, geschlossen, ein HAUSDORFF-Raum und habe die Dimension n.
Wir sagen eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ ist von der Klasse C^r, falls es für einen Atlas $\left(\phi_\alpha\colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n\right)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, die Funktionen $f\circ\phi_\alpha^{-1}$ für alle $\alpha\in\mathcal{A}$ sind. Eine glatte Funktion $f\in C^\infty(M)$ ist eine Funktion die für alle $r\in\mathbb{N}$ von der Klasse C^r ist.
Eine RIEMANNSCHsche Metrik auf der Mannigfaltigkeit sei mit g bezeichnet und wir verwenden folgende Notationen:

$$\begin{aligned} g\colon TM\times TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g_{ij}(p) &:= g\big|_p\left(\partial_i\big|_p, \partial_j\big|_p\right); \\ G(p) &:= \left(g_{ij}\right)_{i,j=1}^n(p); \\ g^{ij}(p) &:= \left(G^{-1}\right)_{ij}(p); \\ g(p) &:= \det\left(G(p)\right). \end{aligned}$$

Sei nun M orientiert. Es bezeichne $\Lambda^k(T^*M)$ die k-Formen auf M. Sei dann d die CARTAN'sche äußere Ableitung und sei vol_g die Volumenform bezüglich g, also gelte in lokalen Koordinaten (unbahängig von der Wahl dieser):

$$vol_g(p) = \sqrt{g(p)}\cdot \mathrm{d}x^1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x^n.$$

Ist $(\cdot,\cdot)_k$ die duale Paarung auf $\Lambda^k(T^*M)$, so ist der HODGE-$*$-Operator auf $\Lambda^*(T^*M)$ gegeben durch die Zuordnung einer k-Form α zu einer $(n-k)$-Form $*\alpha$, sodass für alle

$(n-k)$-Formen β gilt:

$$(\alpha, \beta) \cdot vol_g = \beta \wedge *\alpha.$$

Der Operator d^* ist dann definiert durch

$$\mathrm{d}^*\alpha = (-1)^{nk+n+1} * \mathrm{d} * \alpha,$$

wobei α eine beliebige k-Form ist. Es gibt ein globales inneres Produkt auf M, das heißt für beliebige Formen α und β des selben Grades k sei

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \beta \rangle_{\Lambda^k(T^*M)} &= \int_M (\alpha, \beta)\, vol_g = \int_M \alpha \wedge *\beta vol_g \\ &= \int_M \beta \wedge *\alpha vol_g.\end{aligned}$$

Dieses innere Produkt ist definiert, sobald mindestens eine der Formen kompakten Träger hat (dies wird für unsere Zwecke genügen, da wir hauptsächlich kompakte Mannigfaltigkeiten betrachten). Der Operator d^* ist zu der äußeren Ableitung formal adjungiert, das heißt für beliebige Formen α von Grad k und β vom Grad $k-1$ gilt, falls die Mannigfaltigkeit M kompakt und orientiert ist, dass

$$\langle \alpha, \mathrm{d}\beta \rangle_{\Lambda^k(T^*M)} = \langle \mathrm{d}^*\alpha, \beta \rangle_{\Lambda^{k-1}(T^*M)}.$$

Diese Aussage folgt mit dem Satz von Stokes.

Der Laplace-Operator Δ auf M für glatte Funktionen definieren wir dann als

$$\Delta f = \mathrm{d}^*\mathrm{d}f,$$

wobei $f \in C^\infty(M)$ eine glatte Funktion ist. Der Laplace-Operator Δ wird somit auf natürliche Weise zu einem positiven, selbstadjunigerten Differentialoperator zweiter Ordnung. Er genügt folgender lokaler Darstellung für eine Karte $\phi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ und einer glatte Funktion f

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

Auf kompakten Mannigfaltigkeiten können wir ebenso eine Fréchet-Topologie auf den glatten Funktionen definieren.

Zunächst sei für eine Funktion $f \in C^r(M)$ die C^r-Norm gegeben durch folgende Definition:

$$\|f\|^2_{C^r(M)} := \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq r} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \partial^\alpha \left(\left(f \cdot \rho_k^{\frac{1}{2}} \right) \circ \phi_k^{-1} \right) \right|^2 \right).$$

Dabei sei $(\phi_k \colon U_k \to \mathbb{R}^n)_{k=1}^m$ ein endlicher Atlas der kompakten Mannigfaltigkeit M und $(\rho_k)_{k=1}^m$ eine zugehörige Zerlegung der 1. Man kann mit Hilfe der Kettenregel und der Kompaktheit von M zeigen, dass diese Normen bis auf Äquivalenz unabhängig von der Wahl des Atlanten und der Zerlegung der 1 ist. Diese Norm wurde so gewählt, damit an einer späteren Stelle dieser Arbeit der Einbettungssatz von Sobolew leicht auf Mannigfaltikeiten übertragen werden kann. Ferner ist der Raum $C^r(M)$ bezüglich dieser Norm ein Banach-Raum, was unmittelbar aus der Wahl endlich vieler Karten und der Tatsache, dass die Räume $C^r(K)$ für eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ Banach-Räume sind. Die C^∞-Fréchet-Topologie auf den glatten Funktionen von M definieren wir dann folgendermaßen:

Eine Folge glatter Funktionen $(f_l)_{l=1}^\infty \subset C^\infty(M)$ konvergiert in $C^\infty(M)$, wenn sie für alle $r \in \mathbb{N}$ bezüglich der Normen $\|\cdot\|_{C^r(M)}$ konvergiert.

2 Zusammenhänge und Geodäten

Das spätere Ziel dieser Arbeit wird es sein, eine asymptotische Enwicklung, ähnlich der Taylorreihe, einer Funktion auf einer Mannigfaltigkeit zu bestimmen. Dazu werden wir sogenannte geodätische Koordinatensysteme und eine geodätische Metrik auf der Mannigfaltigkeit einführen um integrierende Faktoren, analog zur Wärmeleitungsgleichung im euklidischen Raum, konstruieren zu können.
Essentiell hierfür ist die Definition des Zusammenhangs, eine Art Verallgemeinerung der zweiten Ableitung auf Vektorfelder. Gesucht ist also insbesondere eine Abbildung, die zwei Vektorfeldern ein Vektorfeld zuordnet. Allgemeiner kann dies auch auf eine Zuordnung von einem Vektorfeld und einem Schnitt in ein beliebiges Vektorbündel zu einem Schnitt in ein Vektorbündel verallgemeinert werden, da wir die Theorie der Zusammenhänge jedoch in Hinblick auf Geodäten und den damit eng verbundenen Levi-Civita-Zusammenhang entwickeln wollen, beschränken wir uns hier auf das Tangentialbündel.
Wir folgen hierbei im Wesentlichen [Wal89, §2], werden aber auch Ideen aus [Kob63, Ch.I-IV] übernehmen.

2.1 Zusammenhänge

Wir wollen zunächst den Begriff des Zusammenhangs einführen. Diese bilineare Abbildung von Vektorfeldern kann als „Ableitung eines Vektorfeldes bezüglich eines anderen Feldes“ interpretiert werden.

Definition 2.1 (Zusammenhang). *Eine $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung*

$$\nabla\colon C^{\infty}(TM) \times C^{\infty}(TM) \longrightarrow C^{\infty}(TM) \tag{2.1}$$

heißt Zusammenhang, falls für alle Vektorfelder $X, Y \in C^{\infty}(TM)$ und Funktionen $f \in C^{\infty}(M)$ gilt:

$$\nabla_{f\cdot X} = f \cdot \nabla_X Y, \tag{2.2}$$

$$\nabla_X (f \cdot Y) = f \cdot \nabla_X Y + (X.f) \cdot Y. \tag{2.3}$$

Dabei ist $X.f$ die Ableitung von f bezüglich X.

Die Bedingung 2.3 heißt derivativ, da sie sich der Produktregel entlehnt.
Im folgenden Lemma sehen wir, dass auch Zusammenhänge auf bloß lokal gegebenen Vektorfeldern lokal definiert werden können.

Lemma 2.2 (Lokalität von Zusammenhängen). *Sei $U \subset M$ offen, sei $X \in C^{\infty}(TM)$ ein Vektorfeld mit $X|_U = 0$. Dann gilt für einen beliebigen Zusammenhang ∇ und ein beliebiges Vektorfeld $Y \in C^{\infty}(TM)$:*

$$(\nabla_X Y)|_U \equiv 0,$$
$$(\nabla_Y X)|_U \equiv 0.$$

Beweis. Sei $p_0 \in U$ beliebig. Dann gibt es eine offene, echte Teilmenge $V \subset U$, die p_0 enthält. Sei nun $f \in C^{\infty}(M)$ eine Abschneidefunktion mit:

$$f(p) \equiv 1, \text{ falls } p \in M \backslash U,$$
$$f(p) \equiv 0, \text{ falls } p \in V.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} X &= f \cdot X \\ \implies (\nabla_X Y)\big|_{p_0} &= (\nabla_{f \cdot X} Y)\big|_{p_0} \\ &= f(p_0) \cdot (\nabla_X Y)\big|_{p_0} = 0. \end{aligned}$$

Da $p_0 \in U$ beliebig war, gilt somit:

$$(\nabla_X Y)\big|_U \equiv 0.$$

Ferner gilt ebenso:

$$\begin{aligned} (\nabla_Y X)\big|_{p_0} &= (\nabla_Y (f \cdot X))\big|_{p_0} \\ &= f(p_0) \cdot (\nabla_Y X)\big|_{p_0} + (Yf)(p_0) \cdot X\big|_{p_0} \\ &= 0 + 0. \end{aligned}$$

Und somit wiederum:

$$(\nabla_Y X)\big|_U \equiv 0. \qquad \square$$

Dieses Lemma ermöglicht uns die Definition von Zusammenhängen bezüglich Vektorfeldern, die bloß auf offenen Mengen von M gegeben sind:

Bemerkung 2.3. *Seien $X, Y : U \to TM$ lokal auf einer offenen Menge $U \subset M$ gegebene Vektorfelder. Sei $V \subset U$ eine echte Teilmenge und offen, und f eine Abschneidefunktion wie im vorigen Lemma. Dann setzen wir*

$$\begin{aligned} \tilde{X} &:= f \cdot X \in C^\infty(TM), \\ \tilde{Y} &:= f \cdot Y \in C^\infty(TM). \end{aligned}$$

Schließlich definieren wir:

$$(\nabla_X Y)\big|_V := \left(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}\right)\big|_V. \tag{2.4}$$

Die Lokaliät und Biliniearität des Zusammenhangs in beiden Komponenten sichert uns die Wohldefiniertheit zu; die Definition ist unabhängig von der Wahl von f. Da diese Definition für alle offenen Mengen $V \subset U$ gilt, kann sie auf ganz U erweitert werden (man wähle zu einem Punkt aus U eine offene Umgebung V, die echt in U enthalten ist). Wir sprechen dann von einem Zusammenhang auf U.

Dies motiviert zu der Frage, wie sich Zusammenhänge in lokalen Koordinaten darstellen lassen. Diese Darstellung ist eindeutig:

Lemma 2.4. *Sei $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M. Bezeichnen ferner $\partial_i := \frac{\partial}{\partial \phi^i}$ die Basisfelder bezüglich ϕ von TM. Schließlich seien $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M)$ Funktionen auf M (die sogenannten* CHRISTOFFEL*-Symbole des Zusammenhangs). Dann exististiert genau ein Zusammenhang ∇ auf U, sodass gilt:*

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k. \tag{2.5}$$

Beweis.
- Eindeutigkeit: Seien X, Y Vektorfelder auf M. Diese mögen folgende lokale Darstellungen haben:

$$X\big|_U = \sum_{i=1}^{n} X^i \partial_i, \quad Y\big|_U = \sum_{j=1}^{n} Y^j \partial_j.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y\big|_U &= \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_{X^i\partial_i} \left(Y^j \partial_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} X^i \nabla_{\partial_i} \left(Y^j \partial_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(X^i \left(\partial_i Y^j\right) \partial_j + X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j\right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(X^i \left(\partial_i Y^j\right) \partial_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k\right)
\end{aligned}$$

Somit ist ∇ eindeutig auf U festgelegt.

- Existenz: Wir nutzen den im Eindeutigkeitsteil gefundenen Ausdruck für $\nabla_X Y\big|_U$ als Definition. Nun kann man leicht für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $X = \partial_i, Y = \partial_j$ überprüfen:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_{a,b,k=1}^{n} \left(X^a \left(\partial_a Y^b\right) \partial_b + X^a Y^b \Gamma_{ab}^k \partial_k\right) \\
&= \sum_{a,b,k=1}^{n} \left(\delta_{ai} \left(\partial_a \delta_{bj}\right) \partial_b + \delta_{ai}\delta_{bj} \Gamma_{ab}^k \partial_k\right) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \partial_k.
\end{aligned}$$

□

Zusammenhänge sind also lokal auf eineindeutige Weise durch n^3-viele Funktionen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(M)$ festgelegt. Ferner lassen sich die in Lemma 2.2 gemachten Identitätsaussagen für Zusammenänge deutlich verschärfen:

Lemma 2.5 (Identitätsaussagen für Zusammenhänge)**.** *Seien X, Y Vektorfelder auf M.*

- *Gilt $X\big|_p = 0$ für ein $p \in M$, so gilt:*

$$(\nabla_X Y)\big|_p = 0.$$

- *Ist $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ ein glatter Weg mit*

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= p, \\
\dot\gamma(0) &= X\big|_p, \\
\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)\colon Y\big|_{y(t)} &= 0;
\end{aligned}$$

so gilt:

$$(\nabla_X Y)\big|_p = 0.$$

Beweis. Sei $\phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine um p zentrierte Karte. Dann gibt es lokale Darstellungen von X, Y:

$$X\big|_U = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$
$$Y\big|_U = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Somit erhalten wir:

- Da $X\big|_p = 0$ gilt, folgt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$X^i(p) = 0.$$

  Damit gilt aber:

$$\begin{aligned}(\nabla_X Y)\big|_p &= \left(\sum_{i=1}^n \nabla_{X^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}} Y\right)\big|_p \\ &= \sum_{i=1}^n X^i(p) \cdot \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} Y\right)\big|_p \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Zunächst verkleinern wir ϵ gegebenenfalls, sodass $\gamma((-\epsilon, \epsilon))$ vollständig in U enthalten ist. Da für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ die Gleichheit $Y\big|_{\gamma(t)} = 0$ gilt, folgt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$Y^i(\gamma(t)) = 0.$$

  Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}(\nabla_X Y)\big|_p &= \left(\sum_{i=1}^n \nabla_X \left(Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)\big|_p \\ &= \sum_{i=1}^n Y^i(p) \cdot \left(\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\big|_p + \sum_{i=1}^n \left(X.Y^i\right)(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\big|_p.\end{aligned}$$

  Da jedoch γ ein Weg ist mit $\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = X\big|_p$, ergibt sich:

$$(\nabla_X Y)\big|_p = 0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mathrm{d}\left(Y^i(\gamma(s))\right)}{\mathrm{d}s}\right)\big|_{s=0} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\big|_p.$$

  Die Funktionen Y^i sind jedoch auf $\gamma(t)$ gleich 0, also gilt:

$$(\nabla_X Y)\big|_p = 0.$$

□

Wir können mithin den Begriff des Zusammenhangs verallgemeinern:

Bemerkung 2.6. *Sei $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ ein glatter Weg in M, sei $t \in (0,1)$ und $u \in T_{\gamma(t)}M$ ein Vektor. Dann definieren wir:*

$$\nabla_u \dot{\gamma} := (\nabla_X Y)\big|_{\gamma(t)},$$

wobei Y ein beliebiges Vektorfeld auf M ist, sodass es ein $\epsilon > 0$ gibt mit:

$$\forall s \in (t-\epsilon, t+\epsilon) : Y\big|_{\gamma(s)} = \dot{\gamma}(s),$$

und X ein beliebiges Vektorfeld auf M ist, sodass gilt:

$$X\big|_{\gamma(t)} = u.$$

Dass die hier gemachte Definition unabhängig von den vollzogenen Wahlen ist, folgt direkt aus dem vorangegangenen Lemma und der Bilinearität von Zusammmenhängen.

Nun wollen wir uns einem Zusammenhang zuwenden, der besondere Eigenschaften hinsichtlich der RIEMANNschen Metrik auf M besitzt.

Definition und Satz 2.7. *Der* LEVI-CIVITA*-Zusammenhang ist der durch folgende Eigenschaften eindeutig charakterisierte Zusammenhang auf M:*

- *Der* LEVI-CIVITA*-Zusammenhang ist symmetrisch (oder auch torsionsfrei):*

  $$\forall X, Y \in C^\infty(TM) \colon \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y];$$

  dabei ist $[\cdot,\cdot]$ die LIE*-Klammer [Lee06,* LIE*-Brackets, §4].*

- *Der* LEVI-CIVITA*-Zusammenhang ist verträglich mit der* RIEMANN*schen Metrik g auf M:*

  $$\begin{gathered} \forall X, Y^1, Y^2 \in C^\infty(TM) : \\ g\left(\nabla_X Y^1, Y^2\right) + g\left(Y^1, \nabla_X Y^2\right) = X.g\left(Y^1, Y^2\right); \end{gathered}$$

Beweis. Sei $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ eine offene Überdeckung von M
und $(\phi^\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ein Atlas.

- Eindeutigkeit: Wir zeigen die Eindeutigkeit in jeder Karte.
  Dazu wollen wir die CHRISTOFFEL-Symbole von ∇ bezüglich einer der offenen Mengen U_α bestimmen. Seien dazu für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

  $$\begin{aligned} \partial_i &:= \frac{\partial}{\partial \phi^i}, \\ \Gamma_{ij} &:= \left(\Gamma^1_{ij}, \ldots, \Gamma^n_{ij}\right)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

  Seien nun $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ und $X := \partial_i, Y := \partial_j, Z := \partial_k$. Zunächst stellen wir fest, dass X, Y, Z paarweise kommutieren. Weiterhin nutzen wir die Verträglichkeit mit der Metrik und erhalten so:

  $$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= X.g(Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z), \\ g(Y, \nabla_X Z) &= g(Y, \nabla_Z X + 0) \\ &= Z.g(Y, X) - g(\nabla_Z Y, X), \\ g(\nabla_Z Y, X) &= g(\nabla_Y Z + 0, X) \\ &= Y.g(Z, X) - g(Z, \nabla_Y X) \\ &= Y.g(Z, X) - g(\nabla_X Y, Z). \end{aligned}$$

Dabei wurde beim letzten Schritt zusätzlich die Symmetrie von g benutzt. Setzen wir diese Formeln suksessiv ineinander ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_X Y, Z\right) &= X.g\left(Y, Z\right) - Z.g\left(Y, X\right) \\ &\quad + Y.g\left(Z, X\right) - g\left(\nabla_X Y, Z\right) \\ \Longrightarrow g\left(\nabla_X Y, Z\right) &= \frac{1}{2}\left(X.g\left(Y, Z\right) - Z.g\left(Y, X\right) + Y.g\left(Z, X\right)\right) \\ \Longrightarrow \sum_{a=1}^{n} \Gamma_{ij}^{a} g_{ak} &= \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right) \\ \Longrightarrow \left(G \cdot \Gamma_{ij}\right)_k &= \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right) \\ \Longrightarrow \Gamma_{ij} &= \frac{1}{2}\left(G^{-1} \cdot \left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right)_{k=1}^{n}\right) \\ \Longrightarrow \Gamma_{ij}^{k} &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n} g^{ak}\left(\partial_i g_{ja} + \partial_j g_{ia} - \partial_a g_{ij}\right). \end{aligned}$$

Damit sind die CHRISTOFFEL-Symbole von ∇ in U_α eindeutig bestimmt und somit nach Lemma 2.4 auch der Zusammenhang ∇ selbst.

- Existenz:
  Wir benutzen den im Eindeutigkeitsteil gefundenen Ausdruck für ∇ in einer Karte U_α als Definition. Somit gelten die Bedingungen aus 2.7 zumindest für die Basisfelder $X := \partial_i, Y := \partial_j, Z := \partial_k$. Aus der Linearität in Y, Z (gegenüber Multiplikation mit glatten Funktionen) und der Derrivationseigenschaft in X folgen dann aber bereits die Bedingungen 2.7 für beliebige Vektorfelder X, Y, Z. Wegen der Lokalität von Zusammenhängen 2.2, liefert dies auch eine konsistente globale Definition von ∇, da auf dem Schnitt von zwei Kartenumgebungen der so definierte Zusammenhang eindeutig ist.

$\square$

2.2 Geodätische Koordinaten

Nun haben wir genügend Mittel zur Verfügung, um Geodäten zu definieren. Da Geodäten glatte Wege sind, war es notwendig, Zusammenhänge auf die Tangentialabbildungen von Wegen zu verallgemeinern. Die lokale Darstellung des LEVI-CIVITA-Zusammenhangs wird notwendig sein, um die Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen aus dem Gebiet der gewöhnlichen Differentialgleichungen anwenden zu können.

Definition und Satz 2.8 (Geodätengleichung und Exponetialabbildung)**.** *Sei $p_0 \in M$ ein Punkt und $x \in T_{p_0}M$ ein Vektor, so heißt ein glatter Weg*

$$\gamma \colon \mathbb{R} \longrightarrow M$$

Lösung der Geodätengleichung mit Anfangsdaten p_0 und x, falls

$$\begin{aligned} \gamma\left(0\right) &= p_0, \\ \dot{\gamma}\left(0\right) &= x, \\ \textit{für alle } t \in (0,1): \quad \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma} &= 0; \end{aligned}$$

wobei ∇ der LEVI-CIVITA-Zusammenhang auf M ist, gilt.
Es gibt eine offene Umgebung $I \subset \mathbb{R}$ um 0, sodass die Geodätengleichung eine eindeutige

Lösung besitzt.
Ist ferner $\gamma\left(\_\right)$ eine Lösung zu Anfangsdaten p_0 und x, so ist für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ die Kurve $\gamma\left(c\cdot\_\right)$ eine Lösung zu Anfangsdaten p_0 und $c \cdot x$.
Mit Hilfe dieser Aussage, gibt es zu einem festen Punkt p_0 eine offene, sternförmige Umgebung $V \subset T_{p_0}M$, welche 0 enthält, des Tangentialraums an p_0, sodass für alle $x \in V$ eine eindeutige Lösung γ_x der Geodaätengleichung mit Anfangsdaten p_0 und x existiert und $\gamma_x\left(1\right)$ definiert ist.
Die Exponentialabbildung

$$\begin{aligned}\exp_{p_0}\colon V &\longrightarrow M\\ x &\mapsto \gamma_x\left(1\right)\end{aligned}$$

liefert für jedes $x \in T_{p_0}M$ eine Geodäte $p\left(t\right) := \exp_{p_0}\left(t\cdot x\right)$ mit Anfangsdaten p_0 und x.
Die Exponentialabbildung ist ein Diffeomorphismus von $V \subset T_{p_0}M$ zu einer offenen Menge $U \subset M$.
Nach Wahl einer Orthonormalbasis $\left(e_i\right)_{i=1}^n$ von $T_{p_0}M$ bezüglich der Riemann*schen Metrik g, erhalten wir so folgende Abbildungen:*

$$\begin{aligned}\mathrm{cart}\colon \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_{p_0}M\\ x = \left(x^1,\ldots,x^n\right) &\mapsto \sum_{i=1}^n x^i e_i\\ \phi\colon U &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\ \phi\left(p\right) &:= \left(\mathrm{cart}^{-1}\circ\exp_{p_0}^{-1}\right)\left(p\right)\end{aligned}$$

Dabei ist cart *die Zuweisung kartesischer Koordinaten. Somit ist ϕ eine um p_0 zentrierte Karte von M. Wir nennen die Koordinatenfunktionen von ϕ die geodätischen Koordinaten von M um p_0.*

Beweis. (i) Zunächst zur Geodätengleichung: Wir betrachten die Geodätengleichung in lokalen Koordinaten $\left(x^i\right)_{i=1}^n$ bezüglich einer Karte $\psi\colon \tilde{U} \longrightarrow M$ zentriert an p_0. Wir setzen für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$:

$$\gamma^i := \psi^i \circ \gamma.$$

Nun ergibt sich für die Tangentialabbildung von γ in lokaler Darstellung, wenn $f \in C^\infty\left(M\right)$ eine beliebige Funktion ist:

$$\begin{aligned}\dot\gamma|_{\gamma(t)}.f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(f\circ\gamma\right)|_{s=t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(f\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\gamma\right)|_{s=t}\\ &= D\left(f\circ\psi^{-1}\right)|_{\psi(\gamma(t))}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\psi\circ\gamma\right)|_{s=t}\\ &= \sum_{i=1}^n\left(\partial_i f\right)|_{\gamma(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}|_t.\end{aligned}$$

Somit gilt also:

$$\dot\gamma|_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^n\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}|_t\cdot\partial_i|_{\gamma(t)}.$$

Ferner wird es nötig sein $\dot\gamma|_{\gamma(t)}.\left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}|_t\right)$ zu bestimmen:

$$\dot\gamma|_{\gamma(t)}.\left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}|_t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\circ\gamma\right)(u)\right)|_{u=t}.$$

Der Wert von γ^i an $\gamma(u)$ ist jedoch die Ableitung $\left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\right)_{s=u}$ an der Stelle u:

$$\dot{\gamma}\big|_{\gamma(t)} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\Big|_t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=u}\right)\Big|_{u=t} = \frac{\mathrm{d}^2\gamma^i}{\mathrm{d}s^2}\Big|_{s=t}.$$

Wir erhalten somit folgende Gleichung für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_{\dot{\gamma}|_{\gamma(t)}} \dot{\gamma} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_{\left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\big|_{s=t} \cdot \partial_i|_{\gamma(t)}\right)} \left(\frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}s} \cdot \partial_j\right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \cdot \nabla_{\left(\partial_i|_{\gamma(t)}\right)} \partial_j + \dot{\gamma}\big|_{\gamma(t)} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\gamma^k}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t}\right) \cdot \partial_k\big|_{\gamma(t)}\right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}^2\gamma^k}{\mathrm{d}s^2}\Big|_{s=t} \cdot \partial_k\big|_{\gamma(t)} + \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \cdot \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \cdot \partial_k\big|_{\gamma(t)}\right).
\end{aligned}$$

Somit gilt, wegen der linearen Unabhängigkeit der Ableitungen ∂_k für alle $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$0 = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}^2\gamma^k}{\mathrm{d}s^2}\Big|_{s=t} + \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \cdot \left(\Gamma_{ij}^k \circ \psi^{-1}\right)\left(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)\right)\right) \tag{2.6}$$

$$0 = \gamma^k(0) \tag{2.7}$$

$$x^k = \frac{\mathrm{d}\gamma^k}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}. \tag{2.8}$$

Dabei sind $\left(x^k\right)_{k=1}^n$ die Koeffizienten von x in der Basis $(\partial_k)_{k=1}^n$, also:

$$x = \sum_{k=1}^{n} x^k \cdot \partial_k\big|_{p_0}.$$

Wir haben also ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in n Funktionen mit $2n$ Anfangswerten vorliegen. Nach dem Satz von PICARD-LINDELÖF, wie er etwa in [Wal96, Satz VI, §10] dargestellt ist, gibt es dann eine offene Umgebung $I \subset \mathbb{R}$, welche 0 enthält, sodass alle Funktionen γ^k dort existieren und eindeutig sind. Unter ψ^{-1} erhalten wir aus den Komponentenfunktionen eine auf I existierende und eindeutige Lösung γ der Geodätengleichung mit den gegebenen Anfangsdaten.

(ii) Nun zur Isochronie der Geodätengleichung: Wenn wir in die Gleichung 2.6 die Funktionen $\tilde{\gamma}^k(t) := \gamma^k(c \cdot t)$, mit einem beliebigen $c \in \mathbb{R}$, einsetzen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\gamma}^k}{\mathrm{d}s^2}\Big|_{s=t} + \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}^i}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \cdot \frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}^j}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \cdot \left(\Gamma_{ij}^k \circ \psi^{-1}\right)(\tilde{\gamma}(t))\right) \\
=& \sum_{i,j=1}^{n} \left(c^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2\gamma^k}{\mathrm{d}s^2}\Big|_{s=c\cdot t} + c \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=c\cdot t} \cdot c \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=c\cdot t} \cdot \left(\Gamma_{ij}^k \circ \psi^{-1}\right)(\gamma(c \cdot t))\right) \\
=& c^2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}^2\gamma^k}{\mathrm{d}s^2}\Big|_{s=c\cdot t} + \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=c\cdot t} \cdot \frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=c\cdot t} \cdot \left(\Gamma_{ij}^k \circ \psi^{-1}\right)(\gamma(c \cdot t))\right).
\end{aligned}$$

Dies ist aber gerade das c^2-fache der lokalen Geodätengleichung für γ an der Stelle $c \cdot t$ und somit 0.
Für die Anfangsdaten ergibt sich:

$$\gamma (c \cdot \_) (0) = p_0,$$
$$(\gamma (c \cdot \_))^{\cdot}\big|_{p_0} = c \cdot \dot{\gamma}\big|_{p_0} = c \cdot x.$$

Also ist $\gamma (c \cdot \_)$ eine Geodäte zu den Anfangsdaten p_0 und $c \cdot x$.

(iii) Die Abbildung exp ist so definiert, dass für die Kurve p gilt:

$$p(t) = \gamma_{t \cdot x}(1),$$

wobei γ der Geodätengleichung mit Anfangsdaten p_0 und $t \cdot x$ genügt. Ebenfalls wissen wir jedoch, dass diese Gleichung ebenso von der Kurve $\gamma_x (t \cdot \_)$ erfüllt wird, also wegen Eindeutigkeit mit dieser übereinstimmt. Folglich gilt:

$$p(t) = \gamma_x (t \cdot 1).$$

Die Kurve p erfüllt die Geodätengleichung mit Anfangsdaten p_0 und x.

(iv) Schließlich zur lokalen Diffeomorphie: Dies ergibt sich mit:

$$D_0 \left(\exp_{p_0}\right)[y] = \left(\exp_{p_0}(t \cdot y)\right)' \big|_{t=0} = y.$$

Also gilt $D_0 \left(\exp_{p_0}\right) = \mathrm{Id}$, insbesondere ist Id ein linearer Isomorphismus. Folglich kann man den Umkehrsatz auf die Exponentialabbildung in einer Umgebung von 0 anwenden und erhält die gewünschten Eigenschaften.

□

In geodätischen Koordinaten gibt es ein spezielles Feld, welches sehr nützliche Eigenschaften besitzt. Dieses soll nun eingeführt werden.

Definition 2.9. *Sei $\phi \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine um $p_0 \in M$ zentrierte geodätische Karte. Dann heißt das lokal gegebene Vektorfeld R Radialfeld, wenn gilt:*

$$R = \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.9}$$

Nun wollen wir einige interessante Aussagen über R treffen. Diese werden zum Verständnis geodätischer Koordinaten hilfreich sein und sind [Ber92, Proposition 1.27, §1.2] entnommen.

Lemma 2.10. *Sei R das Radialfeld in einer an $p_0 \in M$ zentrierten geodätischen Karte. Sei $x \in T_{p_0}M$ Koordinate von einem Punkt $p_1 \in M$, welcher noch in der geodätischen Karte liegt. Dann gilt:*

(i) *Die Kurve*

$$p \colon [0,1] \longrightarrow M$$
$$t \mapsto \exp_{p_0}(t \cdot x)$$

ist ein glatter Weg von p_0 nach p_1 und erfüllt für $t \in (0,1)$ die Geodätengleichung mit Anfangsdaten p_0 und x.

(ii) *Es gilt für alle $t \in [0,1]$:*

$$R\big|_{p(t)} = t \cdot \dot{p}\big|_{p(t)}.$$

(iii) *Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und seien v_i Vektorfelder gegeben durch die Gleichung:*

$$\begin{aligned} v_i\big|_{p_0} &= \partial_i\big|_{p_0} \\ \nabla_R v_i &= 0. \end{aligned}$$

Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p_0 (die in der Karte enthalten ist), sodass die Felder v_i orthonormale, glatte Schnitte ins Tangentialbündel sind, was bedeutet:

$$g\left(v_i, v_j\right) = \delta_{ij};$$

wobei g die RIEMANN*sche Metrik ist.*

(iv) *Das Radialfeld R ist unter Bildung des* LEVI-CIVITA-*Zusammenhangs invariant:*

$$\nabla_R R = R.$$

Beweis. (i) Diese Behauptung greift das Resultat aus Definition und Satz 2.8 auf.

(ii) Sei $f \in C^\infty(M)$ eine Funktion, dann gilt:

$$\begin{aligned} \dot{p}\big|_{p(t)} . f &= \frac{\mathrm{d}\left(\left(f \circ p\right)(s)\right)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} = \frac{\mathrm{d}\left(\left(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ p\right)(s)\right)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \\ &= D\left(f \circ \phi^{-1}\right)\big|_{\phi(p(t))} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\left(\phi \circ p\right)(s)\right)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i\big|_{p(t)} . f \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\left(\mathrm{cart}_i^{-1} \circ \exp_{p_0}^{-1} \circ \exp_{p_0}\right)(s \cdot x)\right)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i\big|_{p(t)} . f \cdot \frac{\mathrm{d}\left(s \cdot x_i\right)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t} \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i\big|_{p(t)} . f \cdot x_i. \end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich für das Feld R:

$$\begin{aligned} R\big|_{p(t)} &= \sum_{i=1}^n x^i\left(p\left(t\right)\right) \cdot \partial_i\big|_{p(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\mathrm{cart}_i^{-1} \circ \exp_{p_0}^{-1}\right)\left(\exp_{p_0}\left(t \cdot x\right)\right) \cdot \partial_i\big|_{p(t)} \\ &= t \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \partial\big|_{p(t)}. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$R\big|_{p(t)} = t \cdot \dot{p}\big|_{p(t)}.$$

(iii) Zunächst erinnern wir, dass die Basis $(e_i)_{i=1}^n$ orthonormal bezüglich $g\big|_{p_0}$ gewählt wurde. Sei nun

$$\gamma(t) := \exp_{p_0}(t \cdot e_i).$$

Für diese Kurve gilt gerade $\gamma(0) = p_0$ und $\dot{\gamma}(0) = e_i$, wie wir im ersten Punkt des Beweises gesehen haben. Damit gilt nun aber für eine beliebige Funktion $f \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}
e_i.f &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma(t))\,\big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \gamma(t)\right)\big|_{t=0} \\
&= D\left(f \circ \phi^{-1}\right)\big|_{\phi(p_0)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \gamma(t))\,\big|_{t=0} \\
&= \sum_{j=1}^n \partial_j\big|_{p_0}.f \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^i \circ \exp_{p_0}(t \cdot e_i)\right)\big|_{t=0} \\
&= \sum_{j=1}^n \partial_j\big|_{p_0}.f \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{cart}^{-1}(t \cdot e_i)\right)\big|_{t=0} \\
&= \sum_{j=1}^n \partial_j\big|_{p_0}.f \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t \cdot \delta_{ij})\,\big|_{t=0} \\
&= \sum_{j=1}^n \partial_j\big|_{p_0}.f \cdot \delta_{ij} = \partial_i\big|_{p_0}.f.
\end{aligned}$$

Also gilt auch $g\big|_{p_0}\left(\partial_i\big|_{p_0}, \partial_j\big|_{p_0}\right) = \delta_{ij}$.
Nun ist die Differentialgleichung für die Vektorfelder v_i nach Übergang in lokale Koordinaten (die exakte Form dieses Übergangs wollen wir hier nicht angeben, er berechnet sich jedoch völlig analog zu der Geodätengleichung in lokalen Koordinaten) eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung in n Funktionen mit $2n$ Anfangswerten, also ist nach dem Satz von Picard-Lindelöf wieder in einer Umgebung $U \subset M$ um p_0 eine Lösung eindeutig existent.
Sei nun $p_1 \in U$ mit der Koordinate $x \in T_{p_0}M$ ein beliebiger Punkt und sei $\eta(s) := \exp_{p_0}(s \cdot x)$ mit $s \in [0,1]$ die Geodäte die p_0 mit p_1 verbindet. Sei $t \in (0,1)$ und seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(g\big|_{\eta(s)}\left(v_i\big|_{\eta(s)}, v_j\big|_{\eta(s)}\right)\right)\big|_{s=t} \\
&= t \cdot \dot{\eta}\big|_{\eta(t)}.g(v_i, v_j) \\
&= R\big|_{\eta(t)}.g(v_i, v_j) \\
&= g\big|_{\eta(t)}\left(\nabla_{R|_{\eta(t)}} v_i, v_j\right) + g\big|_{\eta(t)}\left(v_i, \nabla_{R|_{\eta(t)}} v_j\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Da t positiv war, ist also die Metrik von v_i und v_j konstant. Folglich gilt $g\big|_{p_1}\left(\partial_i\big|_{p_1}, \partial_j\big|_{p_1}\right) = \delta_{ij}$ und da p_1 in U beliebig gewählt war, gilt die Eigenschaft auf ganz U.

(iv) Sei p_1 ein beliebiger Punkt, der in der geodätischen Karte um p_0 enthalten ist. Wir betrachten nun die bereits im vorigen Teil des Beweises benutze Geodäte $p(t)$, welche p_0 mit p_1 verbindet. Ferner haben wir gesehen, dass $R\big|_{p(t)} = t \cdot \dot{p}\big|_{p(t)}$ gilt. Damit errechnen wir nun:

$$\begin{aligned}
\nabla_{R|_{p(t)}} R &= t \cdot \nabla_{\dot{p}|_{p(t)}} R \\
&= t^2 \cdot \nabla_{\dot{p}|_{p(t)}} \dot{p} + t \cdot \dot{p}\big|_{p(t)} \cdot (p(t) \mapsto t) \cdot \dot{p}\big|_{p(t)} \\
&= 0 + t \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left((p(s) \mapsto s) \circ p(s) \right) \big|_{s=t} \cdot \dot{p}\big|_{p(t)} \\
&= t \cdot 1 \cdot \dot{p}\big|_{p(t)} \\
&= R\big|_{p(t)}.
\end{aligned}$$

Dabei ist die Umkehrabbildung $p(t) \mapsto t$ sinnvoll, da, falls $p_1 \neq p_0$ ist, $x \neq 0$ gilt und somit $\dot{p}\big|_{p(t)} = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i\big|_{p(t)} \neq 0$. Somit ist p ein Diffeomorphismus auf sein Bild und besitzt insbesondere eine glatte Umkehrabbildung. Da dies für jeden beliebigen Punkt in der Kartenumgebung um p_0 gilt, gilt die Invarianz also auf der gesamten Karte.

□

Auf einer zusammenhängenden kompakten RIEMANNschen Mannigfaltigkeit lässt sich eine Metrik definieren. Später werden wir diese im Kontext von Geodäten betrachten.

Definition 2.11 (Metrik der kürzesten Wege)**.** *Sei M eine zusammenhängende kompakte* RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit und seien p_0, p_1 zwei Punkte in M. Sei Ω_{p_0,p_1} die Menge aller stückweise glatten Wege $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$, die p_0 mit p_1 verbinden, dann ist die Funktion* dist *wohldefiniert:*

$$\operatorname{dist}(p_0, p_1) := \inf_{\gamma \in \Omega_{p_0,p_1}} L(\gamma),$$

mit

$$L(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g\big|_{\gamma(t)} \left(\dot{\gamma}\big|_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}\big|_{\gamma(t)} \right)} \mathrm{d}t.$$

Diese Aussage folgt direkt aus der Bedingung, dass M zusammenhängend und kompakt ist. Es können also stets endlich viele Karten gewählt werden, deren Vereinigung zwei beliebige Punkte enthält und noch zusammenhängend ist. Im euklidischen Raum können dann Strecken zwischen Punkten aus den Kartenschnitten gewählte werden. Durch zurückholen jeder dieser Strecken auf der Mannigfaltigkeit durch die Kartenabbildungen und hintereinander ausführen derselben, erhalten wir somit einen stückweise glatten Weg zwischen zwei beliebigen Punkten der Mannigfaltigkeit. Die Abbildung dist ist also wohldefiniert, da jeder Weg auf der kompakten Mannigfaltigkeit endliche Länge besitzt.
Später können wir zeigen, dass es sich bei dieser Abbildung in der Tat um eine Metrik auf M handelt.
Nun können wir die für uns wichtigsten Rechenregeln in geodätischen Koordinaten beweisen. Unter anderem können wir auch dist in geodätischen Koordinaten berechnen. Dazu benötigen wir noch den Satz von EULER über positive, homogene Funktionen in $\mathbb{R}^n$ aus der klassischen Analysis, der leicht durch Differentiation der definierenden Gleichung bewiesen werden kann (beziehungsweise die Umkehrung durch Integration):

Lemma 2.12 (Satz von Euler über positive, homogene Funktionen). *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *f ist positiv homogen vom Grad $k \in \mathbb{R}$, das heißt für alle $\alpha > 0$ und alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ gilt:*

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha^k \cdot f(x).$$

- *Ist R das Radialfeld in $\mathbb{R}^n$, so gelte für alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$R\big|_x.f = k \cdot f(x).$$

Nun kommen wir zu den Rechenregeln für geodätische Koordinaten.

Proposition 2.13 (Rechnen in geodätischen Koordinaten). *Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf M. Seien $\{x^i\}_{i=1}^n$ geodätische Koordinaten auf M zentriert bei $p_0 \in M$. Sei R das radiale Vektorfeld. Dann gelten folgende Aussagen und Formeln:*

(i) *Sei $p_x := \exp_{p_0}(x)$ der Punkt in M, welchem der Koordinatenvektor $x \in \mathbb{R}^n$ entspricht. Dann gilt:*

$$g\big|_{p_x}\left(R\big|_{p_x}, R\big|_{p_x}\right) = |x|^2.$$

(ii) $g(R, \partial_i) = x^i$.

(iii) *Es gilt* $\operatorname{dist}\left(p_0, \exp_{p_0}(x)\right) = |x|$ *und das Minimum wird von einer Geodäte angenommen.*

Beweis. (i) Wir erinnern zunächst aus Lemma 2.10, dass es orthonormale Basisfelder $(v_i)_{i=1}^n$ gibt, welche in p_0 mit $\partial_i\big|_{p_0}$ übereinstimmen und welche der Gleichung $\nabla_R v_i = 0$ genügen. Wir wollen nun $f_i := g(R, v_i)$ bestimmen. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig:

$$R.f_i = g(\nabla_R R, v_i) + g(R, \nabla_R v_i) = g(R, v_i) + 0 = f_i.$$

Nach dem Satz von Euler 2.12 handelt es sich bei f_i also um eine positiv homogene Funktion vom Grad 1, wenn wir sie als Funktion in den Koordinaten auffassen. Ferner sind demnach alle partiellen Ableitungen $\partial_j f_i$ positiv homogen von Grad 0. Sei nun aber $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig, dann gilt wegen der Stetigkeit von $\partial_j f_i$:

$$(\partial_j f_i)(0) = \lim_{n\to\infty} (\partial_j f_i)\left(\frac{x}{n}\right) = (\partial_j f_i)(x).$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen der 0-Homogenität. Also sind die partiellen Ableitungen von f_i allesamt konstant und f_i somit ein Polynom vom Grad 1. Andererseits gilt nach dem Satz von Taylor:

$$v_i\big|_{p_x} = \partial_i\big|_{p_x} + O(|x|).$$

Dabei ist die Landau-Notation komponentenweise bezüglich einer Darstellung des Restvektorfeldes in der Basis $(\partial_i)_{i=1}^n$ zu verstehen. Bestimmt man nun f_i in dieser

Näherung so ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_i(p_x) &= \sum_{j=1}^{n} x^j \cdot g(\partial_j, v_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x^j \cdot g(v_j + O(|x|), v_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x^j \cdot \delta_{ij} + O\left(|x|^2\right) \\ &= x^i + O\left(|x|^2\right). \end{aligned}$$

Da wie vorhin gezeigt f_i jedoch Polynome von Grad 1 sein müssen, folgt schon $f_i = x^i$. Da $(v_i)_{i=1}^n$ Orthonormalbasisfelder sind, lässt sich mithin auch R in ihnen ausdrücken:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{n} a^i \cdot v_i \\ \Longrightarrow x^i &= g(R, v_i) = \sum_{j=1}^{n} a^i \cdot g(v_j, v_i) = a^i. \\ \Longrightarrow R &= \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot v_i. \end{aligned}$$

nun lässt sich $g(R,R)$ einfach bestimmen:

$$g(R,R) = \sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j \cdot g(v_i, v_j) = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2 = |x|^2.$$

(ii) Wir benutzen wieder die Näherung $\partial_i = v_i + O(|x|)$. Eingesetzt in $g(R, \partial_i)$ erhalten wir so:

$$\begin{aligned} g(R,\partial_i) &= \sum_{j=1}^{n} x^j g(\partial_j, \partial_i) = \sum_{j=1}^{n} x^j g(v_j + O(|x|), v_i + O(|x|)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x^j g(v_j + O(|x|), v_i + O(|x|)) = \sum_{j=1}^{n} x^j \left(g(v_j, v_i) + O(|x|)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x^j \delta_{ij} + O\left(|x|^2\right) = x^i + O\left(|x|^2\right). \end{aligned}$$

Wir setzen nun $g(R, \partial_i) = x^i + h_i$, wobei $h_i \in O\left(|x|^2\right)$ noch zu bestimmen ist. Dazu berechnen wir die Wirkung von R:

$$R.g(R,\partial_i) = g(\nabla_R R, \partial_i) + g(R, \nabla_R \partial_i) = g(R, \partial_i) + g(R, \nabla_R \partial_i).$$

Der Kommutator von R mit ∂_i ist $[R, \partial_i] = -\partial_i$, folglich gilt mit der Symmetrie des Levi-Civita-Zusammenhangs:

$$\begin{aligned} g(R, \nabla_R \partial_i) &= g(R, \nabla_{\partial_i} R) + g(R, [R, \partial_i]) \\ &= \frac{1}{2}\partial_i.g(R,R) - g(R, \partial_i). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$R.g(R,\partial_i) = \frac{1}{2}\partial_i.g(R,R) = \frac{1}{2}\partial_i.\sum_{j=1}^{n}\left(x^j\right)^2 = x^i.$$

Somit ergibt sich für die unbekannte Funktion h_i, dass $R.h_i = 0$ gilt. Also ist h_i konstant nach 0-Homogenität und Stetigkeit. Da jedoch $h_i(p_0) = 0$ gilt (da in $O\left(|x|^2\right)$ liegend), gilt schon $h_i = 0$ und somit $g(R,\partial_i) = x^i$.

(iii) Im Folgenden wollen wir die Familie von lokalen Vektorfeldern $Y_{ij} := x^i\partial_j - x^j\partial_i$ betrachten. Zunächst bemerken wir, dass diese Familie in jeder Faser T_pM mit $p \neq p_0$ das orthogonale Komplement $R|_p^{\perp}$ von R aufspannt. Dies gilt, denn für einen von p_0 verschiedenen Punkt p mit Koordinatenvektor $x \neq 0$ gibt es ein $k \in \{1,\dots,n\}$ mit Koordinate $x^k \neq 0$. Dann sind jedoch schon die $n-1$ Vektorfelder Y_{kj} mit $j \neq k$ linear unabhängig. Somit ist also der Spann aller Felder Y_{ij} in allen Punkten mit Koordinaten $x \neq 0$ mindestens $(n-1)$-dimensional. Andererseits gilt für $i,j \in \{1,\dots,n\}$ beliebig:

$$\begin{aligned} g(R,Y_{ij}) &= g\left(R, x^i\partial_j - x^j\partial_i\right) = x^i g(R,\partial_j) - x^j g(R,\partial_i) \\ &= x^i x^j - x^j x^i = 0. \end{aligned}$$

Folglich ist der Spann ein Unterraum des $(n-1)$-dimensionalen Raums $R|_p^{\perp}$ und aus Dimensionsgründen mit diesem identisch. Ist nun $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M$ ein beliebiger glatter Weg der p_0 mit einem Punkt p_1 verbindet und dessen Bild noch ganz in der geodätischen Karte um p_0 enthalten ist, so lässt sich jeder Tangentialvektor $\dot{\gamma}|_{\gamma(t)}$ eindeutig als die Summe eines Vielfachen $\tilde{f}(\gamma(t))$ des Vektors $R|_{\gamma(t)}$ und eines Vektors $Y|_{\gamma(t)}$ aus dem Spann der Vektorfamilie $\left(Y_{ij}|_{\gamma(t)}\right)_{i,j=1}^{n}$ schreiben. Es gilt also:

$$\dot{\gamma}|_{\gamma(t)} = \tilde{f}(\gamma(t))\, R|_{\gamma(t)} + Y|_{\gamma(t)}.$$

Besitzt nun $\gamma(t)$ den Koordinatenvektor $x(t)$, dann sei $f(x(t)) := \tilde{f}(\gamma(t))$. Damit ergibt sich:

$$g(\dot{\gamma},\dot{\gamma}) = f^2(x)\, g(R,R) + 0 + 0 + g(Y,Y) \geq f^2(x)\, |x|^2.$$

Dies gilt, da R orthogonal zu Y ist und g positiv definit ist. Andererseits gilt:

$$\dot{\gamma}|_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^{n} p^i(t)\, \partial_i|_{\gamma(t)},$$

mit den Koeffizientenfunktionen $p^i(t) := \frac{\mathrm{d}\left(x^i(\gamma(s))\right)}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=t}$. Sei nun $k \in \{1,\dots,n\}$, sodass $x^k(\gamma(t)) \neq 0$ gilt (dieses existiert wegen der Injektivität von γ). Dann wird der Raum $R|_{\gamma(t)}^{\perp}$ bereits von den Vektoren $(V_{kj})_{j\neq k}$ aufgespannt und wir erhalten die Darstellung:

$$\dot{\gamma}|_{\gamma(t)} = \sum_{i=1}^{n} f(t)\, x^i(\gamma(t))\, \partial_i|_{\gamma(t)} + \sum_{i=1, i\neq k}^{n} y_{ki}(t) \cdot \left(x^k \partial_i|_{\gamma(t)} - x^i \partial_k|_{\gamma(t)}\right).$$

Somit gilt nach Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} p^k(t) &= f(t) \cdot x^k(\gamma(t)) - \sum_{j \neq k}^{n} y_{kj}(t) \cdot x^j(\gamma(t)), \\ \forall i \neq k: \quad p^i(t) &= f(t) \cdot x^i(\gamma(t)) + y_{ki}(t) \cdot x^k(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Nun können wir einen Ausdruck bestimmen, der sich als nützlich erweisen wird:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \left(x^i \circ \gamma\right)(t) \cdot p^i(t) \\ =& f(t) \cdot \left(x^k(\gamma(t))\right)^2 - \sum_{i=1, i \neq k}^{n} y_{ki}(t) \cdot x^i(\gamma(t)) \cdot x^k(\gamma(t)) \\ &+ \sum_{i=1, i \neq k}^{n} \left(f(t) \cdot \left(x^i(\gamma(t))\right)^2 + y_{ki}(t) \cdot x^k(\gamma(t)) \cdot x^i(\gamma(t))\right) \\ =& f(t) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x^i(\gamma(t))\right)^2 \\ =& f(t) \cdot |x(t)|^2. \end{aligned}$$

Andererseits berechnen wir:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{d}\,|x(t)|}{\mathrm{d}t}\right| &= \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x^i \circ \gamma\right)^2(t)}\right| \\ &= \left|\frac{1}{|x(t)|} \sum_{i=1}^{n} \left(x^i \circ \gamma\right)(t) \cdot p^i(t)\right| \\ &= \left|\frac{f(t) \cdot |x(t)|^2}{|x(t)|}\right| \\ &= |f(t)| \cdot |x(t)|. \end{aligned}$$

Somit gilt insgesamt:

$$g\big|_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}\big|_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}\big|_{\gamma(t)}\right) \geq f^2(t) \cdot |x(t)|^2 = \left|\frac{\mathrm{d}\,|x(t)|}{\mathrm{d}t}\right|^2$$

Nun können wir die Länge der Kurve γ abschätzen:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g\big|_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}\big|_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}\big|_{\gamma(t)}\right)}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \left|\frac{\mathrm{d}\,|x(t)|}{\mathrm{d}t}\right| \mathrm{d}t \geq |x(1) - x(0)| = |x(1)|\,.$$

Damit folgt also für die Abbildung dist von einem Tupel bestehend aus p_0 und einem Punkt $p_x = \exp_{p_0}(x)$ mit Koordinatenvektor x:

$$\operatorname{dist}(p_0, p_x) \geq |x(1)| = |x|\,.$$

Andererseits gilt für die Geodäte $p(t) = \exp_{p_0}(t \cdot x)$, welche p_0 mit p_x verbindet, dass:

$$\begin{aligned} &\dot{p}\big|_{p(t)} = \frac{1}{t} R\big|_{p(t)} \\ \Rightarrow\ &L(p) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{t^2} g\big|_{p(t)}\left(R\big|_{p(t)}, R\big|_{p(t)}\right)}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{\frac{|x(t)|^2}{t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{\frac{t^2\,|x|^2}{t^2}}\mathrm{d}t = |x|. \end{aligned}$$

Daher wird die untere Schranke der Abbildung dist von einem Tupel, bestehend aus p_0 und p_x, von einer Geodäte angenommen.

□

Korollar 2.14. *Die Abbildung* dist *ist eine Metrik auf* M*.*

Beweis. Die Symmetrie und die Positivität von dist ist klar, da umorientierte Wege gleiche Längen L haben und Längen positiv sind. Es gilt, dass stückweise glatte Wege , wobei der Endpunkt eines Weges der Anfangspunkt des Anderen ist, durch Verknüpfung (sie werden hintereinander durchlaufen) wieder einen stückweise glatten Weg bilden, der als Länge die Summe der Längen hat. Wir erhalten so für ein $\epsilon > 0$:

$$\operatorname{dist}(p_1, p_3) \leq L(\gamma_1 \circ \gamma_2) \leq \operatorname{dist}(p_1, p_2) + \epsilon + \operatorname{dist}(p_2, p_2) + \epsilon.$$

Mit $\epsilon \to 0$ folgt dann die Dreiecksungleichung. Zur Definitheit betrachten wir nun Folgendes: Seien $p \neq p'$ Punkte in M . Dann gibt es eine offene Umgebung U von p die p' nicht enthält (M ist ein Hausdorff-Raum). Sei weiter U' eine um p zentrierte geodätische Karte. Dann gibt es ein $r > 0$, sodass der Abschluss der Menge $V := \{q_x \in U' : \quad |x| < r\}$ in $U \cap U'$ enthalten ist. Ist nun γ ein Weg, der p mit p' verbindet, so kann dieser Weg aufgeteilt werden in einen Weg γ_1, der von p zu einem Randpunkt von V verläuft und einen übrigen Weg. Für den Weg in V gilt aber nach Proposition 2.13 die Abschätzung $L(\gamma_1) \geq r$ und somit auch $L(\gamma) \geq r$. Da der Weg γ beliebig war, gilt die Ungleichung auch für dist und folglich die Definitheit der Metrik. □

Bemerkung 2.15. *Mit einem zu dem Beweis der Definitheit analogen Argument kann man ebenso zeigen, dass die Bedingung „stückweise“ für die Wege zwischen zwei Punkten in der Definition von* dist*, auch weggelassen werden kann; denn kürzeste Wege sind lokal Geodäten und diese sind glatt.*

Korollar 2.16. *Es gilt folgende Identität für geodätische Koordinaten:*

$$\sum_{j=1}^{n} x^j g^{ij}(x) = x^i.$$

Beweis. Aus Proposition 2.13 ergibt sich:

$$x^j = \sum_{k=1}^{n} x^k g_{kj}(x).$$

Eingesetzt ergibt sich also:

$$\sum_{j=1}^{n} x^j g^{ij}(x) = \sum_{j,k=1}^{n} x^k g_{kj}(x) g^{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \delta_{ki} = x^i.$$ □

Schließlich wollen wir noch eine Taylor-Entwicklung der Riemannschen Metrik g in geodätischen Koordinaten um den Ursprung angeben. Die Berechnung derselben erfordert keine weiteren Kenntnisse über geodätische Koordinaten, wir wollen die Rechnung angesichts ihrer Länge daher hier aussparen und lediglich das Ergebnis präsentieren. Die vollständige Rechnung ist in [Roe88, Proposition 1.14, §1] ausgeführt.

Proposition 2.17 (TAYLOR-Entwicklung der RIEMANNschen Metrik)**.** *Sei $\phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ eine geodätische Karte von M, die an einem Punkt $p \in M$ zentriert ist. Ist x der Koordinatenvektor eines Punktes in U und g die* RIEMANN*sche Metrik auf M, so gilt für $i, j \in \{1, \dots, n\}$:*

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} \sum_{k,l=1}^{n} R_{iklj}(0) \cdot x^k x^l + O\left(|x|^3\right).$$

Dabei sei R_{iklj} folgendermaßen definiert:

$$R_{iklj} := \sum_{a=1}^{n} g_{ia} \cdot \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^a}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{lk}^a}{\partial x^j} + \sum_{m=1}^{n} \left(\Gamma_{jk}^m \cdot \Gamma_{lm}^a - \Gamma_{lk}^m \cdot \Gamma_{jm}^a \right) \right).$$

3 Analysis des Laplace-Operators

Nun wollen wir uns dem LAPLACE-Operator auf kompakten RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten zuwenden. Das Ziel dieses Kapitels ist es, eine Spektralzerlegung des Laplace-Operators Δ zu finden und so neue Operatoren, wie etwa $\exp(-t\Delta)$, definieren zu können. Diese werden sich als essentiell zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung erweisen.
Zunächst ist eine Definition der SOBOLEW-Räume auf kompakten RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten zu finden und die Übertragung der Einbettungssätze aus dem euklidischen Raum auf solche Mannigfaltigkeiten herzuleiten. Wir werden dazu noch einmal die euklidische Definition der SOBOLEW-Räume und die erwähnten Einbettungssätze ohne Beweis erinnern. Diese kann man etwa in [Eva10, Theorem 6, §5.6.3] und [Eva10, Theorem 1, §5.7] finden. Im Wesentlichen orientiert sich dieses Kapitel an dem Vorgehen von ROE in [Roe88, §3], wir betrachten anstatt des DIRAC-Operators jedoch den LAPLACE-Operator, der einige Veränderungen motiviert.
Andere Ansätze zur Analysis des LAPLACE-Operators, die auf der Theorie von Pseudodifferentialoperatoren basieren, können in [Shu01] oder [Gri94] gefunden werden.

Definition 3.1 (SOBOLEW-Raum)**.** *Sei V eine beschränke, offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.*

- *Die* SOBOLEW-*k-Norm $\|\cdot\|_{W^k(V)}$ ist für eine Funktion $f \in C^\infty(V)$ gegeben durch:*

$$\|f\|_{W^k(V)} := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \le k} \|\partial_\alpha f\|_{L^2(V)}. \tag{3.1}$$

- *Der* SOBOLEW-*k-Raum $W^k(V)$ sei die Vervollständigung von $C_c^\infty(V)$ bezüglich der* SOBOLEW-*k-Norm $\|\cdot\|_{W^k(V)}$.*

Bemerkung 3.2. *Der Raum $C_c^k(V)$ der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger kann stetig in $W^k(V)$ eingebettet werden. Wenn im Weiteren eine Funktion als Element eines* SOBOLEW-*Raums bezeichnet wird, so ist dies im Sinne dieser Einbettung zu verstehen.*

Bemerkung 3.3. *Ebenfalls folgt direkt aus der Definition, dass Multiplikation mit einer Funktion aus $C_c^\infty(V)$ als beschränkter Operator auf jedem* SOBOLEW-*k-Raum agiert. Ferner agiert jeder lineare Differentialoperator der Ordnung l beschränkt von $W^k(V)$ nach $W^{k-l}(V)$.*

Proposition 3.4 (SOBOLEW-Einbettungssatz). *Für jede ganze Zahl $p > n/2$ und jede beschränkte, offene Teilmenge V des $\mathbb{R}^n$, ist der Raum $W^{k+p}(V)$ stetig in $C^k(V)$ eingebettet.*

Proposition 3.5 (RELLICH-Einbettungssatz). *Sei V offen und beschränkt in $\mathbb{R}^n$. Sei k eine natürliche Zahl: Dann ist der Inklusionsoperator*

$$\mathrm{Id}\colon W^k(V) \hookrightarrow L^2(V) \tag{3.2}$$

kompakt.

Außerdem gilt die GÅRDING-Ungleichung für elliptische Operatoren [Eva10, Theorem 1, §6.3.1].

Proposition 3.6 (GÅRDING-Ungleichung). *Sei U eine offene beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und sei V eine relativ kompakte Teilmenge in U. Ist L ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung und $u \in C_c^\infty(U)$ eine Funktion, dann gibt es eine von u unabhängige Konstante C, sodass folgende Abschätzung gilt:*

$$\|u\|_{W^2(V)} \leq C\left(\|u\|_{L^2(U)} + \|Lu\|_{L^2(U)}\right). \tag{3.3}$$

Korollar 3.7. *Suksessives Einsetzen der GÅRDING-Ungleichung in sich selbst liefert für $u \in C_c^\infty(U)$ die Abschätzung*

$$\|u\|_{W^{2k}(U)} \leq \tilde{C} \cdot \left(\sum_{l=0}^{k} \left\|L^k u\right\|_{L^2(U)}\right). \tag{3.4}$$

Wir bemerken zudem, dass der LAPLACE-Operator Δ in lokaler Darstellung ein elliptischer Operator ist.
Im folgenden betrachten wir komplexwertige Funktionen auf M und werden sie weiterhin mit $C^\infty(M)$ bezeichnen. Diese Bezeichnung ist dadurch gerechtfertigt, dass wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ auffassen (also keine komplexe Differenzierbarkeit!). Dann können wir folgendes komplexes Skalarprodukt definieren:

Definition und Satz 3.8 (Globale SOBOLEW-k-Räume). *Seien $u, v \in C^\infty(M)$ komplexwertige Funktionen. Dann definieren wir das SOBOLEW-k-Skalarprodukt auf $C^\infty(M)$ vermöge:*

$$\langle u, v\rangle_{H^k(M)} := \sum_{l=0}^{k} \int_M \overline{u} \cdot \left(\Delta^l v\right) vol_g. \tag{3.5}$$

Wir nennen die Vervollständigung von $C^\infty(M)$ bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^k(M)}$ den SOBOLEW-k-Raum und bezeichnen ihn mit $H^k(M)$. Dieser Raum ist somit nach Konstruktion insbesondere ein HILBERT-Raum.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^k(M)}$ positiv definit, hermitesch und sesquilinear ist.

- Sesquilinearität: Dies ist klar, da die komplexe Mulitplikation sesquilinear ist und somit der Integrand.

- Hermitesch: Wir rechnen für zwei komplexwertige Funktionen $u, v \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}\int_M \overline{u} \cdot \left(\Delta^l v\right) vol_g &= \int_M \overline{u \cdot (\Delta^l \overline{v})} vol_g \\ &= \int_M \overline{\overline{v} \cdot (\Delta^l u)} vol_g.\end{aligned}$$

  Bilden wir nun die Summe über l, so folgt die Aussage.

- Positiv definit: Sei $l = 2m$ zunächst gerade, dann gilt:

$$\int_M \overline{u} \cdot \left(\Delta^l u\right) vol_g = \int_M \overline{(\Delta^m u)} \cdot (\Delta^m u)\, vol_g.$$

  Dieser Ausdruck ist sicherlich nichtnegativ. Sei nun $l = 2m+1$ ungerade:

$$\int_M \overline{u} \cdot \left(\Delta^l u\right) vol_g = \int_M \left((\mathrm{d}\Delta^m u), (\mathrm{d}\Delta^m u)\right)_{\Lambda^1(T^*M)} vol_g.$$

  Dieser Ausdruck ist ebenso nichtnegativ. Es bleibt also die Definitheit zu zeigen, wozu wir den den 0-ten Summanden betrachten. Dies ist aber gerade die L^2-Norm auf M zum Quadrat. Diese ist für $C^\infty(M)$ definit. Da alle Summanden nichtnegativ sind, folgt somit die Definitheit der Summe.

□

Die iterierte Gårding-Ungleichung 3.7 sichert uns nun zu, dass wir die Einbettungssätze von Sobolew und Rellich (zumindest für gerade $k = 2m$) auf die Sobolew-k-Räume $H^k(M)$ übertragen können. Die dazugehörige Rechnung wollen wir nun nicht ausführen, im Wesentlichen basiert sie aber auf der Wahl lokaler Koordinaten zu endlich vielen Karten von M (dies ist möglich, da M kompakt ist) und eine verträgliche Wahl der Normen auf $C^r(M)$, wie sie in der Einleitung dieser Arbeit eingeführt wurde. Eine ähnliche, kartenabhänige Definition der Sobolew-k-Räume auf M kann in [Roe88, Definition 3.12, §3] gefunden werden.
Wir bemerken ferner, dass die von uns gewählte Sobolew-k-Norm eine globale Gårding-Ungleichung ermöglicht:

Proposition 3.9. *Ist $u \in C^\infty(M)$ eine Funktion, so gilt für $k \geq 0$ und eine von k abhängige Konstante C_k folgende Ungleichung:*

$$\|u\|_{H^{k+2}(M)} \leq C_k \cdot \left(\|u\|_{H^k(M)} + \|\Delta u\|_{H^{k+2}(M)}\right). \tag{3.6}$$

Beweis. Für $k = 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^2(M)} &= \langle u, u\rangle_{L^2(M)} + \langle u, \Delta u\rangle_{L^2(M)} + \langle \Delta u, \Delta u\rangle_{L^2(M)} \\ &\leq \|u\|^2_{L^2(M)} + 2\|u\|_{L^2(M)} \cdot \|\Delta u\|_{L^2(M)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(M)} \\ &= \left(\|u\|_{L^2(M)} + \|\Delta u\|_{L^2(M)}\right)^2.\end{aligned}$$

Hier wurde die Cauchy-Ungleichung verwendet. Für $k \geq 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^{k+2}(M)} &= \|u\|^2_{H^k(M)} + \left\langle u, \Delta^{k+1} u\right\rangle_{L^2(M)} + \left\langle u, \Delta^{k+2} u\right\rangle_{L^2(M)} \\ &= \|u\|^2_{H^k(M)} + \left\langle \Delta u, \Delta^{k-1}(\Delta u)\right\rangle_{L^2(M)} + \left\langle \Delta u, \Delta^{k}(\Delta u)\right\rangle_{L^2(M)} \\ &\leq 2\|u\|^2_{H^k(M)} + 2\|\Delta u\|^2_{H^k(M)} \\ &\leq 2\left(\|u\|_{H^k(M)} + \|\Delta u\|_{H^{k+2}(M)}\right)^2.\end{aligned}$$

□

Nun wollen wir uns dem LAPLACE-Operator Δ genauer zuwenden. Wir bemerken zunächst, dass Δ auf einer dichten Teilmenge, die wir die Definitionsbereich $\operatorname{dom}(\Delta)$ nennen wollen, des HILBERT-Raumes $L^2(M)$ definiert ist. Der Graph G von Δ ist dann definiert als:

$$G := \left\{(u, \Delta u) \in L^2(M) \oplus L^2(M) \colon u \in \operatorname{dom}(\Delta)\right\} \tag{3.7}$$

Lemma 3.10. *Der Abschluss des Graphen G in $L^2(M) \oplus L^2(M)$ ist selbst wieder ein Graph.*

Beweis. Angenommen dies wäre nicht der Fall. Dann liegt wegen der Dichtheit von $\operatorname{dom}(\Delta)$ ein Punkt der Form $(0, v)$ in der Menge $\overline{G}$, wobei $v \neq 0$ ist. Dies bedeutet, dass es eine Folge von glatten Funktionen mit $u_j \to 0$ und $\Delta u_j \to v$ gibt, wobei die Konvergenz in $L^2(M)$ vorliegt. Aber dann gilt für jede glatte Funktion $w \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u_j, w\rangle_{L^2(M)} &\overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \langle v, w\rangle_{L^2(M)}, \\
\langle u_j, \Delta w\rangle_{L^2(M)} &\overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Wegen der Selbstadjungiertheit von Δ für glatte Funktionen folgt dann aber bereits $\langle v, w\rangle_{L^2(M)} = 0$, da der Grenzwert eindeutig ist. Da die Funktion w beliebig gewählt war, folgt mithin $v = 0$ und damit der Widerspruch. $\square$

Da der Abschluss $\overline{G}$ des Graphen von Δ nun wieder ein Graph ist, definiert er somit einen eindeutig bestimmten linearen Operator $\overline{\Delta}$, dessen Definitionsbereich noch zu bestimmen ist. Diese ergibt sich aber schlicht aus der Bedingung des Abschlusses; die Definitionsbereich $\operatorname{dom}\left(\overline{\Delta}\right)$ ist die Menge aller Elemente $u \in L^2(M)$, sodass es eine Folge glatter Funktionen $(u_j) \subset C^\infty(M)$ gibt, die in $L^2(M)$ gegen u konvergiert und sodass ebenso die Folge (Δu_j) in $L^2(M)$ konvergiert. Die GÅRDING-Ungleichung auf M 3.9 stellt aber sicher, dass diese Menge genau der Raum $H^2(M)$ ist.
Mit Hilfe des Konzepts FRIEDRICH'scher Glätter, welches in [Roe88, Definition 3.19, 3.21, §3] ausgeführt ist, kann ferner gezeigt werden, dass schwache Lösungen bezüglich des LAPLACE-Operators tatsächlich starke Lösungen sind, das heißt:

Proposition 3.11. *Sei $k \geq 0$ und seien $u, v \in H^k(M)$. Angenommen es gilt $\Delta u = v$ im schwachen Sinn, das heißt für alle glatten Funktionen $w \in C^\infty(M)$ gilt:*

$$\langle u, \Delta w\rangle_{L^2(M)} = \langle v, w\rangle_{L^2(M)}.$$

Dann ist $u \in H^{k+2}(M)$ und es gilt $\Delta u = v$ im starken Sinn, das heißt $\overline{\Delta} u = v$.

Diese Aussage erlaubt uns folgende Zerlegung des Raumes $L^2(M) \oplus L^2(M)$:

Lemma 3.12. *Sei G der Graph von Δ und sei die Abbildung $J \colon L^2(M) \oplus L^2(M) \to L^2(M) \oplus L^2(M)$ gegeben durch $(u, v) \mapsto (-v, u)$. Dann ist folgende orthogonale Zerlegung gültig:*

$$L^2(M) \oplus L^2(M) = \overline{G} \oplus J\overline{G}.$$

Beweis. Sei dazu $(u, v) \in \overline{G}^\perp$. Dann gilt für alle glatten Funktionen $w \in C^\infty(M)$:

$$\langle (u, v), (w, \Delta w)\rangle_{L^2(M)\oplus L^2(M)} = 0,$$

also

$$\langle u, w \rangle_{L^2(M)} + \langle v, \Delta w \rangle_{L^2(M)} = 0.$$

Aber diese Gleichung bedeutet genau, dass $\Delta v = -u$ im schwachen Sinn gilt. Nach Proposition 3.11 gilt dann aber, dass v in $H^2(M)$ enthalten ist und $\overline{\Delta} v = -u$ gilt. Also gilt $(-v, u) \in \overline{G}$ und somit $(u, v) \in J\overline{G}$. □

Wir können somit einen Operator Q wie folgt definieren: Für jedes Element $u \in L^2(M)$ sei der Punkt $\left(Qu, \overline{\Delta} Qu\right)$ die orthogonale Projektion des Punktes $(u, 0)$ auf $\overline{G}$ in $L^2(M) \oplus L^2(M)$. Da die Definitionsbereich dom $\left(\overline{\Delta}\right)$ dem Raum $H^2(M)$ entspricht, gilt somit $Qu \in H^2(M)$. Ferner gilt nach dem vorangegangenen Lemma, dass es ein Element $v \in H^2(M)$ gibt, sodass folgende Gleichheit gilt:

$$(u, 0) = \left(Qu, \overline{\Delta} Qu\right) + \left(-\overline{\Delta} v, v\right).$$

Somit gilt

$$u = Qu - \overline{\Delta} v, \quad v = -\overline{\Delta} Qu.$$

Damit gilt schließlich

$$u = \left(\mathrm{Id} + \overline{\Delta}^2\right) Qu.$$

Dabei gilt, wegen Proposition 3.11 und $v = -\overline{\Delta} Qu$, dass der Bildpunkt Qu in $H^4(M)$ enthalten sein muss. Wir wollen nun zeigen, dass Q ein beschränkter Operator von $L^2(M)$ nach $H^4(M)$ ist. Dazu benutzen wir, dass die Projektionsabbildung stets eine Operatornorm kleiner oder gleich 1 besitzt. Folglich gilt die Abschätzung:

$$\|Qu\|^2_{L^2(M)} + \left\|\overline{\Delta} Qu\right\|^2_{L^2(M)} \leq 1 \cdot \|u\|^2_{L^2(M)}.$$

nach der GÅRDING-Ungleichung gilt aber zusätzlich (nach Quadrieren und Anwenden der Ungleichung $|ab| \leq 1/2\,(a^2 + b^2)$):

$$\begin{aligned} \|Qu\|^2_{H^4(M)} &\leq C \left(\|Qu\|^2_{L^2(M)} + \left\|\overline{\Delta} Qu\right\|^2_{L^2(M)} + \left\|\overline{\Delta}^2 Qu\right\|^2_{L^2(M)} \right) \\ &= C \cdot \left(\|u\|^2_{L^2(M)} + \|u - Qu\|^2_{L^2(M)} \right) \\ &\leq \tilde{C} \, \|u\|^2_{L^2(M)}. \end{aligned}$$

Wenn wir nun aber den Operator Q mit dem Inklusionsoperator $\mathrm{Id}\colon H^4(M) \hookrightarrow L^2(M)$ verknüpfen, erhalten wir nach dem Einbettungssatz von RELLICH eine kompakte Abbildung. Fassen wir also Q als Operator des Raumes $L^2(M)$ auf sich selbst auf, so ist dieser Operator kompakt, selbstadjungiert (da Δ selbstadjungiert ist) und injektiv. Für Operatoren dieses Typs gibt es jedoch ein Spektraltheorem, wie es etwa in [Hir71, §7.26, Satz 26.3, Satz 26.5] dargestellt ist, sodass folgendes Resultat gilt:

Satz 3.13. *Es gibt eine Zerlegung des Raumes $L^2(M)$ in die direkte Summe abzählbar vieler, je paarweise orthogonaler Räume H_λ. Jeder Raum H_λ ist von endlicher Dimension, besteht aus glatten Funktionen und ist ein Eigenraum von Δ zum Eigenwert λ. Die Eigenwerte von Δ bilden eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{R}^+$.*

Beweis. Wie wir festgesellt haben, ist der Operator Q als Abbildung von $L^2(M)$ in sich selbst ein selbsadjungierter, kompakter und injektiver Operator. Da $L^2(M)$ ein HILBERT-Raum ist, kann dieser, nach dem Spektraltheorem für solche Operatoren, in eine abzählbare, direkte Summe paarweise orthogonaler und endlichdimensionaler Eigenräume des Operators Q, dessen Eigenwerte (sämtlich von 0 verschieden) eine Nullfolge bilden, zerlegt werden. Jeder Eigenraum besteht aus Elementen des Raumes $H^4(M)$, da $\operatorname{im}(Q) \subseteq H^4(M)$ gilt.
Ferner gilt $\mathrm{Id} = \left(\mathrm{Id} + \overline{\Delta}^2\right) Q$, also ist ein Eigenvektor von Q mit Eigenwert ρ ein Eigenvektor zu $\overline{\Delta}^2$ mit Eigenwert $(1-\rho)/\rho$. Also kann $L^2(M)$ in eine abzählbare, direkte Summe paarweise orthogonaler und endlichdimensionaler Eigenräume des Operators $\overline{\Delta}^2$ zerlegt werden, mit diskreten Eigenwerten, die gegen ∞ laufen. Diese Eigenwerte sind sämtlich positiv, da $\overline{\Delta}^2$ ein positiver Operator ist.
Ist nun V ein endlichdimensionaler Eigenraum von $\overline{\Delta}^2$ zum Eigenwert λ^2, so gilt sicherlich $V = \lambda \cdot V = \left(\lambda\mathrm{Id} + \overline{\Delta}\right) V \oplus \left(\lambda\mathrm{Id} - \overline{\Delta}\right) V$. Ist nun $u = \lambda v + \overline{\Delta} v \in \left(\lambda\mathrm{Id} + \overline{\Delta}\right) V$ ein Vektor, so gilt:

$$\overline{\Delta} u = \lambda \overline{\Delta} v + \lambda^2 v = \lambda \left(\lambda v + \overline{\Delta} v\right) = \lambda u.$$

Also wird V in Eigenräume des Operators $\overline{\Delta}$ zum Eigenwert $+\lambda$ beziehungsweise $-\lambda$ zerlegt. Letzterer ist jedoch Null, da $\overline{\Delta}$ ein positiver Operator ist. Also lässt sich $L^2(M)$ in Eigenräume von $\overline{\Delta}$ zerlegen, die jeweils endlichdimensionale Unterräume des Raumes $H^2(M)$ sind. Es bleibt zu zeigen, dass die Eigenräume tatsächlich aus glatten Funktionen bestehen. Sei dazu $v \in H^2(M)$ ein Eigenvektor mit $\overline{\Delta} v = \lambda v$. Durch suksessives Anwenden des Operators $\overline{\Delta}$ auf diese Gleichung erhalten wir nach Proposition 3.11, dass v in jedem geradzahligen SOBOLEW-k-Raum enthalten ist. Nach dem Einbettungssatz von SOBOLEW ist dann v aber bereits eine glatte Funktion. Somit ist v tatsächlich Eigenfunktion des Operators Δ und die Aussage ist vollständig bewiesen. □

Diese Spektralzerlegung des Raumes $L^2(M)$ erlaubt uns nun die Definition von durch Funktionen induzierten Operatoren.

Definition und Satz 3.14. *Sei $\sigma(\Delta)$ die Menge der Eigenwerte von Δ. Diese nennen wir das Spektrum von Δ. Ist $f\colon \sigma(\Delta) \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion, so definieren wir den Operator $f(\Delta)$ auf $L^2(M)$ folgendermaßen:*
Sei $u \in L^2(M)$ ein beliebiges Element. Dann gilt die Darstellung:

$$u = \sum_{\lambda \in \sigma(\Delta)} \langle u, v_\lambda \rangle_{L^2(M)} \cdot v_\lambda,$$

wobei die glatten Funktionen v_λ Eigenfunktionen von Δ zum Eigenwert λ sind und ein Orthonormalsystem bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(M)}$ bilden.
Dann ist das Bild unter $f(\Delta)$ definiert durch:

$$f(\Delta) u := \sum_{\lambda \in \sigma(\Delta)} f(\lambda) \cdot \langle u, v_\lambda \rangle_{L^2(M)} \cdot v_\lambda. \tag{3.8}$$

Der so definierte, selbstadjungierte Operator $f(\Delta)$, von $L^2(M)$ in sich selbst, ist beschränkt. Falls der Operator Δ mit einem Operator A kommutiert, gilt dies auch für $f(\Delta)$ und A. Ferner bildet $f(\Delta)$ die glatten Funktionen $C^\infty(M)$ auf die glatten Funktionen $C^\infty(M)$ ab.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass die Selbstadungiertheit des Operators $f(\Delta)$ direkt aus der Selbstadjungiertheit des Operators Δ folgt, denn es reicht diese Eigenschaft für Eigenfunktionen von Δ zu prüfen, da sie den gesamten Raum $L^2(M)$ aufspannen.
Sei die Funktion f auf dem Spektrum von Δ durch die Konstante C beschränkt. Dann gilt für ein beliebiges Element $u \in L^2(M)$:

$$\begin{aligned}\langle f(\Delta) u, f(\Delta) u\rangle_{L^2(M)} &= \sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)} |f(\lambda)|^2 \cdot \left|\langle u, v_\lambda\rangle_{L^2(M)}\right|^2 \\ &\leq C^2 \sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)} \left|\langle u, v_\lambda\rangle_{L^2(M)}\right|^2 = C^2 \|u\|_{L^2(M)}.\end{aligned}$$

Damit ist der Operator $f(\Delta)$ auf $L^2(M)$ beschränkt. Angenommen ein Operator A kommutiert mit dem Operator Δ. Dann gilt sofort $f(\Delta) Av = Af(\Delta) v$, für jede Eigenfunktion v von Δ. Da diese jedoch als direkte Summe den Raum $L^2(M)$ aufspannen folgt, dass $f(\Delta)$ mit A kommutiert. Sei nun eine glatte Funktion $u \in C^\infty(M)$ beliebig vorgegeben. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, dass $\Delta^{2k} u$ in dem Raum $L^2(M)$ liegt. Damit gilt ferner:

$$\overline{\Delta}^{2k} f(\Delta) u = f(\Delta) \Delta^{2k} u \in L^2(M).$$

Nach iteriertem Anwenden von Proposition 3.11 folgt dann aber bereits, dass $f(\Delta) u$ in dem Raum $H^{2k}(M)$ enthalten ist. Nach dem Einbettungssatz von Sobolew folgt dann aber, dass $f(\Delta) u$ eine glatte Funktion ist. □

4 Die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung ist von einiger Bedeutung für die Physik. Sie beschreibt etwa das räumliche Ausbreitungsverhalten der Temperatur mit der Zeit oder das Ausbreitungsverhalten der Konzentration mit der Zeit (Diffusion). Wir wollen uns hier auf eine mathematische Betrachtung beschränken, insbesondere mit dem Ziel, den Wärmeleitungskern besser zu verstehen. Dennoch bleiben manche Aussagen nicht ohne physikalische Anschauung wie etwa die „Energieerhaltung“, die wir für den Beweis der Eindeutigkeit einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung heranziehen werden. Wir folgen in diesem Kapitel im Wesentlichen der Darstellung von Roe in [Roe88, §5]. Sei im folgenden M stets eine kompakte Riemannsche zusammenhängende und orientierte Mannigfaltigkeit.

Definition 4.1. *Sei u eine in beiden Komponenten glatte Funktion die noch in $\mathbb{R}^{\geq 0}$ stetig ist:*

$$u\colon \mathbb{R}^{\geq 0} \times M \longrightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

Dann heißt u Lösung der Wärmeleitungsgleichung, falls für $t > 0$ gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0, \quad \text{wobei } \Delta \text{ auf der } M\text{-Komponente wirkt.}$$

Proposition 4.2. *Die Wärmeleitungsgleichung besitzt eine eindeutig bestimmte, glatte Lösung u zu gegebenem, glattem Anfangsdatum $u(0,\cdot) \in C^\infty(M)$.*
Sie erfüllt ferner folgende Abschätzung:

$$\forall t \geq 0: \quad \|u(t,\cdot)\|_{L^2(M)} \leq \|u(0,\cdot)\|_{L^2(M)}.$$

Beweis. Existenz:
Definiere $u(t,\cdot) = \exp(-t\Delta)\, u(0,\cdot)$, wobei der Operator $\exp(-t\Delta)$ wie in 3.14 über das Spektrum von Δ definiert ist. Somit gilt sofort, dass $u(t,\cdot)$ für alle $t \geq 0$ eine glatte Funktion auf M ist. Da die Funktion $\lambda \mapsto e^{-t\lambda}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ beliebig oft differenzierbar ist und ihre Ableitungen auf $\mathbb{R}^{\geq 0}$ beschränkt sind, gibt es den Ableitungen entsprechende Operatoren, welche jeweils auf $u(0,\cdot)$ angewendet, die Ableitungen nach t von $u(t,\cdot)$ ergeben, da alle Ausdrücke gleichmässig konvergieren und somit Differentiation mit Summation vertauschbar ist. Damit folgt auch sofort, dass $u(t,\cdot)$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, denn dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)} -\lambda e^{-t\lambda}\left\langle u, v_\lambda\right\rangle_{L^2(M)}\cdot v_\lambda,\\ \Delta u &= \sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)} e^{-t\lambda}\left\langle \Delta u, v_\lambda\right\rangle_{L^2(M)}\cdot v_\lambda\\ &= \sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)} \lambda e^{-t\lambda}\left\langle u, v_\lambda\right\rangle_{L^2(M)}\cdot v_\lambda.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei die Selbsadjungiertheit des Operators Δ ausgenutzt.
Eindeutigkeit: Sei $u(t,\cdot)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left\|u(t,\cdot)\right\|^2_{L^2(M)} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle u(t,\cdot), u(t,\cdot)\right\rangle_{L^2(M)}\\ &= -\left\langle \Delta u(t,\cdot), u(t,\cdot)\right\rangle_{L^2(M)} - \left\langle u(t,\cdot), \Delta u(t,\cdot)\right\rangle_{L^2(M)}\\ &= -2\left\langle \mathrm{d}u(t,\cdot), \mathrm{d}u(t,\cdot)\right\rangle_{\Lambda^1(T^*M)}\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Damit folgt die Abschätzung:

$$\left\|u(t,\cdot)\right\|^2_{L^2(M)} \leq \left\|u(0,\cdot)\right\|^2_{L^2(M)}, \quad \text{für } t \geq 0.$$

□

Wie wir im Beweis gesehen haben, ist der Lösungsoperator der Wärmeleitungsgleichung, der auf $L^2(M)$ beschränkte Operator $\exp(-t\Delta)$.
Tatsächlich handelt es sich bei diesem Lösungsoperator um einen glättenden Operator. Dies zu zeigen soll unser nächstes Ziel sein.

Definition 4.3. *Ein beschränkter Operator A auf $L^2(M)$ heißt glättender Operator, wenn es einen glatten Kern (also eine glatte Funktion in zwei Variablen aus M) $k \in C^\infty(M\times M)$ gibt, sodass für alle glatten Funktionen $u \in C^\infty(M)$ gilt:*

$$Au(p_1) = \int_M k(p_1,p_2)\cdot u(p_2) vol_g(p_2). \tag{4.1}$$

Durch Anwenden einer Differentiation auf diese Formel sehen wir, da Differentiation und Integration vertauschen, dass das Bild des Raumes $L^2(M)$ unter dem Operator A die glatten Funktionen $C^\infty(M)$ sind.

Außerdem gilt folgendes Lemma, welches wir auf den Lösungsoperator der Wärmeleitungsgleichung anwenden wollen.

Lemma 4.4. *Sei A ein selbstadjungierter, beschränkter Operator auf dem Raum $L^2(M)$, welcher $L^2(M)$ stetig auf den* Banach*-Raum $C^r(M)$ abbildet. Dann kann der Operator A^2 durch einen Kern der Klasse C^r dargestellt werden:*

$$A^2u(p_1) = \int_M k(p_1,p_2)\cdot u(p_2)\, vol_g(p_2), \tag{4.2}$$

wobei dies für alle Elemente $u \in L^2(M)$ gelte.

Beweis. Sei der Punkt $p \in M$ fest gewählt. Dann ist das Funktional auf $L^2(M)$, gegeben durch $u \mapsto (Au)(p)$, stetig und linear und kann daher, nach dem Fréchet-Riesz'schen Darstellungssatz, wie er etwa in [Wer11, Theorem V.3.6, §V] dargestellt ist, durch ein Element $v_p \in L^2(M)$ repräsentiert werden, das heißt für alle $u \in L^2(M)$ gilt $(Au)(p) = \langle v_p, u\rangle_{L^2(M)}$. Somit gilt für ein Element $u \in L^2(M)$:

$$\begin{aligned}\left(A^2 u\right)(p) &= (A(Au))(p)\\ &= \langle Au, v_p\rangle_{L^2(M)}\\ &= \langle u, Av_p\rangle_{L^2(M)}.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da A ein selbstadjungierter Operator ist. Weiterhin stellen wir fest, dass Av_p eine Funktion der Klasse C^r für jeden Punkt $p \in M$ ist. Es gilt somit für zwei beliebige glatte Funktionen $f, h \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}\left\langle h, A^2 f\right\rangle_{L^2(M)} &= \int_M \left(A^2 f\right)(p) \cdot \overline{h}(p)\, vol_g(p)\\ &= \int_M \left(\int_M f(q) \cdot \left(\overline{Av_p}\right)(q)\, vol_g(q)\right) \cdot \overline{h}(p)\, vol_g(p).\end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen der Selbstadjugiertheit von A^2:

$$\begin{aligned}\left\langle h, A^2 f\right\rangle_{L^2(M)} &= \left\langle A^2 h, f\right\rangle_{L^2(M)}\\ &= \int_M f(q) \cdot \overline{A^2 h}(q)\, vol_g(q)\\ &= \int_M f(q) \cdot \overline{\int_M h(p) \cdot \left(\overline{Av_q}\right)(p)\, vol_g(p)} vol_g(q)\\ &= \int_M \left(\int_M f(q) \cdot \overline{h}(p) \cdot (Av_q)(p)\, vol_g(p)\right) vol_g(q).\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Fubini und da die glatten Funktionen f und h beliebig waren, folgt somit die Gleichheit:

$$(Av_q)(p) = \left(\overline{Av_p}\right)(q). \tag{4.3}$$

Insbesondere erlaubt dies die Definition des Kerns k als Funktion:

$$k(p, q) := (Av_q)(p).$$

Nach Gleichung 4.3 und der Tatsache, dass der Operator A Elemente von $L^2(M)$ nach Funktionen der Klasse C^r abbildet, folgt sofort, dass k in beiden Komponenten eine Funktion der Klasse C^r ist. Ebenfalls gilt aber für eine glatte Funktion $u \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}\left(A^2 u\right)(p) &= \int_M u(q) \cdot \left(\overline{Av_p}\right)(q)\, vol_g(q)\\ &= \int_M k(p, q) \cdot u(q) vol_g(q).\end{aligned}$$

Also ist k der Kern des Operators A^2 mit der geforderten Regularität. □

Damit können wir für den Lösungsoperator der Wärmeleitungsgleichung die folgende Aussage treffen.

Proposition 4.5. *Der Lösungsoperator* $\exp(-t\Delta)$ *ist ein glättender Operator.*

Beweis. Für jede natürliche Zahl k ist $\overline{\Delta}^{2k}\exp(-t\Delta)$ ein beschränkter Operator auf $L^2(M)$. Nach Proposition 3.11 bildet somit $\exp(-t\Delta)$ den Raum $L^2(M)$ stetig in den Raum $H^{2k}(M)$ ab. Nach dem Einbettungssatz von SOBOLEW bildet dann $\exp(-t\Delta)$ den Raum $L^2(M)$ stetig in den Raum $C^r(M)$ für alle $r \geq 0$ ab. Da außerdem die Gleichung $\exp(-t\Delta) = (\exp(-t\Delta/2))^2$ gilt, folgt mit dem vorangegangenen Lemma die Behauptung. □

Nun können wir den Wärmeleitungskern definieren.

Definition 4.6. *Da der Operator* $\exp(-t\Delta)$ *glättend ist, ist dieser Operator als Integraloperator eines glatten Kernes* k *gegeben. Es gilt folgende definierende Eigenschaft für alle Funktionen* $u \in C^\infty(M)$*:*

$$k\colon \mathbb{R}^+ \times M \times M \longrightarrow \mathbb{C} \tag{4.4}$$

$$(\exp(-t\Delta)\,u)(p_1) = \int_M k(t,p_1,p_2)\cdot u(p_2) vol_g(p_2). \tag{4.5}$$

Um den Wärmeleitungskern in seinem Verhalten besser verstehen zu können, führen wir den Begriff der Fundamentallösung ein.

Definition 4.7. *Sei* $p \in M$ *ein fester Punkt und sei* $\sigma \in \mathbb{C}$ *eine feste Zahl. Dann heißt eine glatte Funktion* $w\colon \mathbb{R}^+ \times M \longrightarrow \mathbb{C}$ *Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung mit Pol* (p,σ)*, falls gilt:*

- w *erfüllt die Wärmeleitungsgleichung:*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) w = 0.$$

- *Für alle Funktionen* $h \in C^\infty(M)$ *gilt:*

$$\lim_{t\to 0}\langle h, w(t,\cdot)\rangle_{L^2(M)} = \sigma \cdot \overline{h}(p).$$

Proposition 4.8 (Existenz und Eindeutigkeit der Fundamentallösung)**.** *Für jedes Tupel* (p,σ) *mit* $p \in M$ *und* $\sigma \in \mathbb{C}$ *existiert eine eindeutige Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung zum Pol* (p,σ) *und es gilt:*

$$w(t,\cdot) = \sigma \cdot k(t,p,\cdot),$$

wobei k *der Wärmeleitungskern auf* M *wie in 4.6 ist.*

Beweis.
- Existenz:
  Wir benutzen den in der Behauptung gegebenen Ausdruck für w. Sei dazu $\chi \in C^\infty(M)$ eine beliebige Testfunktion:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_{p'}\right)(\exp(-t\Delta_{p'})\,\chi)(p') \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_{p'}\right)\int_M k(t,p,p')\,\chi(p)\,\mathrm{vol}_g(p) \\ &= \int_M \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_{p'}\right) k\right)(t,p,p')\,\chi(p)\,\mathrm{vol}_g(p)\,. \end{aligned}$$

Folglich ist, da χ beliebig ist und k stetig ist, $k(t,p,\cdot)$ Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Durch die Multiplikation mit σ erhalten wir also, dass w tatsächlich die Wärmeleitungsgleichung löst.
Nun sei $h \in C^\infty(M)$ eine beliebige Funktion. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle h, w(t,\cdot)\rangle_{L^2(M)} &= \int_M \overline{h}(p')\, w(t,p')\, \mathrm{vol}_g(p') = \sigma \cdot \int_M \overline{h}(p')\, k(t,p,p')\, \mathrm{vol}_g(p') \\ &= \sigma \cdot \left(\exp(-t\Delta)\, \overline{h}\right)(p) \xrightarrow{t\to 0} \sigma \cdot \overline{h}(p).\end{aligned}$$

Letztere Konvergenzaussage gilt, da für $t \to 0$ die Funktionenfolge $\exp(-t\Delta)\,\overline{h} \to \overline{h}$ in der Fréchet-Topologie von $C^\infty(M)$ konvergiert.

- Eindeutigkeit:
Sei w Fundamentallösung mit Pol (p,σ). Sei $t > 0$. Dann gilt wegen der Eindeutigkeit der Wärmeleitungsgleichung für alle $0 < \epsilon < t$:

$$w(t,p') = \left(\exp(-(t-\epsilon)\Delta)\, w(\epsilon,\cdot)\right)(p').$$

Somit erhalten wir für eine beliebige Funktion $h \in C^\infty(M)$:

$$\langle h, w(t,\cdot)\rangle_{L^2(M)} = \langle h, \exp(-(t-\epsilon)\Delta)\, w(\epsilon,\cdot)\rangle_{L^2(M)}.$$

Nun nutzen wir aus, dass $\exp(-(t-\epsilon)\Delta)$ nach Satz 3.14 ein selbstadjungierter Operator ist:

$$\langle h, w(t,\cdot)\rangle_{L^2(M)} = \langle \exp(-(t-\epsilon)\Delta)\, h, w(\epsilon,\cdot)\rangle_{L^2(M)}.$$

Wir definieren nun die Familie T_ϵ von linearen, stetigen Funktionalen auf dem Fréchet-Raum $C^\infty(M)$ für eine Funktion $f \in C^\infty(M)$ via:

$$T_\epsilon f := \langle f, w(\epsilon,\cdot)\rangle_{L^2(M)}.$$

Diese Familie konvergiert punktweise mit $\epsilon \to 0$ gegen das lineare, stetige Funktional $f \mapsto \sigma \cdot \overline{f}(p)$. Folglich können wir den Satz von Banach-Steinhaus, wie er etwa in [Rud91, Theorem 2.6, §2] dargestellt ist, anwenden und erhalten so, dass die Operatornormen $\|T_\epsilon\|_{C^\infty(M)}$ durch eine Konstante C beschränkt sind. Ferner konvergiert $\exp(-(t-\epsilon)\Delta)\, h \to \exp(-t\Delta)\, h$ im Fréchet-Raum $C^\infty(M)$. Insgesamt ergibt sich also:

$$\begin{aligned}&\left|\langle (\exp(-(t-\epsilon)\Delta) - \exp(-t\Delta))\, h, w(\epsilon,\cdot)\rangle_{L^2(M)}\right| \\ &\le C \cdot \|(\exp(-(t-\epsilon)\Delta) - \exp(-t\Delta))\, h\|_{C^\infty(M)} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.\end{aligned}$$

Dann erhalten wir aber:

$$\begin{aligned}\langle h, w(t,\cdot)\rangle_{L^2(M)} &= \lim_{\epsilon\to 0} \langle \exp(-(t-\epsilon)\Delta)\, h, w(\epsilon,\cdot)\rangle_{L^2(M)} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \langle \exp(-t\Delta)\, h, w(\epsilon,\cdot)\rangle_{L^2(M)} \\ &= \sigma \cdot \overline{(\exp(-t\Delta)\, h)}(p).\end{aligned}$$

Sind also w und w' zwei Fundamentallösungen so gilt für die Differenz:

$$\langle h, (w - w')(t,\cdot)\rangle_{L^2(M)} = 0.$$

Da $h \in C^\infty(M)$ beliebig war und w, w' stetig, müssen sie identisch sein.

□

5 Asymptotische Entwicklung der Wärmeleitungsgleichung

Die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung enthält wesentliche Informationen der Gleichung. Wir wollen nun versuchen, einige Informationen mittels einer asymptotischen Lösung zu extrahieren. Wir folgen in diesem Kapitel der Darstellung von Roe in [Roe88, §5].
Zu Beginn wollen wir definieren, was eine asymptotische Lösung ist.

Definition 5.1. *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Eine formale Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{n_k}$$

heißt asymptotische Entwicklung von f bei $t = 0$, falls die Folge $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ streng monoton wachsend ist und gegen ∞ läuft, für $k \to \infty$ und für jede natürliche Zahl l folgendes gilt:

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{l} a_k t^{n_k} \right| \leq C_l \, |t|^{n_{l+1}} \, ,$$

für kleine Beträge $|t|$ und eine Konstante C_l.
Wir schreiben dann $f(t) \approx a_0 t^{n_0} + a_1 t^{n_1} + \ldots$.
Wir sagen, eine Funktion ist asymptotische Lösung der Wärmeleitungsgleichung, falls sie in oberem Sinne asymptotische Entwicklung einer Fundamentallösung bei $t = 0$ ist.

Notwendig zur Diskussion der Wärmeleitungsgleichung ist die folgende Funktion, welche die Aufgabe eines integrierenden Faktors übernimmt, wie wir sie etwa von Differentialgleichungen im euklidischen Raum her kennen.

Lemma 5.2. *Sei $p_0 \in M$ ein Punkt und sei $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine geodätische Karte zentriert an p_0. Sei x Koordinatenvektor eines noch in U enthaltenen Punkts p_x und sei $g^{ij}(x)$ der ij-te Eintrag der inversen Matrix der Metrik in Matrixdarstellung bezüglich der geodätischen Karte. Wir definieren eine Funktion $f\colon \phi(U) \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ via:*

$$f(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\operatorname{dist}^2(p_0, p_x)}{4t} \right);$$

dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) = \frac{\operatorname{tr}\left(G^{-1}(x)\right) - n}{2t} f(x,t) \, .$$

Beweis. Aufgrund von Proposition 2.13 gilt $\operatorname{dist}^2(p_0, p_x) = |x|^2$. Andererseits wissen wir ebenso aus Korollar 2.16, dass $\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\, x^i x^j = |x|^2$. Nun können wir explizit rechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) =& \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{1}{4t}|x|^2\right)\right)\\
=& -\frac{n}{2t} f(x,t) + \frac{|x|^2}{4t^2} f(x,t);\\
\frac{\partial f}{\partial x^i}(x,t) =& \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\left(-\frac{2x^i}{4t}\right)\exp\left(-\frac{1}{4t}|x|^2\right);\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) =& \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\left(-\frac{\delta_{ij}}{2t}\right)\exp\left(-\frac{1}{4t}|x|^2\right)\\
&+ \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{4x^i x^j}{(4t)^2}\exp\left(-\frac{1}{4t}|x|^2\right)\\
=& \left(\frac{x^i x^j}{4t^2} - \frac{\delta_{ij}}{2t}\right) f(x,t);\\
\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) =& \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\left(\frac{x^i x^j}{4t^2} - \frac{\delta_{ij}}{2t}\right) f(x,t)\\
=& \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{\operatorname{tr}\left(G^{-1}(x)\right)}{2t}\right) f(x,t);
\end{aligned}$$

insgesamt gilt also:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x,t) = \frac{\operatorname{tr}\left(G^{-1}(x)\right) - n}{2t} f(x,t).$$

□

Nun wollen wir die Wirkung des LAPLACE-Operators in geodätischen Koordinaten untersuchen. Zunächst gilt, dass der LAPLACE-Operator Δ folgende Form besitzt:

$$\Delta\big|_{p_x} = -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\big|_{p_x} - \sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{p_x},$$

mit

$$b^i(x) = \frac{1}{\sqrt{\det\left(G(x)\right)}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{\det\left(G(x)\right)}\, g^{ij}(x)\right).$$

Damit können wir nun eine asymptotische Lösung der Wärmeleitungsgleichung angeben:

Proposition 5.3 (Asymptotische Lösung der Wärmeleitungsgleichung)**.** *Die Wärmeleitungsgleichung besitzt eine eindeutige, asymptotische Lösung im Sinne von 5.1 mit folgender lokaler Darstellung in geodätischen Koordinaten:*

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty} t^k u_k(x) \tag{5.1}$$

zu einem gebenem Anfangsdatum $u_0(0) =: \sigma$.

Beweis. Erster Teil: Konstruktion. Wir wählen für $u(x,t)$ den Ansatz $f(x,t)\cdot v(x,t)$ mit einer noch näher zu bestimmenden glatten Funktion v. Die Grundidee ist, dass f als integrierender Faktor die Differentialgleichung auf ein Problem erster Ordnung reduziert. Wir bestimmen nun wie Δ auf $f\cdot v$ wirkt, unter der Berücksichtigung, dass für die partiellen Ableitungen die Produktregel gilt:

$$\Delta\big|_{p_x}(f\cdot v)(x,t) = f(x,t)\cdot\Delta\big|_{p_x}(v)(x,t) - 2\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x,t)\frac{\partial v}{\partial x^j}(x,t)$$
$$+\, v(x,t)\left(-\sum_{i=1}^{n} b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x,t)\right).$$

Zusammen mit Lemma 5.2 und mit der in dessen Beweis enthaltenen Identität $\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(x,t) = -\frac{x^i}{2t}$ ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x,t)}\left(\frac{\partial(fv)}{\partial t}(x,t) + \Delta\big|_{p_x}(fv)(x,t)\right) &= \frac{\operatorname{tr}\left(G^{-1}(x)\right)-n}{2t}v(x,t)\\ +\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \Delta\big|_{p_x}v(x,t) + \sum_{i,j=1}^{n}&\left(g^{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x^j}(x,t) + \frac{b^i(x)\,v(x,t)}{2}\right)\frac{x^i}{t}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Nun setzen wir die Entwicklung um $t_0 = 0$ von v an:

$$v(x,t) \approx u_0(x) + tu_1(x) + t^2u_2(x) + \ldots,$$

dabei seien die u_k nun noch zu bestimmen. Einsetzen in die Gleichung 5.2, unter der Berücksichtigung, dass die linke Seite dieser Gleichung 0 sein soll, liefert nach Koeffizientenvergleich in Potenzen von t:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\,x^i\frac{\partial}{\partial x^j}\right)u_{k+1}(x) + \left(k+1+\frac{\operatorname{tr}\left(G^{-1}(x)\right)-n}{2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{b^i(x)\,x^i}{2}\right)u_{k+1}(x)\\ &= -\left(\Delta_{p_x}u_k\right)(x),\end{aligned} \tag{5.3}$$

dabei setzen wir, damit die Rekursion bei $k=-1$ starten kann:

$$u_{-1} = 0.$$

Dieser Ausdruck lässt sich weiter vereinfachen, wenn wir unsere Rechenregeln für geodätische Koordinaten aus Korollar 2.16 ausnutzen. Zunächst gilt dann:

$$\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\,x^i\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{p_x} = \sum_{j=1}^{n} x^j\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{p_x} = R\big|_{p_x}$$

Ebenso lässt sich die Summe über $b^ix^i/2$ näher bestimmen. Wir verwenden die Abkürzung $g(x) := \det(G(x))$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{b^ix^i}{2} =&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x^i}{\sqrt{g(x)}}\cdot\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\sqrt{g(x)}g^{ij}(x)\right)\\ =&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{x^i}{2\sqrt{g(x)}\sqrt{g(x)}}\cdot\frac{\partial g(x)}{\partial x^j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}x^i\cdot\frac{\partial g^{ij}(x)}{\partial x^j}.\end{aligned}$$

Nach der Produktregel gilt aber:

$$\frac{\partial x^i g^{ij}(x)}{\partial x^j} = \delta_{ij} g^{ij}(x) + x^i \cdot \frac{\partial g^{ij}(x)}{\partial x^j}.$$

Und somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{b^i x^i}{2} &= \frac{1}{4g(x)} R\big|_{p_x}.g - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} g^{ii}(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^j} \sum_{i=1}^{n} x^i g^{ij}(x)\right) \\
&= \frac{1}{4g(x)} R\big|_{p_x}.g - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\left(G^{-1}(x)\right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^j}{\partial x^j}\right) \\
&= \frac{1}{4g(x)} R\big|_{p_x}.g - \frac{\operatorname{tr}\left(G^{-1}(x)\right) - n}{2}.
\end{aligned}$$

Nun können wir diese Ergebnisse in die Differentialgleichung 5.3 eintragen:

$$R\big|_{p_x}.u_{k+1} + \left(k + 1 + \frac{1}{4g(x)} R\big|_{p_x}.g\right) \cdot u_{k+1}(x) = -\Delta\big|_{p_x} u_k. \tag{5.4}$$

Es sei nun $\psi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+ \times S^{n-1}$ der wie folgt definierte Diffeomorphismus:

$$x \mapsto \psi(x) := \left(|x|, \frac{x}{|x|}\right).$$

Beziehungsweise wir erhalten neue („Polar“)-Koordinaten vermöge:

$$\begin{aligned}
\psi^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \times S^{n-1} &\to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\
(r, \overline{x}) &\mapsto r \cdot \overline{x}
\end{aligned}$$

Es ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
r \frac{\partial}{\partial r}\Big|_x &= \sum_{i=1}^{n} r \frac{\partial x^i}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x \\
&= \sum_{i=1}^{n} r \overline{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x = R\big|_x.
\end{aligned}$$

Ferner gilt, dass die Komponenten von S^{n-1} unabhängig von r sind:

$$\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial r} = \frac{\partial \frac{x^i}{r}}{\partial r} = \frac{\overline{x}^i \cdot r - x^i}{r^2} = 0.$$

Somit transformiert sich die Differentialgleichung 5.4 zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in r, wir können sogar eine explizite Lösung angeben, die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist (dies ist ein Resultat über gewöhnliche Differentialgleichungen wie es in [Wal96, Satz, §2.II] zu finden ist. Es ist jedoch zu beachten, dass dieses Resultt für jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^+$, die $r = 0$ nicht enthält, gilt) und erhalten so folgende Rekursion:

$$\begin{aligned}
u_{k+1}(r, \overline{x}) &= r^{-k-1} \cdot g^{-\frac{1}{4}}(x) \cdot \left(C_{k+1} - \int_0^r \rho^k \cdot \left(g^{\frac{1}{4}} \cdot \Delta u_k\right)(\rho, \overline{x})\, \mathrm{d}\rho\right), \\
u_0 &= u_0(0) \cdot g^{-\frac{1}{4}},
\end{aligned}$$

wobei die Konstanten C_k noch näher zu bestimmen sind. Setzen wir diese Rekursionsformel in die Gleichung 5.4 ein, so zeigt sich, dass unsere Rekursion zumindest eine formale Lösung von ihr ist. Es bleibt zu zeigen, dass die auftretenden Funktionen tatsächlich eindeutig bestimmt und glatt sind. Dazu betrachten wir zunächst die Konstanten C_k. Läuft der Radialanteil r gegen 0, so muss schon notwendig $C_k = 0$ sein, da sonst u_k in $r = 0$ nicht stetig sein kann. Damit erhalten wir die Eindeutigkeit. Es bleibt zu überprüfen, dass die so bestimmten u_k tatsächlich glatt sind. Für Punkte mit $r \neq 0$ ist dies der Fall, direkt nach Konstruktion. Die Funktion u_0 ist überall glatt, da g positiv und glatt ist. Wir führen nun eine Induktion nach k durch. Wir können durch Anwendung der Gleichung 5.4 die Ableitung von u_{k+1} nach r in Termen von glatten Funktionen (nach Induktionsvoraussetzung) und der Funktion u_{k+1} selbst ausdrücken. Wir erhalten also auch in $r = 0$ beliebig häufige Differenzierbarkeit. □

In diesem Teil des Beweises haben wir nun also eine „formale" asymptotische Lösung zur Wärmeleitungsgleichung gefunden, die lokal gültig ist. Es wird also noch zu zeigen sein, dass diese auch tatsächlich asymptotisch zur Fundamentallösung ist. Die dazu nötige Abschätzung wollen wir nun entwickeln.

Proposition 5.4 (Prinzip von Duhamel)**.** *Sei $u\colon \mathbb{R}^{\geq 0} \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in $\mathbb{R}^{\geq 0}$ stetige und in M glatte Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $\tilde{u}$, welche differenzierbar in $\mathbb{R}^{+}$ und glatt in M ist mit $\tilde{u}(0,\cdot) = 0$ und folgende inhomogene Wärmeleitungsgleichung erfüllt:*

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right)\tilde{u}\right)(t,\cdot) = u(t,\cdot)\,.$$

Tatsächlich ist $\tilde{u}$ durch folgende Integralformel gegeben:

$$\tilde{u}(t,\cdot) = \int_0^t \exp\left(-\left(t-t'\right)\Delta\right) u\left(t',\cdot\right) \mathrm{d}t'.$$

Beweis.

- Eindeutigkeit:
  Ist $\tilde{v}$ eine weitere Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung mit Anfagsdatum $\tilde{v}(0,\cdot) = 0$, so ist die Differenz $\tilde{u} - \tilde{v}$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsdatum $(\tilde{u} - \tilde{v})(0,\cdot) = 0$ und muss daher 0 sein, wegen Eindeutigkeit der Wärmeleitungsgleichung.

- Existenz:
  Dazu leiten wir die gegebene Integralformal nach t ab und erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}(t,\cdot) =& \frac{\partial}{\partial t}\left(\exp(-t\Delta)\int_0^t \exp\left(t'\Delta\right) u\left(t',\cdot\right)\mathrm{d}t'\right)\\ =& -\Delta\exp(-t\Delta)\int_0^t \exp\left(t'\Delta\right) u\left(t',\cdot\right)\mathrm{d}t'\\ &+ \exp(-t\Delta)\exp(t\Delta)\, u(t,\cdot)\\ =& -\Delta\tilde{u}(t,\cdot) + u(t,\cdot)\,.\end{aligned}$$

□

Korollar 5.5. *Für jede gerade Zahl $k \geq 0$ gilt folgende Abschätzung für Lösungen aus Proposition 5.4:*

$$\left\|\tilde{u}(t,\cdot)\right\|_{H^k(M)} \leq tC_k \cdot \sup_{0\leq t'\leq t}\left\|u\left(t',\cdot\right)\right\|_{H^k(M)},$$

wobei C_k nur von k abhängige Konstanten sind.

Beweis. Wir benutzen die Integraldarstellung für $\tilde{u}$ aus Proposition 5.4. Wir können die Integration nach t' an der SOBOLEW-Norm vorbei ziehen. Dies ist möglich, da Normen, wegen der Dreiecksungleichung, konvex sind und wir somit die JENSEN'sche Ungleichung anwenden können. Demnach erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(t,\cdot)\|_{H^k(M)} &= t\left\|\frac{1}{t-0}\tilde{u}(t,\cdot)\right\|_{H^k(M)}\\ &= t\left\|\frac{1}{t-0}\int_0^t \exp\left(-\left(t-t'\right)\Delta\right)u\left(t',\cdot\right)\mathrm{d}t'\right\|_{H^k(M)}\\ &\leq t\frac{1}{t-0}\int_0^t \left\|\exp\left(-\left(t-t'\right)\Delta\right)u\left(t',\cdot\right)\right\|_{H^k(M)}\mathrm{d}t'\end{aligned}$$

Wenn wir nun zeigen können, dass $\exp(-s\Delta)$ als beschränkter Operator auf jedem SOBOLEW-Raum gerader Ordnung agiert, folgt mit der Standardabschätzung des Integrals die Behauptung. Dies beweisen wir durch Induktion nach k, der Ordnung der SOBOLEW-Norm. Für $k=0$ stimmt dies, da wir wissen, dass $\exp(-s\Delta)$ als beschränkter Operator auf $L^2(M)$ agiert. Für den Induktionsschritt stellen wir für ein $f \in C^\infty M$ fest:

$$\|\exp(-s\Delta)f\|_{H^{k+2}(M)} \leq \tilde{C}_{k+1}\left(\|\exp(-s\Delta)f\|_{H^k(M)} + \|\Delta\exp(-s\Delta)f\|_{H^k(M)}\right)$$

dies gilt mit der elliptischen Abschätzung für Δ in Proposition 3.9. Weiter erhalten wir, da Δ mit $\exp(-s\Delta)$ kommutiert und der Induktionsvoraussetzung:

$$\|\exp(-s\Delta)f\|_{H^{k+2}(M)} \leq \tilde{C}_{k+2}C_k\left(\|f\|_{H^k(M)} + \|\Delta f\|_{H^k(M)}\right)$$

Da Δ ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist und wir die Identitätsabbildung auch als solchen auffassen können, erhalten wir:

$$\|\exp(-s\Delta)f\|_{H^{k+2}(M)} \leq \tilde{C}_{k+2}C_k\left(\tilde{\tilde{C}}_{k+2}\|f\|_{H^{k+2}(M)} + \tilde{\tilde{\tilde{C}}}_{k+2}\|f\|_{H^{k+2}(M)}\right).$$

Da die Konstanten unabhängig von f sind, folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe dieser Abschätzung können wir nun asymptotische Lösungen weiter untersuchen:

Proposition 5.6. *Sei $p \in M$ ein Punkt und sei $\sigma \in \mathbb{C}$ beliebig. Bezeichne ferner w die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung mit Pol (p,σ). Sei $\tilde{w}\colon \mathbb{R}^+ \times M \longrightarrow \mathbb{C}$ eine glatte Funktion, mit den Eigenschaften:*

- *Für alle glatten Funktionen $f \in C^\infty(M)$ gilt:*

$$\lim_{t\to 0}\langle f, \tilde{w}(t,\cdot)\rangle_{L^2(M)} = \sigma\cdot\overline{f}(p).$$

- *Es gibt eine Funktion $\tilde{r}\colon \mathbb{R}^{\geq 0}\times M \longrightarrow \mathbb{C}$, welche stetig in $\mathbb{R}^{\geq 0}$ und glatt in M ist, sodass für $t>0$ gilt:*

$$\left.\left(\frac{\partial\tilde{w}(s,\cdot)}{\partial s} + \Delta\tilde{w}(s,\cdot)\right)\right|_{s=t} = t^N\cdot\tilde{r}(t,\cdot).$$

Dann gibt es eine bloß von $\tilde{r}$ abhängige Konstante C, sodass für alle $t>0$ gilt:

$$|w(t,\cdot)-\tilde{w}(t,\cdot)| \leq Ct^{N+1}.$$

Beweis. Sei $\tilde{u}$ wie in Proposition 5.4 die eindeutige Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung bezüglich $u(t,\cdot) := -t^N \tilde{r}(t,\cdot)$. Dann ist $\tilde{w}+\tilde{u}$ nach Konstruktion von $\tilde{w}$ eine Fundamentallösung mit Pol (p,σ). Diese sind jedoch eindeutig, also gilt schon $\tilde{w}+\tilde{u}=w$. Außerdem gilt aber nach Korollar 5.5 für $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}(t,\cdot)\|_{H^{2k}(M)} &\leq tC_{2k} \sup_{0\leq t'\leq t} \left\| t'^N \tilde{r}(t',\cdot)\right\|_{H^{2k}(M)} \\ &\leq t^{N+1} C_{2k} \sup_{0\leq t'\leq t} \|\tilde{r}(t',\cdot)\|_{H^{2k}(M)} \leq t^{N+1} C.\end{aligned}$$

Für k groß genug liefert dann der SOBOLEW-Einbettungssatz in C^0 das gewünschte Resultat. □

Nun können wir den Beweis von Proposition 5.3 fortsetzen:

Beweis. Zweiter Teil: Die gegebene Konstruktion liefert eine asymptotische Lösung. Wir behaupten nun, dass die im ersten Teil des Beweises von Proposition 5.3 konstruierte formale, asymptotische Lösung (fortgesetzt auf M) tatsächlich asymptotisch zu der Fundamentallösung mit Pol (p,σ) ist, falls wir p als Ursprung des geodätischen Koordinatensystems wählen und das Anfangsdatum $u_0(0)=\sigma$ setzen. Um dies zu zeigen, bezeichne Σ_k die Partialsumme bis zur Ordnung k der Reihendarstellung der formalen Lösung 5.1 bezüglich der geodätischen Karte $\phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zentriert um p, also

$$\Sigma_k(t,x) := f(x,t) \cdot \sum_{l=0}^{n} t^l u_l(x).$$

Diese Funktion setzen wir auf M durch eine glatte Abschneidefunktion $\eta\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ fort. Sei dazu V eine offene, echte Teilmenge von U, welche p enthält. Dann sei η so gewählt, dass $\operatorname{supp}(\eta) \subseteq U$ kompakt und $\eta|_V \equiv 1$ gilt. Sei die glatte Funktion $\tilde{w}_k\colon \mathbb{R}^+ \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$\tilde{w}_k(t,p') := \eta(p') \cdot \Sigma_k(t,\phi(p')).$$

Nun wollen wir schauen, wie sich diese Funktion unter $\partial/\partial t + \Delta$ verhält. Sei dazu x der Koordinatenvektor von p':

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)\tilde{w}_k\right)(t,p') \\ =&\eta(p')\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_k\right)(t,x) + \eta(p')\cdot(\Delta\Sigma_k)(t,x) \\ &+(\Delta\eta)(p')\cdot\Sigma_k(t,x) + 2\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}(x)\frac{\partial\eta}{\partial x^i}(p')\frac{\partial\Sigma_k}{\partial x^j}(t,x).\end{aligned}$$

Dabei entstehen diese Summanden wieder durch die „Produktregel“ von Δ, die wir bereits im ersten Beweisteil benutzt haben. Wir bemerken, dass nun der Ausdruck $\partial/\partial t + \Delta$ auf Σ_k wirkt. Dies war jedoch gerade so konstruiert, dass sich dann die Terme mit Potenzen in T bis zur Ordnung k wegheben. Wir gewinnen folglich einen Restterm, der die Potenz t^k und eine glatte Funktion $\tilde{u}\colon \mathbb{R}^+ \times M \longrightarrow \mathbb{C}$ als Faktoren involviert. Aus der partiellen Ableitung von Σ_k nach x^j kann ferner f (man betrachte dazu etwa den Beweis von Lemma

5.2) ausgeklammert werden:

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)\tilde{w}_k\right)(t,p')=f(x,t)\cdot\left(t^k\cdot\eta(p')\cdot\tilde{u}(t,p')+(\Delta\eta)(p')\cdot\sum_{l=0}^{n}t^l u_l(x)\right)$$
$$+f(x,t)\cdot 2\left(\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}(x)\frac{\partial\eta}{\partial x^i}(p')\left(\left(-\frac{x^j}{2t}\sum_{l=0}^{n}t^l u_l(x)\right)+\frac{\partial\Sigma_k}{\partial x^j}(t,x)\right)\right).$$

Insbesondere können wir durch Mulitplizieren der Faktoren von f mit einer geeigneten Potenz von t erreichen, dass diese sämtlich glatt in M und stetig in $\mathbb{R}^{\geq 0}$ sind:

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)\tilde{w}_k\right)(t,p')=\frac{f(x,t)}{t^a}\cdot t^N\cdot\tilde{\tilde{r}}(t,p')=t^N\cdot\tilde{r}(t,p'),$$

wobei N eine beliebige natürliche Zahl sei und $a\in\mathbb{N}$ geeignet gewählt. Weiterhin ist $\tilde{r}$ stetig in $\mathbb{R}^{\geq 0}$, denn für $p'\neq p$ dominiert das exponentielle Verhalten von f alle Polynome in t für $t\to 0$. Ist jedoch $p'=p$, so erinnnere man, dass η in einer Umgebung von p konstant 1 ist, folglich alle Terme, die Ableitungen in η involvieren, verschwinden und nur der Term $f(0,t)\cdot t^{a+k}\tilde{u}(t,p)$ übrig bleibt. Dieser Term ist jedoch bei genügend großer Wahl von k (abhängig von der Wahl von N), sodass $a+k\geq n/2$ gilt, stetig in $t=0$. Außerhalb der 0 ist die Stetigkeit von $\tilde{r}$ klar und die Glattheit von $\tilde{r}$ in M ohnehin.
Somit erfüllt $\eta\cdot\Sigma_{k_N}$, mit $k_N\in\mathbb{N}$, sodass die oberen Aussagen gelten, die inhomogene Wärmeleitungsgleichung zu $t^N\tilde{r}(t,\cdot)$.
Weiter bemerkt man, dass $f_t(x):=f(x,t)$ für $t\to 0$ eine Dirac-Folge ist, denn es gilt:

$$\int_{R^n}f_t(x)\,\mathrm{d}x=\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{y^2}{4t}}\mathrm{d}y\right)^n.$$

Diese Formel gilt nach dem Satz von Fubini und der Symmetrie der Ausdrücke in jeder Komponente. Durch Substitution $y=z\cdot\sqrt{4t}$ erhalten wir weiter:

$$\int_{R^n}f_t(x)\,\mathrm{d}x=\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\mathrm{d}z\right)^n=1^n=1.$$

Ist $\epsilon>0$ beliebig, so erhalten wir außerdem analog:

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_\epsilon(0)}f_t(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}\setminus\left(-\epsilon/\sqrt{4t},+\epsilon/\sqrt{4t}\right)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\mathrm{d}z\right)^n=0.$$

Somit gilt für eine beliebige glatte Funktion $h\in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}\langle h,\tilde{w}_k(t,\cdot)\rangle_{L^2(M)}&=\int_{\phi(U)}\left(\overline{h}\cdot\eta\circ\phi^{-1}\right)(x)\cdot f_t(x)\cdot\sum_{l=0}^{k}t^l u_l(x)\cdot\sqrt{g(x)}\cdot\mathrm{d}x\\&=\sum_{l=0}^{k}t^l\cdot\left(f_t*\left(\left(\overline{h}\cdot\eta\right)\circ\phi^{-1}\cdot u_l\cdot\sqrt{g}\right)\right)(0).\end{aligned}$$

Da jeder Faktor nach t^l in t beschränkt ist (da konvergente Folge in t) und die Summe endlich ist, folgt für $t\to 0$:

$$\langle h,\tilde{w}_k(t,\cdot)\rangle_{L^2(M)}\xrightarrow{t\to 0}\overline{h}(p)\cdot 1\cdot u_0(0)\cdot 1=\sigma\cdot\overline{h}(p).$$

Dabei wurde benutzt, dass $G(0) = (\delta_{ij})_{i,j=1}^{n}$ ist.
Somit sind die Voraussetzungen von Proposition 5.6 erfüllt und wir erhalten die Abschätzung:

$$|w(t,\cdot) - \tilde{w}_{k_N}(t,\cdot)| \leq C_N t^{N+1}$$

mit einer höchstens von N abhängigen Konstante. Dies beweist, dass $\tilde{w}$ tatsächlich asymptotische Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. □

Nun wollen wir noch eine Berechnung der ersten Koeffizientenfunktionen der asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskerns an der Stelle 0, $u_k(0)$, anschließen. Diese Werte sind von besonderem Interesse, da wir gesehen haben, dass für $t \to 0$ der Wärmeleitungskern in jedem Komplement einer offenen Umgebung der Diagonalen $\operatorname{diag}(M) := \{(p,p) : x \in M\}$ in C^0 gegen 0 konvergiert. Dies liegt daran, dass dies der Fall für die asymptotische Lösung ist (aufgrund des integrierenden Faktors) und es kann sogar gezeigt werden, dass diese Konvergenz in C^∞ gilt, ein Beweis dazu befindet sich in [Roe88, Proposition 5.11, §5]. Uns fehlen also noch genauere Informationen für das Verhalten des Kerns auf der Diagonalen.
Wir erinnern dazu noch einmal die Rekursion aus dem ersten Beweisteil für die asymptotische Entwicklung der Fundamentallösung $w(t,\cdot)$ mit Pol $(p,1)$ in geodätischen Koordinaten um p, welche der Funktion $k(t,\cdot,p)$ entspricht:

$$u_{k+1}(x) = -r^{-k-1} \cdot g^{-\frac{1}{4}}(x) \cdot \int_0^r \rho^k \cdot \left(g^{\frac{1}{4}} \cdot \Delta u_k\right)(\rho, \overline{x})\, \mathrm{d}\rho, \tag{5.5}$$

$$u_0 = g^{-\frac{1}{4}}. \tag{5.6}$$

Eine zielführende Methode, die Werte $u_k(0)$ zu berechnen, besteht etwa darin, die Funktionen u_k als Polynom anzunähern. Ebenso werden die Funktionen g^{ij} der Riemannschen Metrik als Polynom genähert, was die partiellen Ableitungen von g^{ij} an der Stelle 0 involviert (eine Näherung der Determinanten g, beziehungsweise ihrer Potenzen, ergibt sich dann durch Einsetzen der Näherung der Funktionen g^{ij}). Die obige Rekursionsformel reduziert sich somit zu Operationen auf den Koeffizienten der Näherung der Funktionen u_k. Soll der Koeffizient eines Monoms vom Grad m von der Näherung von u_{k+1} aus dem Näherungspolynom von u_k bestimmt werden, so muss dieses mindestens vom Grad $m+2$ sein (ebenso die Näherungen der Ausdrücke der Riemannschen Metrik), da der Laplace-Operator den Grad um 2 reduziert. Will man also den Wert $u_k(0)$ bestimmen, so ist eine Entwicklung der Funktionen g^{ij} bis zum Grad $2m$ nötig. Diese Entwicklung enthält bis zum Grad 2 noch wichtige geometrische Informationen (wie wir noch sehen werden). Ab dann werden die Ausdrücke jedoch zunehmend unübersichtlicher, sodass es sinnvoll ist, nicht mehr in Termen von g^{ij} zu entwickeln (Zur schnellen Berechnung empfiehlt sich etwa eine geschickte Matrixzerlegung von G^{-1}, sodass eine Berechnung der Determinanten einfach ist).
Wir wollen nun die ersten beiden Werte $u_0(0)$ und $u_1(0)$ bestimmen. Hierzu ist eine Entwicklung bis zum Grad 2 der Funktionen g^{ij} nötig, welche wir aus Proposition 2.17 ableiten können.

Proposition 5.7. *Es seien u_k die Funktionen aus der Rekursion 5.5 in geodätischen Koordinaten um $p \in M$. Dann gilt:*

$$u_0(0) = 1,$$
$$u_1(0) = \frac{1}{6}\kappa(p).$$

Dabei ist $\kappa(p) := -\sum_{i,k=1}^{n} R_{ikki}(0)$ die skalare Krümmung von M am Punkt p.

Beweis. Wir berechnen zunächst die Entwicklung der Determinante $g = \det(G)$ der RIEMANNschen Metrik bis zum Grad 2. Da die Determinante ein Polynom vom Grad n in den Einträgen der Matrix G ist, reicht es deren Entwicklung bis zum Grad 2 zu kennen. Diese ist uns aus Proposition 2.17 jedoch bekannt und so ergibt sich:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{\omega \in S_n} \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \prod_{i=1}^{n} g_{i\omega(i)}(x) \\ &= O\left(|x|^3\right) + \sum_{\omega \in S_n} \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\delta_{i\omega(i)} + \frac{1}{3} \sum_{k,l=1}^{n} R_{ikl\omega(i)}(0) \cdot x^k x^l \right). \end{aligned}$$

Im Produkt müssen wir nun nur die Fälle betrachten, in denen ein Polynom vom Grad kleiner als 3 entsteht. Somit reduziert sich der Ausdruck zu:

$$g(x) = O\left(|x|^3\right) + \sum_{\omega \in S_n} \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \delta_{i\omega(i)} + \frac{1}{3} \sum_{i,k,l=1}^{n} \left(R_{ikl\omega(i)}(0)\, x^k x^l \cdot \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \delta_{j\omega(j)} \right) \right).$$

Wir sehen, dass hier nur der Einheitszykel $\mathrm{id} \in S_n$ einen Beitrag liefert, alle anderen Produkte sind 0. Wir erhalten somit:

$$g(x) = 1 + \frac{1}{3} \sum_{i,k,l=1}^{n} R_{ikli}(0)\, x^k x^l + O\left(|x|^3\right).$$

Zusammen mit der Entwicklung der binomischen Reihe (deren Konvergenzradius 1 beträgt, wir verkleinern also x hinreichend) $(1+y)^\beta = 1 + \beta \cdot y + O(y^2)$, erhalten wir so:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= g^{-\frac{1}{4}}(x) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{3} \sum_{i,k,l=1}^{n} R_{ikli}(0)\, x^k x^l + O\left(|x|^3\right). \end{aligned}$$

Nach der Differentialgleichung 5.4 gilt nun aber für den Wert $u_1(0)$, da an dieser Stelle $r = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= -(\Delta u_0)(0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g(0)}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x^j} \right). \end{aligned}$$

Es ist nun noch eine Entwicklung der Funktionen g^{ij} bis zum Grad 1 zu finden. Es gilt jedoch für ein $a \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} && G \cdot G^{-1} &= \mathrm{Id}_{n\times n} \\ \Rightarrow && \left(\frac{\partial}{\partial x^a} G\right)(0) \cdot G^{-1}(0) + G(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^a} G^{-1}\right)(0) &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist aber jede partielle Ableitung von Einträgen von G an der Stelle $x = 0$ nach Proposition 2.17 schon Null. Also folgt mit $G(0) = \mathrm{Id}_{n\times n}$, dass $\left(\frac{\partial}{\partial x^a} g^{ij}\right)(0) = 0$ gilt. Es folgt somit:

$$g^{ij}(0) = \delta_{ij} + O\left(|x|^2\right).$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
u_1(0) &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta_{ij} \frac{\partial u_0}{\partial x^j} \right) \right)(0) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial (x^j)^2} \left(1 - \frac{1}{12} \sum_{i,k,l=1}^{n} R_{ikli}(0)\, x^k x^l \right) \right)(0) \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{6} R_{ijji}(0) \\
&= \frac{1}{6} \kappa(p).
\end{aligned}$$

Aus der Darstellung von u_0 folgt auch sofort der Wert $u_0(0) = 1$, was den Beweis vervollständigt. □

Die Bedeutung der skalaren Krümmung κ für die Topologie der Mannigfaltigkeit werden wir noch im nächsten Kapitel diskutieren. Zunächst erhalten wir noch zusammenfassend folgendes Korollar:

Korollar 5.8 (Entwicklung des Wärmeleitungskerns auf der Diagonalen)**.** *Es sei $k\colon \mathbb{R}^+ \times M \times M \to \mathbb{C}$ der Wärmeleitungskern. Dann gibt es folgende aymptotische Entwicklung von k im Sinne von Definition 5.1:*

$$k(t,p,p) \approx \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(\theta_0(p) + t\theta_1(p) + \ldots \right),$$

dabei sind die Funktionen θ_i algebraische Ausdrücke in den Ableitungen der Funktionen der Metrik g^{ij} an dem Punkt p. Im Besonderen gilt:

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= 1, \\
\theta_1 &= \frac{1}{6}\kappa.
\end{aligned}$$

6 Ausblick

Im letzten Kapitel haben wir festgestellt, dass sich das Verhalten des Wärmeleitungskerns in Beziehung zu geometrischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit setzen lässt. Diese Beziehung lässt sich insofern präzisieren, als dass der Lösungsoperator $\exp(-t\Delta)$ ein Spurklassenoperator ist, eine Tatsache, die wir hier nicht weiter ausführen wollen, aber in [Roe88, §6] nachgelesen werden kann.
Diese Eigenschaft führt dazu, dass wir das Integral des Wärmeleitungskerns auf der Diagonalen der Mannigfaltigkeit auch als Reihe in Eigenwerten des LAPLACE-Operators berechnen können. Wir erhalten somit:

$$\sum_{\lambda\in\sigma(\Delta)} e^{-t\lambda} \approx \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\left(\Theta_0 + t\Theta_1 + \ldots\right). \tag{6.1}$$

Wobei die Konstanten Θ_i gegeben sind durch:

$$\Theta_i := \int_M \theta_i(p)\, vol_g(p).$$

Die θ_i sind dabei die Koeffizientenfunktionen in der asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskerns auf der Diagonalen $k(t,p,p)$ wie in Korollar 5.8. Somit gilt insbesondere:

$$\begin{aligned}\Theta_0 &= \mathrm{vol}(M),\\ \Theta_1 &= \frac{1}{6}\int_M \kappa(p)\, vol_g(p).\end{aligned}$$

Mithin können wir geometrische Informationen der Mannigfaltigkeit aus dem Spektrum des LAPLACE-Operators ableiten:

Proposition 6.1. *Das Spektrum $\sigma(\Delta)$ des LAPLACE-Operators legt die Dimension, das Volumen und die totale skalare Krümmung $\int_M \kappa(p)\, vol_g(p)$ fest. Falls die Dimension der Mannigfaltigkeit $n = 2$ ist, bestimmt es eindeutig die Topologie der Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus der asymptotischen Entwicklung 6.1. Für die zweite Aussage müssen wir den Klassifikationssatz für geschlossene, orientierte, kompakte Flächen (Mannigfaltigkeiten der Dimension 2) heranziehen. Ein Beweis, der auf CONWAY zurückgeht, kann in [Fra99] gefunden werden. Dieser Klassifikationssatz besagt, dass die Topologie solcher Flächen eindeutig durch die EULER-Charakteristik $\chi(M)$ bestimmt ist. Für diese wiederum gilt der Satz von GAUSS-BONNET wie man ihn in [Wal89, Satz G, §4.4] finden kann:

$$2\pi\chi(M) = \int_M \kappa(p)\, vol_g(p).$$

Die rechte Seite wird jedoch durch das Spektrum determiniert und folglich legt das Spektrum die Topologie auf solchen Flächen fest. □

Aussagen dieses Typs werden dem Gebiet der Spektralgeometrie zugeordnet. Eine ähnliche Aussage für Mannigfaltigkeiten höherer Dimension scheitert allerdings bereits im Fall $n = 3$, wie VIGNÉRAS in [Vig80] zeigen konnte, indem er Mannigfaltigkeiten der Dimension 3 konstruierte, die nicht einmal vom gleichen Homotopietyp sind, jedoch das gleiche Spektrum bezüglich des LAPLACE-Operators besitzen.
Dieses Gegenbeispiel verneint somit die Titelfrage aus KAC' Paper „Can One Hear the Shape of a Drum?“ [Kac66], wenn man sie topologisch auffasst. Es lassen sich jedoch, wie wir gesehen haben, gewisse geometrische Informationen aus dem Spektrum des LAPLACE-Operators extrahieren, die von einiger Bedeutung sind.

7 Danksagungen

Ich bedanke mich für die Betreuung meiner Arbeit bei Prof. Dr. Matthias Lesch und Dr. Boris Vertman.
Ebenso bedanke ich mich für die Korrekturvorschläge zu meiner Arbeit bei Monika Barthelme und Christiane Fürst.

Literatur

[Ber92] Berline, Nicole; Getzler, Ezra; Vergne, Michèlle: Heat Kernels and Dirac Operators. 1992. Aufl.. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 1992.

[Eva10] Evans, Lawrence C.: Partial Differential Equations. 2. Aufl.. Heidelberg: American Mathematical Soc., 2010.

[Fra99] Francis, George K.; Weeks, Jeffrey R.: Conway's ZIP Proof. American Mathematical Monthly 106 (5), Mai 1999.

[Gri94] Grigis, Alain; Sjöstrand, Johannes : Microlocal Analysis for Differential Operators : An Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.

[Hir71] Hirzebruch, Friedrich ; Scharlau, Winfried: Einführung in die Funktionalanalysis. 1971. Mannheim Wien Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1971.

[Kac66] Kac, Mark: Can One Hear the Shape of a Drum?. American Mathematical Monthly 73 (4, part 2), April 1966.

[Kob63] Kobayashi, Shoshichi; Nomizu, Katsumi: Foundations of Differential Geometry. Volume 1. New York London: John Wiley & Sons, 1963.

[Lee06] Lee, John: Introduction to Smooth Manifolds. 2. Aufl.. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2012.

[Roe88] Roe, John: Elliptic operators, topology and asymptotic methods. 1. Aufl.. Longman Scientific & Technical, 1988.

[Rud91] Rudin, Walter: Functional Analysis. 2. Aufl.. New York: McGraw-Hill, 1991.

[Shu01] Shubin, M.A.: Pseudodifferential Operators and Spectral Theory. 2. Aufl.. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2001.

[Vig80] Vignéras, Marie-France: Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques. Annals of Mathematics (Annals of Mathematics) 112 (1), 1980.

[Wal89] Walter, Rolf: Differentialgeometrie. 2. Aufl.. Mannheim Wien Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1989.

[Wal96] Walter, Wolfgang: Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung. 6.Aufl.. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.

[Wer11] Werner, Dirk: Funktionalanalysis. 7. Aufl.. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

Symbolverzeichnis

$\approx$	Asymptotische Entwicklung, Seite 32
$*$	HODGE-$*$-Operator auf Differentialformen, Seite 3
Δ	LAPLACE-Operator, Seite 3
$\exp(-t\Delta)$	Lösungsoperator der Wärmeleitungsgleichung, Seite 28
$\exp_{p_0}$	Exponentialabbildung, Seite 9
κ	Skalare Krümmung, Seite 40
$\Lambda^k(T^*M)$	k-Formen auf M, Seite 2
dist	Geodätischer Abstand auf M, Seite 15
$\mathrm{dom}(A)$	Definitionsbereich eines Operators A, Seite 24
d	Äußere Ableitung, Seite 2
d^*	Adjungierte äußere Ableitung, Seite 3
θ_k	Koeffizientenfunktionen der asymptotischen Entwicklung des Wärmeleitungskerns auf der Diagonalen, Seite 42
$C^\infty(M)$	Glatte Funktionen auf M mit zugehöriger Topologie, Seite 3
C^r	Klasse der r-mal stetig differenzierbaren Abbildungen, Seite 2
$f(\Delta)$	Durch die Wirkung von f auf $\sigma\Delta$ definierter Operator, Seite 26
G	RIEMANNsche Metrik in Matrixdarstellung, Seite 2
g	RIEMANNsche Metrik, Seite 2
g^{ij}	Einträge der Matrix G^{-1}, Seite 2
g_{ij}	Einträge der Matrix G, Seite 2
$H^k(M)$	SOBOLEW-k-Raum auf M, Seite 22
$k(t,p,q)$	Wärmeleitungskern, Seite 30
$L(\gamma)$	Länge des Weges γ, Seite 15
R	Radialfeld, Seite 12
S_n	Symmetrische Gruppe der Ordnung n, Seite 40
vol_g	Volumenform auf M, Seite 2