Meromorphe Funktionen zu vorgegebenem Null- und Polstellenverhalten

Doris Benda

Geboren am 08. März 1993 in Bad Neustadt an der Saale

24. Juli 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Matthias Lesch und Dr. Boris Vertman

Mathematisches Institut

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Einleitung

Holomorphe und meromorphe Funktionen sind die Grundbausteine der komplexen Analysis. Diese genauer zu studieren ist essentiell um einen tieferen Einblick in die komplexe Analysis zu erlangen. Im Detail befasst sich die Arbeit damit holomorphe bzw. meromorphe Funktionen mit bestimmten vorgegebenen Eigenschaften zu konstruieren. Dabei werden im holomorphen Fall die Nullstellenlage und -ordnung, während im meromorphen Fall die Polstellen mit ihren jeweiligen Hauptteilen vorgegeben. Es scheint verblüffend, dass trotz dieser umfangreichen Vorgaben es immer möglich ist eine holomorphe bzw. meromorphe Funktion zu konstruieren, die diese Bedingungen erfüllt. In der Literatur sind die beiden Problemstellungen und ihre jeweiligen Lösungen als „Produktsatz von Weierstrass“ und als „Partialbruchsatz von Mittag-Leffler“ bekannt. Beide Sätze werden in der vorliegenden Arbeit noch auf beliebige Bereiche in $\mathbb{C}$ verallgemeinert.

Im Gegensatz zur üblichen Herangehensweise in der Literatur werden der holomorphe und meromorphe Fall nicht nacheinander betrachtet, sondern parallel nebeneinander. Dadurch sollen die beiden Beweisstränge leichter miteinander vergleichbar sein und das Verständnis verbessert werden.

Dem Leser werde empfohlen ab Kapitel 2 zuerst alle linken Seiten zu Lesen um den Beweis für holomorphe Funktionen vollständig durchzugehen. Im Anschluss daran sollten die rechten Seiten gelesen werden, die sich mit dem meromorphen Fall beschäftigen. Wobei dabei immer auch auf die linke Seite geachtet werden sollte um die Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede in den Beweissträngen zu erkennen. Insbesondere auf die Unterschiede sollte geachtet werden, da diese auf Besonderheiten im meromorphen Fall hinweisen und so das Verständnis des Beweises erleichtern.

In dieser Arbeit werden grundlegende Kenntnisse in dem Gebiet der komplexen Analysis vorausgesetzt. Nichtsdestotrotz werden alle in der Arbeit verwendeten Sätze aus der Vorlesung „komplexe Analysis“ im Anhang angegeben. Dabei wird immer auf die entsprechenden Kapitel der als Primärliteratur verwendeten Bücher „Funktionentheorie 1 [Rem02] und 2 [RS07]“ von Remmert und Schumacher verwiesen. Auch der Hauptteil der Arbeit stützt sich auf die Kapitel 3, 4 und 6 aus dem Buch „Funktionentheorie 2 [RS07]“ von Remmert und Schumacher.

Inhaltsverzeichnis

1 Lokale Endlichkeit der Null- und Polstellenmenge meromorpher Funktionen 5

2 Produktsatz von Weierstrass für $\mathbb{C}$ 7

3 Partialbruchsatz von Mittag-Leffler für $\mathbb{C}$ 7

4 Beispiele 15
4.1 Übersicht verschiedener Weierstrassprodukte 15
4.2 Übersicht verschiedener Mittag-Leffler-Reihen 15
4.3 Weierstrassprodukt zu $\frac{1}{\Gamma}$ 16
4.4 Mittag-Leffler-Reihe zu $\frac{\pi}{sin(\pi\ z)}$ 16

5 Produktsatz von Weierstrass für beliebige Bereiche $D \subset \mathbb{C}$ 18

6 Partialbruchsatz von Mittag-Leffler für beliebige Bereiche $D \subset \mathbb{C}$ 18

7 Folgerungen 24
7.1 Darstellung holomorpher Funktionen als Weierstrassprodukte 24
7.2 Darstellung meromorpher Funktionen als Mittag-Leffler-Reihen 24
7.3 Darstellung meromorpher Funktionen als Quotienten 25
7.4 Anschmiegungssatz von Mittag-Leffler 25

8 Beispiele 26
8.1 Beschränkte Funktionen im Einheitskreis 26
8.2 Hauptsatz der Idealtheorie für holomorphe Funktionen in einem Gebiet G 26

9 Anhang 29
9.1 Bekannte Sachverhalte 29
9.1.1 Unendliche Produkte und Reihen 29
9.1.2 Verschiedene Konvergenzbegriffe 30
9.1.2.1 Gleichmäßige Konvergenz 30
9.1.2.2 Kompakte Konvergenz 30
9.1.2.3 Normale Konvergenz 30
9.1.3 Logarithmische Ableitung 32
9.1.4 Meromorphe Funktionen 32
9.2 Bekannte Sätze 33
9.2.1 Identitätssatz für holomorphe Funktionen 33
9.2.2 Lokal endliche Mengen 33
9.2.3 Ausschöpfungseigenschaft offener Mengen in $\mathbb{C}$ 33
9.2.4 Folgerung aus dem Konvergenzfortsetzungssatz von Weierstrass 33
9.2.5 Cauchysche-Ungleichung für Laurententwicklungen 34
9.2.6 Existenzsatz für holomorphe Logarithmen 34
9.2.7 Jensensche Ungleichung 34

Verzeichnisse 34
Literaturverzeichnis 35
Symbolverzeichnis 35
Glossary 36

1 Lokale Endlichkeit der Null- und Polstellenmenge meromorpher Funktionen

Zuallererst werden die besonderen Eigenschaften der Null- und Polstellenmenge einer meromorphen Funktion untersucht. Dafür betrachten wir zuerst den Sonderfall einer holomorphen Funktion.

Satz 1.1
Die Nullstellenmenge $N(h)$ einer im Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphen Funktion h ist entweder komplett G (wenn $h \equiv 0$) oder aber sie ist lokal endlich.

Beweis:
Da holomorphe Funktionen stetig sind, ist das Urbild $h^{-1}(0)$ abgeschlossen in G. Wäre die Nullstellenmenge nicht lokal endlich, dann gäbe es eine unendliche Folge in $N(h)$ dessen Häufungspunkt in $h^{-1}(0)$ liegt. Da h den gleichen Wert wie die konstante Nullfunktion auf dieser Folge und dem Häufungspunkt annimmt, stimmt h nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen [9.11] mit der konstanten Nullfunktion auf dem Gebiet G überein.

□

Betrachtet man nun den Träger der Ordnungen T:= $\{z \in \mathbb{C},\ o_h(z) \neq 0\}$ einer holomorphen Funktion $h \neq 0$, so ist dieser nach der obigen Bemerkung lokal endlich, denn $o_h(z) \neq 0$ wenn $z \in N(h)$ ist.
Bei meromorphen Funktionen m ist der Sachverhalt noch einfacher, da bei der Definition des Begriffes „Meromorphie“ [9.1.4] die lokale Endlichkeit der Polstellenmenge $P(f)$ gefordert wird. Somit ist der Träger einer meromorphen Funktion auch lokal endlich.

Definition 1.2 (Divisor)
Eine Abbildung Div : $D \to \mathbb{Z}$ mit lokal endlichem Träger in dem beliebigen Bereich $D \subset \mathbb{C}$ heißt Divisor in D.

Definition 1.3 (Hauptdivisor „Divisor einer meromorphen Funktion“)
Sei m eine meromorphe Funktion mit lokal endlicher Nulstellen- und Polstellenmenge in D, dann bildet die Funktion (m): $z \to \begin{cases} o_m(z) & z \in N(m) \\ -o_m(z) & z \in P(m) \\ 0 & sonst \end{cases}$ einen Hauptdivisor in dem beliebigen Bereich $D \subset \mathbb{C}$. Der Träger dieses Hauptdivisors ist die Null- und Polstellenmenge von m.

Da wir im Folgenden holomorphe Funktionen zu vorgegebenem Nullstellenverhalten (d.h. die Lage der Nullstellen, als auch deren Ordnung ist vorgegeben) konstruieren

wollen, betrachten wir positive Divisoren $Div^+ : D \to \mathbb{N}_0$. Als erstes wird zu jedem beliebigen vorgegebenen Div^+ eine holomorphe Funktion h gesucht, mit $o_h(z) = Div^+(z)$. Dies wird im Kapitel 2 mithilfe von Weierstrassprodukten (WP) realisiert. Im Kapitel 3 wenden wir ein ähnliches Prinzip, bestehend aus Mittag-Leffler-Reihen, an um meromorphe Funktionen zu vorgegebenem Hauptteilverhalten zu konstruieren. Durch die Vorgabe des endlichen Hauptteils der Laurententwicklung in den Polen ist auch die Lage sowie die Ordnung der Polstellen implizit gegeben.
Durch Kombination der beiden Konstruktionsweisen in Kapitel 2 und 3 lassen sich meromorphe Funktionen zu vorgegebenen Null- und Polstellenverhalten sowie vorgegebenen Hauptteilentwicklungen konstruieren.

2 Produktsatz von Weierstrass für $\mathbb{C}$

Definition 2.1 (Divisor)
Eine Abbildung Div: $D \to \mathbb{Z}$ mit lokal endlichem Träger in dem beliebigen Bereich $D \subset \mathbb{C}$ heißt Divisor in D.

Definition 2.2 (Hauptdivisor „Divisor einer meromorphen Funktion")
Sei m eine meromorphe Funktion mit lokal endlicher Nulstellen- und Polstellenmenge in D, dann bildet die Funktion (m): $z \to \begin{cases} o_m(z) & z \in N(m) \\ -o_m(z) & z \in P(m) \\ 0 & sonst \end{cases}$
einen Hauptdivisor in dem beliebigen Bereich $D \subset \mathbb{C}$. Der Träger dieses Hauptdivisors ist die Null- und Polstellenmenge von m.

Ziel

Finde zu jedem beliebigen Divisor $Div^+ : D \to \mathbb{N}_0$ eine holomorphe Funktion h im Bereich $D \subset \mathbb{C}$ mit $o_h(z) = Div^+(z)$. Div^+ beschreibt somit das gewünschte Nullstellenverhalten von h (d.h. die Lage der Nullstelle und die Ordnung).

---

3 Partialbruchsatz von Mittag-Leffler für $\mathbb{C}$

Es sei T eine lokal endliche Menge in einem Bereich $D \subset \mathbb{C}$, die die Lage der Polstellen vorgibt. Jedem Element $T_v \in T$ sei zusätzlich ein „endlicher Hauptteil" [9.1.4] $H_v(z) = \sum_{n=1}^{m_v} a_{v,n}(z - T_v)^{-n} \neq 0$ zugeordnet, wobei m_v die endliche Ordnung der Polstelle T_v angibt. Dabei sei $H_v \equiv 0$, wenn $T_v \notin T$ ist.

Definition 3.1 (Hauptteilverteilung)
Eine Abbildung HV: $D \to H_v$ mit lokal endlichem Träger in dem beliebigen Bereich $D \subset \mathbb{C}$ heißt Hauptteilverteilung in D.

Es gibt über die logarithmische Ableitung [9.8] einen Zusammenhang zwischen positiven Divisoren und Hauptteilverteilungen.

Lemma 3.2
Ist Div^+ der Hauptdivisor von $f \in O(D)$, dann hat die logarithmische Ableitung $\frac{f'}{f} \in M(D)$ als Hauptteilverteilung im Punkt $d \in D$ den Wert $HV(d) = \frac{Div^+(d)}{z-d}$.

Beweis:
Hat f im Punkt d keine Nullstelle (d.h. $Div^+(d) = 0$), dann hat die logarithmische Ableitung auch keinen Pol an dieser Stelle, weshalb auch $HV(d) = 0$ gilt. Angenommen f hat im Punkt d eine $Div^+(d)$-fache Nullstelle, dann ist f von der Form $f(z) = (z-d)^{Div^+(d)}\, g(z)$ mit $g(d) \neq 0$ und somit lautet die logarithmische Ableitung $\frac{f'}{f} = \frac{Div^+(d)}{z-d} + v(z)$, wobei $v(z)$ im Punkt d holomorph ist. $\square$

Ziel

Finde zu jeder beliebigen Hauptteilverteilung $HV : D \to H_v$ eine meromorphe Funktion m im Bereich $D \subset \mathbb{C}$, die in jeder Polstelle den zugehörigen Hauptteil $H_v(z)$ hat. Durch die endlichen Hauptteile sind insbesondere das Polstellenverhalten von m festgelegt (d.h. die Lage und Ordnung der Polstellen).

---

1. Fall (Träger $T \neq \emptyset$ von Div^+ ist endlich)
Dann erfüllen die folgenden Polynome das vorgeschriebene Verhalten.

$$\prod_{d \in T} (z-d)^{Div^+(d)} \qquad bzw. \qquad z^{Div^+(0)} \prod_{d \in T \backslash 0} (1 - \frac{z}{d})^{Div^+(d)}$$

Bemerkungen:

- Der Faktor $z^{Div^+(0)}$ soll im obigen Produkt nur auftreten, wenn $0 \in T$ ist. Zur Vereinfachung legen wir ab jetzt fest, dass $0 \notin T$ ist, da der Faktor $z^{Div^+(0)}$ an jedes (unendliche) Produkt multipliziert werden kann, ohne die Konvergenz des Produktes zu beeinflussen. D.h. konvergiert das $\prod \ldots$, dann konvergiert auch das Produkt $z^{Div^+(0)} \cdot \prod \ldots$. Somit kann das Nullstellenverhalten im Punkt 0 auch noch am Ende des Kapitels 2 durch das Einfügen des zusätzlichen Vorfaktors $z^{Div^+(0)}$ erreicht werden.

- $Div^+ \equiv 0$ wird durch die Funktion $h \equiv 0$ erfüllt. Daher betrachten wir im Folgenden nur noch positive Divisoren $Div^+ \neq 0$. Damit ist jeder Träger $T \neq \emptyset$.

- Ab jetzt sei $D = \mathbb{C}$. Die Verallgemeinerung auf beliebige Bereich $D \subset \mathbb{C}$ wird im Kapitel 5 behandelt. Damit aber nicht jede Definition im Kapitel 5 wiederholt werden muss, schreiben wir schon direkt alles für D auf.

- Da T lokal endlich ist, befindet sich in jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ nur endlich viele Punkte von T [9.12]. Da $\mathbb{C}$ als Vereinigung von abzählbar unendlich vielen kompakten Teilmengen dargestellt werden kann [9.13], ist T abzählbar, also lassen sich die Elemente in T nach ihrem Betrag anordnen.

  $$|S_1| \leq |S_2| \leq |S_3| \ldots \qquad S_n \in T$$

  Das Produkt lässt sich somit über einen Zähler n darstellen.

  $$\prod_{d \in T} (1 - \frac{z}{d}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{S_n})$$

---

1. Fall (Träger $T \neq \emptyset$ von HV ist endlich)
Dann erfüllen die folgenden Partialbruchreihen das vorgeschriebene Verhalten.

$$\sum_{T_v \in T} H_v(z) = H_0(z) + \sum_{T_v \in T \setminus 0} H_v(z) \qquad bzw. \qquad \sum_{\substack{n=1,\\ T_v \in T}}^{m_v} a_{v,n}(z - T_v)^{-n}$$

Bemerkungen:

- Der Summand $H_0(z)$ soll in der obigen Reihe nur auftreten, wenn $0 \in T$ ist. Zur Vereinfachung legen wir ab jetzt fest, dass $0 \notin T$ ist, da der Summand $H_0(z)$ an jede (unendliche) Reihe addiert werden kann, ohne die Konvergenz der Reihe zu beeinflussen. D.h. konvergiert die Reihe $\sum \ldots$ in $D \setminus \{T_0, T_1, \ldots\}$, dann konvergiert auch die Reihe $H_0(z) + \sum \ldots$ in $D \setminus \{T_0, T_1, \ldots\}$. Somit kann das Verhalten im Punkt 0 auch noch am Ende des Kapitels 3 durch das Einfügen des zusätzlichen Vorsummanden $H_0(z)$ erreicht werden.

- $HV \equiv 0$ wird durch die Funktion $m \equiv 0$ erfüllt. Daher betrachten wir im Folgenden nur noch Hauptteilverteilungen $HV \neq 0$. Damit ist jeder Träger $T \neq \emptyset$.

- Ab jetzt sei $D = \mathbb{C}$. Die Verallgemeinerung auf beliebige Bereich $D \subset \mathbb{C}$ wird im Kapitel 6 behandelt. Damit aber nicht jede Definition im Kapitel 6 wiederholt werden muss, schreiben wir schon direkt alles für D auf.

- Da T lokal endlich ist, befindet sich in jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ nur endlich viele Punkte von T [9.12]. Da $\mathbb{C}$ als Vereinigung von abzählbar unendlich vielen kompakten Teilmengen dargestellt werden kann [9.13], ist T abzählbar, also lassen sich die Elemente in T nach ihrem Betrag anordnen.

  $$|T_1| \leq |T_2| \leq |T_3| \ldots \qquad T_v \in T$$

  Die Partialbruchreihe lässt sich somit über einen Zähler v darstellen.

  $$\sum_v H_v(z) = \sum_{v,n} a_{v,n}(z - T_v)^{-n}$$

---

2. Fall (Träger T von Div^+ ist unendlich)
Dann konvergieren die obigen Produkte nicht mehr unbedingt.

Idee

Es werden zusätzlich „konvergenzerzeugende Faktoren" der Form $e^{P_n(z)}, \quad P_n(z) \in O(\mathbb{C})$ für jede einzelne Nullstelle eingefügt. Die $P_n(z)$ sollen dabei so gewählt werden, dass das Produkt wieder konvergiert.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{(1 - \frac{z}{S_n}) \cdot e^{P_n(z)}\}^{Div^+(S_n)} < \infty \tag{1}$$

Außerdem wollen wir bestimmte Konvergenzeigenschaften des Produktes sicherstellen wie z.B. die Umsortierbarkeit der Faktoren (vgl. hierzu die Eigenschaften der normalen Konvergenz [9.1.2.3]) und wählen daher einen sehr starken Konvergenzbegriff, nämlich den der normalen Konvergenz eines Produktes (vgl. hierzu Konvergenz von Produkten [9.1.1] und normale Konvergenz von Produkten [9.1.2.3]).

Da es sehr schwierig ist die Konvergenz des Produktes (1) zu zeigen, wenn alle $P_n(z)$ beliebige ganze Funktionen sind, schränken wir uns in dessen Wahl weiter ein, indem wir fordern
$P_n(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^{l_n}}{l_n} \qquad l_n \in \mathbb{N}$
Trotz dieser Einschränkung wird die normale Konvergenz des Produktes erreicht (Beweis folgt).

---

2. Fall (Träger T von HV ist unendlich)
Dann konvergieren die obigen Partialbruchreihen nicht mehr unbedingt.

Idee

Es werden zusätzlich „konvergenzerzeugende Summanden“ der Form $G_v(z) \in O(\mathbb{C})$ für jeden einzelnen Hauptteil eingefügt. Die $G_v(z)$ sollen dabei so gewählt werden, dass die Partialbruchreihe wieder konvergiert.

$$\sum_v (H_v(z) - G_v(z)) < \infty \tag{2}$$

Außerdem wollen wir bestimmte Konvergenzeigenschaften der Reihe sicherstellen wie z.B. die Umsortierbarkeit der Summanden (vgl. hierzu die Eigenschaften der normalen Konvergenz [9.1.2.3]) und wählen daher einen sehr starken Konvergenzbegriff, nämlich den der normalen Konvergenz einer Reihe (vgl. hierzu Konvergenz von Reihen [9.1.1] und normale Konvergenz von Reihen [9.1.2.3]).

Da es sehr schwierig ist die Konvergenz der Reihe (2) zu zeigen, wenn alle $G_v(z)$ beliebige ganze Funktionen sind, schränken wir uns in deren Wahl weiter ein. Der Hauptteil $H_v \in O(\mathbb{C} \setminus T_{v\neq 0})$ ist in der offenen Kreisscheibe um 0 mit Radius $|T_v|$ holomorph und kann dort in einer konvergenten Taylorreihe entwickelt werden. Wir wählen für $G_v(z)$ nun jeweils das l_v-te Taylorpolynom genannt P_{l_v}
$G_v(z) = P_{l_v} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(z) + \frac{f''(0)}{2!}(z)^2 + \ldots + \frac{f^{(l_v)}(0)}{l_v!}(z)^{l_n}$
Trotz dieser Einschränkung wird die normale Konvergenz der Reihe erreicht (Beweis folgt).

Konkretisieren wir durch Einbeziehung der bisherigen Überlegungen die Zielsetzung noch einmal:

Zu jedem beliebigen positiven Divisor $Div^+ : D \to \mathbb{N}_0 \quad (Div^+ \neq 0)$ mit Träger $|S_1| \leq |S_2| \leq |S_3| \leq \ldots$ sei ein **Weierstrassprodukt** der Form

$$f(z) = z^{Div^+(0)} \prod_{n \geq 1} E_{l_n} \left(\frac{z}{S_n} \right)^{Div^+(S_n)} \tag{3}$$

gesucht, wobei f ein **Weierstrassprodukt** zum Divisor Div^+ in D ist, wenn

- $E_{l_n}(\frac{z}{S_n})$ ein **Weierstrassfaktor** der Stufe l_n zur Nullstelle S_n ist und
- das Produkt f normal konvergiert in D.

Definition 2.3 (Weierstrassfaktor)
Die ganzen Funktionen $E_{l_n}(z)$ heißen Weierstrassfaktoren der Stufe l_n. Sie sind wie folgt aufgebaute:
$E_0(z) = 1 - z$
$E_{l_n}(z) = (1 - z)\ \exp(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^{l_n}}{l_n}) \qquad n \in \mathbb{N}$

Lemma 2.4
Ein Weierstrassfaktor $E_{l_n}(\frac{z}{S_n})$ der Stufe l_n zur Nullstelle S_n ist holomorph und nullstellenfrei in $D \setminus \{S_n\}$ und hat die Nullstellenordnung 1 im Punkt S_n ($n \in \mathbb{N}$).

Beweis:
$E_{l_n}(\frac{z}{S_n}) = (1 - \frac{z}{S_n})\ \exp(\frac{z}{S_n} + \frac{(\frac{z}{S_n})^2}{2} + \ldots + \frac{(\frac{z}{S_n})^{l_n}}{l_n})$ ist als Produkt holomorpher Funktionen wieder holomorph. Die e-Funktion hat keine Nullstelle, deshalb beschreibt der Faktor $(1 - \frac{z}{S_n})$ das Nullstellenverhalten von $E_{l_n}(\frac{z}{S_n})$ und es gilt somit $E_{l_n}(\frac{z}{S_n})$ ist nullstellenfrei in $D \setminus \{S_n\}$ und $o_{E_{l_n}(\frac{z}{S_n})}(S_n) = 1$.
$\square$

Konkretisieren wir durch Einbeziehung der bisherigen Überlegungen die Zielsetzung noch einmal:

Zu jeder beliebigen Hauptteilverteilung $HV : D \to H_v \quad (HV \neq 0)$ mit Träger $|T_1| \leq |T_2| \leq |T_3| \leq \ldots$ sei eine **Mittag-Leffler-Reihe** der Form

$$f(z) = H_0(z) + \sum_{v=1}^{\infty} (H_v(z) - P_{l_v}(z)) \tag{4}$$

gesucht, wobei f eine **Mittag-Leffler-Reihe** zur Hauptteilverteilung HV in D ist, wenn

- $P_{l_v}(z)$ das l_v-te **Taylorpolynom** der Taylorentwicklung vom Hauptteil H_v um 0 ist.
- die Reihe f normal konvergiert in $D \setminus \{T_0, T_1, \ldots\}$.

Definition 3.3 (l_v-te Taylorpolynom)
Das l_v-te Taylorpolynom $P_{l_v}(z)$ an der Entwicklungsstelle 0 ist definiert durch:
$P_{l_v} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(z) + \frac{f''(0)}{2!}(z)^2 + \ldots + \frac{f^{(l_v)}(0)}{l_v!}(z)^{l_v}$

Lemma 2.5

f ist die gesuchte Funktion. Sie ist holomorph und besitzt an den Stellen $S_n \in T$ die Ordnung $Div^+(S_n)$.

Beweis:

Da alle $E_{l_n}(\frac{z}{S_n})$ holomorph sind und f normal konvergiert, ist auch f holomorph nach Aussage (21) im Anhang. Außerdem überträgt sich das Nullstellenverhalten der einzelnen Faktoren auf die Grenzfunktion nach Aussage (25) im Anhang [A]. D.h. Wir können mit dem Lemma (2.4) davon ausgehen, dass f in jedem Punkt $S_n \in T$ eine Nullstelle der Ordnung $Div^+(S_n)$ hat.

$\square$

Somit ist f die gesuchte holomorphe Funktion, falls wir noch zeigen, dass das Weierstrassprodukt in D normal konvergiert. Dafür benötigen wir noch einige Abschätzungen.

[A] Versuchen wir später holomorphe Funktionen auf beliebige Bereiche $D \subset \mathbb{C}$ zu konstruieren. So müssen wir die Aussage (25) aus dem Anhang auf jeden einzelnen Zusammenhang von D anwenden um dieselben Resultate ziehen zu können. Der Zusammenhang ist dabei wichtig, weil im Beweis auf die Implikation ii)=>iii)=>i) des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen [9.11] zurückgegriffen wird. Wobei die Implikation iii)=>i) nur für zusammenhängende Bereiche gilt.
(vgl. hierzu das Gegenbeispiel für den nicht zusammenhängenden Bereich aus Kreisscheiben $D = B_1(0) \cap B_1(2)$. $\quad f(z) := 0 \ für \ z \in D \qquad g(z) := 0 \ für \ z \in B_1(0), \qquad g(z) := 1 \ für \ z \in B_1(2)$

Damit erfüllen f und g die Bedingung iii) aber offensichtlich ist $f \neq g$)

Lemma 3.4
f ist die gesuchte Funktion. Sie ist holomorph in $D \setminus \{T_0, T_1, \ldots\}$ und besitzt an den Stellen $T_v \in T$ die vorgegebenen Hauptteile H_v.

Beweis:
Da alle Summanden $H_v(z) - P_{l_v}(z)$ in $D \setminus \{T_0, T_1, \ldots\}$ holomorph sind und f normal konvergiert, ist auch f holomorph nach Aussage (21). Um jede Polstelle T_k gibt es eine Umgebung $U \subset D$ in der alle Summanden $H_v(z) - P_{l_v}(z)$ holomorph sind außer der Hauptteil H_k von T_k. Daher konvergiert die Reihe $\sum\limits_{v \neq k} (H_v - P_{l_v})$ ohne diesen einen Summanden $H_k - P_{l_k}$ in U kompakt gegen eine Funktion $\overline{f_k} \in O(U)$ (Folgerung aus dem Konvergenzfortsetzungssatz von Weierstrass [9.14]). In $U \setminus \{T_k\}$ gibt es somit eine Identitätsgleichung zwischen f und $\overline{f_k}$, die auf der rechten Seite aus holomorphen Funktionen in U (insbesondere holomorph in T_k) besteht:

$$f - H_k = \overline{f_k} - P_{l_k}$$

. Somit muss auch die linke Seite holomorph in T_k sein. Dies ist der Fall, wenn H_k der Hauptteil von f ist. Somit verändern die eingefügten konvergenzerzeugenden Polynome P_{l_k} nicht das Hauptteil Verhalten von f.

□

Somit ist f die gesuchte meromorphe Funktion, falls wir noch zeigen, dass die Mittag-Leffler-Reihe in $D \setminus \{T_0, T_1, \ldots\}$ normal konvergiert.

Lemma 2.6 (Ableitung der Weierstrassfaktoren)
$E_n'(z) = -z^n \cdot \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{z^j}{j}\right)$

Beweis:
Das Argument der Exponentialfunktion sei mit $arg_n(z)$ bezeichnet.
$arg_n(z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^n}{n}$
Dann gilt: $(1-z)arg_n{}'(z) = 1 - z^n$ (Teleskopsumme)
Wird E_n mithilfe der Produktregel abgeleitet und mit obiger Teleskopsumme vereinfacht, so erhält man den gewünschten Ausdruck für $E_n'(z)$.

$$\begin{aligned} E_n'(z) &= -\exp(arg_n(z)) + (1-z)\, arg_n{}'(z)\, \exp(arg_n(z)) \\ &= -\exp(arg_n(z)) + (1-z^n)\, \exp(arg_n(z)) = -z^n\, \exp(arg_n(z)) \end{aligned}$$

□

Lemma 2.7 (Abschätzungen)

$$|E_n'(tz)| \leq -|z|^n E_n'(t) \quad \textit{für } t \geq 0 \quad |z| \leq 1 \tag{5}$$

$$|E_n(z) - 1| \leq |z|^{n+1} \qquad \textit{für } |z| \leq 1 \tag{6}$$

Beweis: (5)
Für $t \geq 0 \qquad |z| \leq 1$ gilt

$$|E_n'(tz)| \overset{[2.6]}{=} |-(tz)^n \exp(\sum_{j=1}^{n} \frac{(tz)^j}{j})| \overset{|e^w| \leq e^{|w|} \quad \forall w \in \mathbb{C}}{\leq} |z|^n t^n \exp(|\sum_{j=1}^{n} \frac{(tz)^j}{j}|) \overset{|z|\leq 1}{\leq} |z|^n t^n \exp(\sum_{j=1}^{n} \frac{t^j}{j}) \overset{[2.6]}{=} -|z|^n E_n'(t)$$

□

Beweis: (6)

$$|E_n(z) - 1| = |\int_0^1 \frac{d}{dt} E_n(tz)dt| = |\int_0^1 zE_n'(tz)dt| \leq |z| \int_0^1 |E_n'(tz)|dt \overset{5}{\leq} -|z|^{n+1} \int_0^1 E_n'(t)dt = -|z|^{n+1}(E_n(1) - E_n(0)) = -|z|^{n+1}(0-1) = |z|^{n+1}$$

□

Da die Nullstellenmenge T lokal endlich ist, können wir immer größer werdende kompakte Kreise um 0 wählen, die nur endlich viele Elemente aus T enthalten [9.12]. Somit geht der Betrag der Folge $|S_n|$ gegen unendlich.

$$\lim_{n\to\infty} |S_n| \to \infty \tag{7}$$

Mit diesen Abschätzungen lässt sich der Produktsatz von Weierstrass beweisen.

Lemma 2.8 (Vorbemerkung zum Produktsatz von Weierstrass)
Angenommen es existiert eine Folge natürlicher Zahlen $(l_n) \subset \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} Div^+(S_n) \left|\frac{r}{S_n}\right|^{l_n+1} < \infty \qquad \forall \text{ reellen } r > 0 \tag{9}$$

Dann konvergiert das Weierstrassprodukt $f(z) = z^{Div^+(0)} \prod_{n\geq 1} E_{l_n}(\frac{z}{S_n})^{Div^+(S_n)}$ normal in $\mathbb{C}$.

Beweis:
Wähle eine beliebige Kreisscheibe $B_r(0)$. Für alle $z \in B_r(0)$ und $|S_n| \geq r$ gilt:

$$|E_{l_n}\left(\frac{z}{S_n}\right) - 1| \underset{|z|\leq|S_n|}{\overset{(6)}{\leq}} \left|\frac{z}{S_n}\right|^{l_n+1} \underset{|z|\leq r}{\leq} \left|\frac{r}{S_n}\right|^{l_n+1} \tag{10}$$

Mit der Gleichung (7) $\lim_{n\to\infty} |S_n| \to \infty$ besteht die Möglichkeit einen Index n(r) für jedes beliebige r zu wählen, sodass $|S_n| \geq r$ für alle n > n(r). Daher gilt:

$$\sum_{n>n(r)} Div^+(S_n)\, |E_{l_n}\left(\frac{z}{S_n}\right) - 1|_{B_r(0)} \overset{(10)}{\leq} \sum_{n>n(r)} Div^+(S_n) \left|\frac{r}{S_n}\right|^{l_n+1} < \infty \tag{11}$$

Jedes beliebig gewählte Kompaktum K liegt in einem Ball $B_r(0)$ für ein genügend großes $r > 0$. Die Gleichung (11) zeigt also, dass für jedes Kompaktum K das Produkt $f(z)$ kompakt konvergiert. Mit der Aussage (22) folgt damit die normale Konvergenz. $\square$

Da die Polstellenmenge T lokal endlich ist, können wir immer größer werdende kompakte Kreise um 0 wählen, die nur endlich viele Elemente aus T enthalten [9.12]. Somit geht der Betrag der Folge $|T_v|$ gegen unendlich.

$$\lim_{v \to \infty} |T_v| \to \infty \tag{8}$$

Satz 2.9 (Produktsatz von Weierstrass)
Wählt man für $l_n = n-1+Div^+(S_n)$ so hat man ein mögliches Weierstrassprodukt zum Divisor Div^+ gefunden.

$$f(z) = z^{Div^+(0)} \prod_{n\geq 1} E_{l_n}\left(\frac{z}{S_n}\right)^{Div^+(S_n)}$$

Beweis:
Nach der Gleichung (7) $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n| = \infty$ lässt sich zu jedem $r > 0$ ein $n(r) \in \mathbb{N}$ finden, sodass $|S_n| > 2r$ für $n > n(r)$ ist. Daraus folgt:

$$\sum_{n>n(r)} Div^+(S_n) \left|\frac{r}{S_n}\right|^{n+Div^+(S_n)} \leq \sum_{n>n(r)} Div^+(S_n) \left(\frac{1}{2}\right)^{Div^+(S_n)} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq K^{Ⓑ} \sum_{n>n(r)} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$$

Nach Lemma [2.8] ist f somit ein Weierstrassprodukt zum Divisor Div^+. $\square$

Ⓑ Die Funktion $g(x) \mapsto x\,2^{-x}$ hat ein globales Maximum bei $x = \frac{1}{\ln(2)}$, da $g'(x) = 2^{-x} - x\,2^{-x}\ln(2)$ ist. Somit wird $g'(x) = 0$, wenn $x \cdot \ln(2) = 1$ ist. Verwende nun die zweite Ableitung um zu verifizieren, dass es sich im Punkt $x = \frac{1}{\ln(2)}$ um ein Maximum handelt. Das Maximum sei im weiteren Verlauf mit $K = g\left(\frac{1}{\ln(2)}\right) = \frac{1}{\ln(2)} 2^{-\frac{1}{\ln(2)}}$ bezeichnet.

Ⓒ Es kann $|H_v(z) - P_{l_v}(z)| \leq$ Konstante $\cdot K_v$ auch durch einen anderen Term K_v abgeschätzt werden (siehe Beispiel 4.4 dort ist $K_v = \frac{1}{v^2}$). Hauptsache $\sum |H_v(z) - P_{l_v}(z)| \leq$ Konstante $\cdot \sum K_v < \infty$

Satz 3.5 (Partialbruchsatz von Mittag-Leffler)
Wählt man das Taylorpolynom $P_{l_v}(z)$, sodass $|H_v(z) - P_{l_v}(z)| \leq 2^{-v}$ © für alle z mit $|z| \leq \frac{1}{2}|T_v|$. Dann hat man eine mögliche Mittag-Leffler-Reihe zur Hauptteilverteilung H_v gefunden.

$$f(z) = H_0(z) + \sum_{v=1}^{\infty}(H_v(z) - P_{l_v}(z))$$

Beweis:
Die Taylorpolynome konvergieren kompakt gegen ihre Taylorreihenentwicklung $\lim_{v\to\infty} P_{l_v} = H_v$ in $B_{\frac{1}{2}|T_v|}(0)$. Daher findet man für jedes $v \geq 1$ in der kompakten Kreisscheibe $|z| \leq \frac{1}{2}|T_v|$ ein $l_v \in \mathbb{N}$, sodass $|H_v(z) - P_{l_v}(z)| \leq 2^{-v}$ ist. Nach Gleichung (8) $\lim_{v\to\infty} |T_v| = \infty$ geht auch der Radius der Kreisscheiben $B_{\frac{1}{2}|T_v|}(0)$ gegen unendlich. Somit liegt jedes beliebige Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ in fast allen Kreisscheiben $B_{\frac{1}{2}|T_v|}(0)$. Damit lässt sich für jedes K ein $n(K)$ finden, sodass die folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{v\geq n(K)} |H_v(z) - P_{l_v}(z)|_K \leq \sum_{v\geq n(K)} 2^{-v} < \infty.$$

Mit Aussage (22) konvergiert die Reihe in $\mathbb{C}\setminus\{T_0, T_1, \ldots\}$ normal. f ist also eine Mittag-Leffler-Reihe zur Hauptteilverteilung HV.

$\square$

4 Beispiele für Weierstrassprodukte

4.1 Übersicht verschiedener Weierstrassprodukte

- Sinusprodukt

  $$\frac{sin(\pi z)}{\pi} = z \prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = z \prod_{n\geq 1}\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right] = z \prod_{n\geq 1} E_1\left(\frac{z}{n}\right)E_1\left(\frac{-z}{n}\right)$$

  ist das Weierstrassprodukt, das in jedem Punkt $n \in \mathbb{Z}$ eine einfache Nullstelle hat. Als „konvergenzerzeugende Faktoren“ dienen die Weierstrassfaktoren der Stufe 1.

- Gitterdivisoren

  Definition 4.1 (Gitter)
  Sind $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linear unabhängig (betrachtet als Vektoren im $\mathbb{R}^2$), so bezeichnet die Menge $\Omega := \{\omega = m\,\omega_1 + n\,\omega_2;\; m, n \in \mathbb{Z}\}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$.

  $$z \prod_{0\neq\omega\in\Omega}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)e^{\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2} = z \prod_{0\neq\omega\in\Omega} E_2\left(\frac{z}{\omega}\right)$$

  ist das Weierstrassprodukt, das in jedem Punkt $\omega \in \Omega$ eine einfache Nullstelle hat. Als „konvergenzerzeugende Faktoren“ dienen die Weierstrassfaktoren der Stufe 2.

[D] Mit $arg_{v-1}(z)$ sei das Argument der Exponentialfunktion bezeichnet:
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \frac{-\frac{1}{T_v}\cdot e^{arg_{v-1}(z)}+\left(1-\frac{z}{T_v}\right)e^{arg_{v-1}(z)}\left(\frac{1}{T_v}+\frac{z}{T_v^2}+\ldots+\frac{z^{v-2}}{T_v^{v-1}}\right)}{\left(1-\frac{z}{T_v}\right)e^{arg_{v-1}(z)}}$$
$$=\frac{1}{z} + \sum_{v\geq 1}\left(\frac{1}{z-T_v}+\frac{1}{T_v}+\frac{z}{T_v^2}+\ldots+\frac{z^{v-2}}{T_v^{v-1}}\right)$$

4 Beispiele für Mittag-Leffler-Reihen

4.2 Übersicht verschiedener Mittag-Leffler-Reihen

- Cotangens-Reihe

$$\pi cot \pi z = \pi \frac{cos(\pi z)}{sin(\pi z)} = \frac{d}{dz} \ln(sin(\pi z)) = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n=-\infty,\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2+n^2}$$

ist die Mittag-Leffler-Reihe, die in jedem Punkt $n \in \mathbb{Z}$ einen Pol mit Hauptteil $H_n(z) = \frac{1}{z+n}$ hat. Als „konvergenzerzeugender Summand" dient das 0-te Taylorpolynom $P_0 = \frac{1}{n}$.

- logarithmische Differentiation von Weierstrassprodukten

Sei ein Weierstrassprodukt der folgenden Form gegeben.

$$f(z) = z \cdot \prod_{v\geq 1} E_{v-1}\left(\frac{z}{T_v}\right) = z \cdot \prod_{v \geq 1} \left[\left(1 - \frac{z}{T_v}\right) \cdot e^{\left(\frac{z}{T_v} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{T_v}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \frac{1}{v-1}\left(\frac{z}{T_v}\right)^{v-1}\right)}\right]$$

Dann lässt es sich mit der Produktregel und der Regel für normal konvergente Produkte logarithmisch ableiten [9.9].

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \overset{\text{Ⓓ}}{=} \frac{1}{z} + \sum_{v\geq 1} \left(\frac{1}{z-T_v} + \frac{1}{T_v} + \frac{z}{T_v^2} + \ldots + \frac{z^{v-2}}{T_v^{v-1}}\right)$$

Die logarithmische Ableitung ist eine Mittag-Leffler-Reihe, die in jedem Punkt T_v einen Pol mit Hauptteil $H_v(z) = \frac{1}{z-T_v}$ hat. Als „konvergenzerzeugender Summand" dient das $(v-2)$-te Taylorpolynom.

4.3 Weierstrassprodukt zu $\frac{1}{\Gamma}$

Definition 4.2 (nach C.F.Gauß)
Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ ist die Gamma-Funktion definiert als:

$$\Gamma(z) := \lim_{n\to\infty} \frac{n!\ n^z}{z(z+1)(z+2)\cdot\ldots\cdot(z+n)}$$

Die Gamma-Funktion hat Pole erster Ordnung in $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ und keine Nullstellen.

Die Konstante $C = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln\ n) \approx 0.57721$ wird Euler-Mascheroni Konstante genannt.

Wir wollen folgende Identität zeigen.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{C\cdot z} z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{12}$$

Dafür beweisen wir zuerst, dass zum Divisor

$$Div(z) = \begin{cases} 1 & z \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ein mögliches Weierstrassprodukt $f(z) = z\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}$ existiert.
Nach der Vorbemerkung zum Produktsatz von Weierstrass [2.8] ist dies der Fall, wegen folgender Abschätzung.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1\cdot\left|\frac{r}{-n}\right|^2 = r^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\right|^2 < \infty \qquad \forall r > 0$$

(E) Zwischenschritte zur Berechnung der Taylorreihenentwicklung

$H_n(0) = \frac{(-1)^{|n|}}{0-n} = \frac{(-1)^{|n|+1}}{n}$

$H_n^r(0) = (-1)^r r! \frac{(-1)^{|n|}}{(0-n)^{r+1}} = \frac{(-1)^{|n|+1} r!}{n^{r+1}}$

$\frac{H_n^r(0)}{r!}(z)^r = \frac{(-1)^{|n|+1} r!}{n}\frac{z^r}{r!\ n^r} = \frac{(-1)^{|n|+1}}{n}\frac{z^r}{n^r}$

4.4 Mittag-Leffler-Reihe zu $\frac{\pi}{sin(\pi\ z)}$

Bestimme die Hauptteile der Funktion $\frac{\pi}{sin(\pi\ z)}$
$sin(\pi\ z)$ hat bei $n \in \mathbb{Z}$ Nullstellen erster Ordnung. Daher hat $\frac{\pi}{sin(\pi\ z)}$ Pole der Ordnung 1 bei $n \in \mathbb{Z}$ und die Laurententwicklung bricht bei -1 ab. Somit müssen wir für jedes $n \in \mathbb{Z}$ den Vorfaktor des Summanden $\frac{1}{z-n}$ in der Laurent-Reihe bestimmen (auch Residuum genannt).

$$\lim_{z \to n}(z-n)\frac{\pi}{sin(\pi z)} \overset{L'Hospital}{=} \frac{\pi}{\pi \cdot cos(\pi z)} = \frac{1}{cos(\pi n)} = (-1)^{|n|}$$

Damit hat der Hauptteil von $\frac{\pi}{sin(\pi z)}$ in den Punkten $n \in \mathbb{Z}$ die Form $\frac{(-1)^{|n|}}{z-n}$.

Wir gehen jetzt wieder den umgekehrten Weg und geben uns die Polstellenmenge und Hauptteile vor.
Als Polstellenmenge T sei $\mathbb{Z}$ gegeben mit den Hauptteile:

$$H_n(z) = \frac{(-1)^{|n|}}{z-n} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Die Taylorreihenentwicklung des Hauptteiles H_n um den Nullpunkt ist.
$H_n(z) = H_n(0) + \frac{H_n'(0)}{1!}(z) + \frac{H_n''(0)}{2!}(z)^2 + \ldots = \frac{(-1)^{|n|+1}}{n} \cdot (1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \ldots)$ Ⓔ
Wir wählen für P_{l_v} das 0-te Taylorpolynom, also $\frac{(-1)^{|n|+1}}{n}$ aus. Nach dem Partialbruchsatz von Mittag-Leffler [3.5] müssen wir zeigen, dass

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^+} |H_n(z) - P_0|_{\overline{B_{\frac{1}{2}|T_n|}(0)}} \leq \text{ Konstante } \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \frac{1}{n^2} < \infty$$
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^-} |H_n(z) - P_0|_{\overline{B_{\frac{1}{2}|T_n|}(0)}} \leq \text{ Konstante } \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}^-} \frac{1}{n^2} < \infty$$

in den Kreisen $|z| \leq \frac{1}{2}|T_n|$ kompakt konvergiert.

Es bleibt die Identität der beiden Gleichungsseiten (12) zu zeigen.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\cdot \ldots \cdot (z+n)}{n!\ n^z} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(1+z)(1+\frac{z}{2})\cdot \ldots \cdot (1+\frac{z}{n})}{n^z}$$

$$\overset{n^z=e^{z\ \ln\ n}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{z(1+z)(1+\frac{z}{2})\cdot \ldots \cdot (1+\frac{z}{n})}{e^{-\left(z+\frac{z}{2}+\ldots+\frac{z}{n}\right)+z\ \ln\ n+\left(z+\frac{z}{2}+\ldots+\frac{z}{n}\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\left(z\left(\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln\ n\right)\right)} z(1+z)\cdot \ldots \cdot (1+\frac{z}{n})e^{\left(-\left(z+\ldots+\frac{z}{n}\right)\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\left(\left(z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln\ n\right)\right)} f(z) = e^{z\cdot C} f(z)$$

Da beide Abschätzungen analog verlaufen, wird im Folgenden nur der erste Teil für $\mathbb{Z}^+$ gezeigt. Für jedes beliebige Kompaktum K wählt man ein $n(r) \geq 0$, sodass für alle $z \in K$ und $n > n(r)$ gilt $|z| \leq \frac{1}{2}|T_n|$. Für $|z| \leq R \leq \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}|T_v|$ (R sei beliebig in dem Intervall $|z| \leq \frac{1}{2}n$ gewählt) gilt dann:

$$\sum_{n>n(r)} \left| \frac{(-1)^n}{z-n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| \leq \sum_{n>n(r)} \left| \frac{(-1)^{n+1} z}{(z-n)n} \right| \leq \sum_{n>n(r)} \frac{|z|}{(n-|z|)n}$$
$$\overset{|z|\leq R\leq \frac{1}{2}n}{\leq} \sum_{n>n(r)} \frac{R}{(n-R)n} \overset{R\leq\frac{1}{2}n}{\leq} \sum_{n>n(r)} \frac{R}{(\frac{1}{2}n)n} \leq 2R \cdot \sum_{n>n(r)} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Damit können wir die Mittag-Leffler-Reihe angeben.

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash 0} \left[\frac{(-1)^n}{z-n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right] = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\backslash 0} (-1)^n \cdot \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right]$$

Fasst man jeweils n und $-n$ zusammen so erhält man:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \frac{2z}{z^2-n^2}$$

Eventuell unterscheidet sich die gerade bestimmte Mittag-Leffler-Reihe $f(z)$ von $\frac{\pi}{sin(\pi\ z)}$ noch durch eine ganze Funktion $g(z) \in O(\mathbb{C})$.

$$\frac{\pi}{sin(\pi\ z)} = f(z) + g(z)$$

Mit der Partialbruchentwicklung des Kotangens und der folgenden Identität lässt sich zeigen, dass $g(z)$ konstant Null ist.

$$\frac{1}{sinz} = cot\frac{z}{2} - cotz$$

5 Produktsatz von Weierstrass für beliebige Bereiche $D \subset \mathbb{C}$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es den Weierstrassenproduktsatz für beliebige Bereiche $D \subset \mathbb{C}$ zu verallgemeinern. Dafür sei wieder ein positiver Divisor $Div^+ : D \to \mathbb{N}_0$ (diesmal nur für den Bereich D) vorgegeben, der die Nullstellenlage und -ordnung angibt. Der unendliche Träger T von Div^+ (endliche Träger sind trivial, vgl. Kapitel 2 1.Fall) entspricht dabei der Nullstellenmenge und $Div^+(S_n)$ gibt die Ordnung der Nullstelle $S_n \in T$ an. Es wird einige Veränderungen im Vergleich zu Kapitel 2 geben.

Veränderungen:

- Die Nullstellenmenge T ist weiterhin in D lokal endlich. Anders als in Kapitel 2 kann die Menge T jetzt aber auch Häufungspunkte enthalten. Z.B. wenn für D der offene Einheitskreis gewählt wird und die Punkte $z_n = 1 - \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}$ in T liegen. Dann ist 1 offensichtlich ein Häufungspunkt von T obwohl T lokal endlich im offenen Einheitskreis ist. Diese Häufungspunkte (im weiteren mit T' bezeichnet) treten nur am Rand von D auf, da jeder Punkt von T der im Inneren von D liegt auch weiterhin aufgrund der lokalen Endlichkeit eine Umgebung besitzt, in der kein weiterer Punkt aus T enthalten ist. Daher suchen wir in diesem Kapitel auch nur nach Weierstrassprodukten in dem Bereich $\mathbb{C} \setminus T'$ normal konvergieren.

- Anders als im Kapitel 2 verwenden wir als Argumente für die Weierstrassfaktoren nicht mehr $\frac{z}{S_n}$ sondern $\frac{S_n - c}{z - c}$ mit $z \neq c$. Die Weierstrassfaktoren haben dann die Form

$$E_n\left(\frac{S_n - c}{z - c}\right) = \left(\frac{z - S_n}{z - c}\right) \cdot \exp\left[\frac{S_n - c}{z - c} + \frac{1}{2}\left(\frac{S_n - c}{z - c}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n}\left(\frac{S_n - c}{z - c}\right)^n\right]$$

  und verschwinden weiterhin in erster Ordnung in den Punkten S_n. Anders als im Kapitel 2 nimmt die Null (falls sie ein Element von T ist) keinen Sonderfall mehr ein, da das Argument $\frac{S_n - c}{z - c}$ auch für $S_n = 0$ definiert ist (vgl. das alte Argument $\frac{z}{S_n}$ war bei $S_n = 0$ nicht definiert). Daher benötigen wir keinen extra Vorfaktor $z^{Div^+(0)}$ vor dem Weierstrassprodukt mehr, sondern behandeln die Null wie alle anderen Elemente aus T.

6 Partialbruchsatz von Mittag-Leffler für beliebige Bereiche $D \subset \mathbb{C}$

Das Ziel dieses Abschnittes ist es den Partialbruchsatz von Mittag-Leffler für beliebige Bereiche $D \subset \mathbb{C}$ zu verallgemeinern. Dafür sei wieder eine beliebige Hauptteilverteilung $HV : D \to H_v$ vorgegeben, die die endlichen Hauptteile H_v in den Polen T_v angibt. Der unendliche Träger T von HV (endliche Träger sind trivial, vgl. Kapitel 3 1.Fall) entspricht dabei der Polstellenmenge und $HV(T_v) = H_v$ gibt den endlichen Hauptteil von $T_v \in T$ an. Es wird einige Veränderungen im Vergleich zu Kapitel 3 geben.

Veränderungen:

- Die Polstellenmenge T ist weiterhin in D lokal endlich. Anders als in Kapitel 3 kann die Menge T jetzt aber auch Häufungspunkte enthalten. Z.B. wenn für D der offene Einheitskreis gewählt wird und die Punkte $z_v = 1 - \frac{1}{v} \quad v \in \mathbb{N}$ in T liegen. Dann ist 1 offensichtlich ein Häufungspunkt von T obwohl T lokal endlich im offenen Einheitskreis ist. Diese Häufungspunkte (im weiteren mit $T\,'$ bezeichnet) treten nur am Rand von D auf, da jeder Punkt von T der im Inneren von D liegt auch weiterhin aufgrund der lokalen Endlichkeit eine Umgebung besitzt, in der kein weiterer Punkt aus T enthalten ist. Daher suchen wir in diesem Kapitel auch nur nach Mittag-Leffler-Reihen in dem Bereich $\mathbb{C} \setminus T\,'$.

- Anders als im Kapitel 3 verwenden wir als „konvergenzerzeugende Summanden“ nicht mehr die Taylorpolynome P_{l_v} sondern die folgenden Laurent-Terme G_{l_v}.

Lemma 6.1
Sei $H_v(z) \in O(\mathbb{C} \setminus T_v)$ der endliche Hauptteil im Pol $T_v \in T$ und c ein beliebig gewählter Punkt aus $\mathbb{C} \setminus T_v$. Dann bricht die Laurententwicklung $\sum_{-\infty}^{n=-1} h_{v,n}(z-c)^n$ um den Punkt c von H_v in dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : |z-c| > |T_v - c|\}$ bei -1 ab. D.h. $h_{v,n} = 0$ für $n \geq 0$. Mit G_{l_v} sei dann der l_v-te Laurent-Term von H_v um c bezeichnet $G_{l_v} := \sum_{-l_v}^{n=-1} h_{v,n}(z-c)^n$.

Gesucht ist also ein Weierstrassprodukt der Form:

$$f(z) = \prod_{n \geq 0} E_{l_n} \left(\frac{S_n - c}{z - c} \right)^{Div^+(S_n)} \qquad S_0 \text{ ist eventuell } 0$$

Bevor wir den eigentlichen Produktsatz beweisen werden, benötigen wir noch zwei Lemmata.

Lemma 5.1
Sei T eine diskrete Menge in $\mathbb{C}$, so ist die Menge der Häufungspunkte $T\,' := \overline{T} \setminus T$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$.

Beweis:
Es sei x_n eine beliebige Folge in $T\,'$ die gegen t konvergiert $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = t$. Damit $T\,'$ abgeschlossen ist müssen wir zeigen, dass der Grenzwert t in $T\,'$ liegt. Wenn irgendein Folgenglied x_n gleich t ist, dann haben wir das Lemma bewiesen. Also sei $x_n \neq t$ für alle n. Weil jedes x_n ein Häufungspunkt von T ist und $d(x_n, t)$ echt größer als Null ist, gibt es ein y_n, sodass $0 < d(y_n, x_n) < d(x_n, t)$ für alle n. Dann konvergiert aber die Folge y_n gegen t und $y_n \neq t$ für alle n. Daraus folgt, dass t ein Häufungspunkt von T ist und somit schon in $T\,'$ liegt.

$\square$

Somit ist der Bereich $\mathbb{C} \setminus T\,'$ der größte Bereich in $\mathbb{C}$, in dem T abgeschlossen ist. Damit ist T auch lokal endlich in dem Bereich $\mathbb{C} \setminus T\,'$. Dies erlaubt uns den Divisor Div^+ in D auf einen positiven Divisor in $\mathbb{C} \setminus T\,' \supset D$ zu erweitern, indem wir zusätzlich $Div^+(z) := 0$ setzen für $z \in (\mathbb{C} \setminus T\,') \setminus D$.

Wenn $T\,' = \emptyset$ ist, dann lässt sich der Div^+ auf ganz $\mathbb{C}$ erweitern und wie in Kapitel 2 ein Weierstrassprodukt finden. Daher sei des Weiteren stets $T\,' \neq \emptyset$.

Beweis:
Nach der Cauchyschen-Ungleichung für Laurententwicklungen [9.2.5] gilt für $r > |T_v - c|$:

$$r^n|a_n| \leq M(r) := max\{|H_v(z)| : z \in \partial B_r(c)\}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Mit $\lim\limits_{z\to\infty} H_v(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m_v} a_{v,n} \frac{1}{(z-T_v)^n} = 0$ folgt, dass auch $\lim\limits_{r\to\infty} M(r) = 0$ ist und somit $a_n = 0$ für alle $n \geq 0$ ist.

□

Mit Lemma [5.1] ist der Bereich $\mathbb{C} \setminus T'$ der größte Bereich in $\mathbb{C}$, in dem T abgeschlossen ist. Damit ist T auch lokal endlich in dem Bereich $\mathbb{C} \setminus T'$. Dies erlaubt uns die Hauptteilverteilung HV in D auf eine Hauptteilverteilung in $\mathbb{C} \setminus T' \supset D$ zu erweitern, indem wir zusätzlich $HV(z) := 0$ setzen für $z \in (\mathbb{C} \setminus T') \setminus D$.

Wenn $T' = \emptyset$ ist, dann lässt sich die HV auf ganz $\mathbb{C}$ erweitern und wie in Kapitel 3 eine Mittag-Leffler-Reihe finden. Daher sei des Weiteren stets $T' \neq \emptyset$.

Lemma 5.2
Sei T eine diskrete Menge in $\mathbb{C}$, die mindestens einen Häufungspunkt $T' = \overline{T} \setminus T \neq \emptyset$ besitzt. Die Menge T wird jetzt in zwei disjunkte Untermengen T_1 und T_2 wie folgt zerlegt:

$$T_1 := \{z \in T : |z|d(T', z) \geq 1\}, \qquad T_2 := \{z \in T : |z|d(T', z) < 1\}$$

1) T_1 ist abgeschlossen in $\mathbb{C}$.
2) Für jedes $\epsilon > 0$ ist die Menge $T_2(\epsilon) := \{z \in T_2 : d(T', z) \geq \epsilon\}$ endlich.

Beweis: 1)
Angenommen T_1 ist nicht abgeschlossen, dann gibt es eine Folge $t_n \in T_1$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t \notin T_1$. Da T' nach dem vorangegangenen Lemma abgeschlossen ist, liegt t in T'. Damit wäre $|t_n|d(T', t_n) \leq |t_n| \cdot |t - t_n| \overset{\text{für n}\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dies steht im Widerspruch zu $|t_n|d(T', t_n) \geq 1$.

□

Beweis: 2)
Angenommen $T_2(\epsilon_0)$ ist unendlich für ein $\epsilon_0 > 0$. Außerdem ist jedes Element von $z \in T_2(\epsilon_0)$ durch $|z| < \frac{1}{\epsilon_0}$ beschränkt (folgt aus den beiden Ungleichungen $\epsilon_0 \leq d(T', z)$ und $|z|d(T', z) < 1$). Damit muss die unendliche und beschränkte Menge $T_2(\epsilon_0)$ einen Häufungspunkt t besitzen, welcher wegen der Abgeschlossenheit von T' auch in T' selber liegt ($t \in T'$). Anderseits gilt $|t - z| \geq d(T', z) \geq \epsilon_0$ für alle $z \in T_2(\epsilon_0)$. Dies steht im Widerspruch dazu, dass t ein Häufungspunkt von $T_2(\epsilon_0)$ ist.

□

Hieraus können wir nun die Verallgemeinerung des Produktsatzes von Weierstrass ableiten.

Hieraus können wir nun die Verallgemeinerung des Partialbruchsatzes von Mittag-Leffler ableiten.

Das folgende Lemma wird anstelle des alten Lemma [2.8] verwendet.

Lemma 5.3
Sei S_n die geordnete Nullstellenfolge des Trägers von Div^+. Wenn es eine Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ in $T\,'$ gibt, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n - c_n| = 0$ ist, dann ist das Produkt $f(z) = \prod\limits_{n\geq 0} E_{l_n}\left[\frac{S_n - c_n}{z - c_n}\right]^{Div^+(S_n)}$ mit $l_n = n - 1 + Div^+(S_n)$ ein Weierstrassprodukt zum Divisor Div^+ in $\mathbb{C} \setminus T\,'$, d.h. die normale Konvergenz muss nur in dem Bereich $\mathbb{C} \setminus T\,'$ gezeigt werden.

Beweis:
Da $T\,'$ nach Lemma [5.1] abgeschlossen ist, gilt $\overline{\{c_0, c_1, \ldots\}} \subset T\,'$. Somit ist

$$E_{l_n}\left(\frac{S_n - c_n}{z - c_n}\right) = \left(\frac{z - S_n}{z - c_n}\right) \cdot e^{\left(\frac{S_n - c_n}{z - c_n}\right) + \cdots} \begin{cases} \in O(\mathbb{C} \setminus T\,') \\ \neq 0, \text{ falls } z \neq S_n \\ \text{die Nullstellenordnung im Punkt } S_n \text{ ist } 1 \end{cases} \tag{13}$$

Die Aussagen von (13) entsprechen den gleichen Aussagen von Lemma [2.4].

Um die normale Konvergenz von $f(z)$ in $\mathbb{C} \setminus T\,'$ zu zeigen, verwenden wir die Aussage (22) und zeigen, dass $f(z)$ für jedes beliebige Kompaktum $K \subset \mathbb{C} \setminus T\,'$ konvergiert.

Sei also K ein beliebiges Kompaktum in $\mathbb{C} \setminus T\,'$. Für alle $z \in K$ gilt dann

$$\left|\frac{S_n - c_n}{z - c_n}\right|_K \leq \left|\frac{S_n - c_n}{d(K, c_n)}\right|_K \leq \left|\frac{S_n - c_n}{d(K, T\,')}\right|_K \tag{14}$$

Da sowohl K also auch $T\,'$ abgeschlossen sind, ist $d(K, T\,') > 0$ und wir können $r := \frac{1}{d(K, T\,')}$ setzen. Damit ist:

$$\left|\frac{S_n - c_n}{z - c_n}\right|_K \overset{(14)}{\leq} |r \cdot (S_n - c_n)|_K \tag{15}$$

Für jedes $r > 0$ können wir wegen $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n - c_n| = 0$ ein $n(r) \in \mathbb{N}$ wählen, sodass $r|S_n - c_n| < \frac{1}{2}$ für alle $n > n(r)$ ist.

Lemma 6.2

Sei T_v die geordnete Polstellenfolge des Trägers von HV. Wenn es eine Folge $(c_v)_{v\geq 0}$ in T' gibt, sodass $\lim\limits_{v\to\infty} |T_v - c_v| = 0$ ist, dann existieren Mittag-Leffler-Reihen der Form $f(z) = \sum\limits_{v=0}^{\infty}(H_v - G_{l_v})$ zur Hauptteilverteilung HV in $\mathbb{C}\setminus T'$, d.h. die normale Konvergenz muss nur in dem Bereich $(\mathbb{C} \setminus \{T_0, T_1, \ldots\}) \setminus T' = \mathbb{C} \setminus \overline{T}$ gezeigt werden.

Beweis:

Da T' nach Lemma [5.1] abgeschlossen ist, gilt $\overline{\{c_0, c_1, \ldots\}} \subset T'$. Somit ist G_{l_v} holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{c_v\} \supset \mathbb{C} \setminus T'$ und G_{l_v} verändert nicht das Hauptteilverhalten der Funktion f in $\mathbb{C} \setminus T'$ (Beweis analog zu Lemma [3.4]).

Um die normale Konvergenz von $f(z)$ in $\mathbb{C}\setminus\overline{T}$ zu zeigen, verwenden wir die Aussage (22) und zeigen, dass $f(z)$ für jedes beliebige Kompaktum $K \subset \mathbb{C} \setminus \overline{T}$ kompakt konvergiert.

Sei also K ein beliebiges Kompaktum in $\mathbb{C} \setminus \overline{T}$.
Da sowohl K als auch $\overline{T}$ abgeschlossen sind, ist $d(K, \overline{T}) > 0$. Zusammen mit $\lim\limits_{v\to\infty} |T_v - c_v| = 0$ gibt es ein $n(K)$, sodass für alle $v \geq n(K)$ das Kompaktum K im Kreisring $A := \{z \in \mathbb{C} : |z - c_v| \geq 2|T_v - c_v|\}$ enthalten ist.

$$K \subset \{z \in \mathbb{C} : |z - c_v| \geq 2|T_v - c_v|\} \qquad \text{für } v \geq n(K)$$

Aufgrund der normalen Konvergenz der Laurent-Terme G_{l_v} gegen die Hauptteilverteilung H_v im Kreisring A, konvergiert G_{l_v} kompakt gegen H_v in A [9.2.5]. Somit lässt sich für jedes $v \geq n(K)$ ein $l_v \in \mathbb{N}$ wählen, sodass:

$$|H_v(z) - G_{l_v}(z)|_K \leq \left(\frac{1}{2}\right)^v \qquad \forall z \in K$$

Damit ist:

$$\sum_{v\geq n(K)} |H_v(z) - G_{l_v}(z)|_K \leq \sum_{v\geq n(K)} \left(\frac{1}{2}\right)^v < \infty$$

□

Beweis:

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n>n(r)} Div^+(S_n)\, |E_{l_n}\left(\frac{S_n - c_n}{z - c_n}\right) - 1|_K \\
\underset{\left|\frac{S_n-c_n}{z-c_n}\right|_K \overset{15}{\leq} |r\cdot(S_n-c_n)|_K \leq \frac{1}{2}}{\overset{(6)}{\leq}} &\sum_{n>n(r)} Div^+(S_n) \left|\left(\frac{S_n - c_n}{z - c_n}\right)\right|_K^{l_n+1} \\
\overset{15}{\leq} &\sum_{n>n(r)} Div^+(S_n) |r \cdot (S_n - c_n)|_K^{l_n+1} \\
\overset{l_n = n-1+Div^+(S_n)}{\leq} &\sum_{n>n(r)} Div^+(S_n) |r \cdot (S_n - c_n)|_K^{n+Div^+(S_n)}
\end{aligned} \tag{16}$$

Die weitere Abschätzung der Reihe verläuft identisch zu dem Beweis des Produktsatzes von Weierstrass [2.9], da $|r(S_n - c_n)| < \frac{1}{2}$ gilt.

$$= \sum_{n>n(r)} Div^+(S_n) |r(S_n - c_n)|_K^{n+Div^+(S_n)} \overset{[2.9]}{<} \infty \tag{17}$$

□

Lemma 5.4

Ist $T' \neq \emptyset$ und sind alle Mengen $T(\epsilon) := \{S_n \in T : d(S_n, T') \geq \epsilon\}$ endlich. Dann lässt sich eine Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ in T' wählen, sodass $\lim_{n\to\infty} |S_n - c_n| = 0$.

Beweis:

Nach Lemma [5.1] ist T' abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Damit lässt sich für jedes $S_n \in T$ ein $c_n \in T'$ finden mit $|S_n - c_n| = d(S_n, T')$. Angenommen $|S_n - c_n|$ konvergiert nicht gegen 0, dann gibt es ein $\epsilon_0 > 0$, sodass $|S_n - c_n| \geq \epsilon_0$ für unendlich viele n. Damit ist die Menge $T(\epsilon_0)$ unendlich, das steht Widerspruch zur Angabe.

□

Satz 5.5 (Produktsatz von Weierstrass für beliebige Bereiche D $\subset \mathbb{C}$)
Zu jedem positiven Divisor $Div^+ : D \to \mathbb{N}_0$ mit Träger T gibt es ein Weierstrassprodukt in $\mathbb{C} \setminus T\,' \supset D$.

Beweis:
Teilt man den Träger T, wie in Lemma [5.2] beschrieben, in zwei disjunkte Teilmengen T_1 und T_2 auf. Dann ist die Menge $T_1\,' = \emptyset$ aufgrund der Abgeschlossenheit von T_1 (vgl. Lemma [5.2]) und somit $T_2\,' = T\,'$.
1) Da T_1 keinen Häufungspunkt besitzt, ist T_1 lokal endlich in ganz $\mathbb{C}$ und lässt sich dort zu dem Divisor Div_1^+ erweitern, indem wir zusätzlich noch $Div_1^+(z) := 0$ setzen für $z \in \mathbb{C} \setminus T_1$. Nach dem Produktsatz von Weierstrass [2.9] gibt es auf ganz $\mathbb{C}$ ein Weierstrassprodukt WP_1 zu diesem Divisor Div_1^+.
2) T_2 ist lokal endlich in $\mathbb{C} \setminus T\,'$ und lässt sich in diesem Bereich auf einen Divisor Div_2^+ erweitern, indem wir zusätzlich noch $Div_2^+(z) := 0$ setzen für $z \in (\mathbb{C} \setminus T\,') \setminus T_2$. Mit Lemma [5.2] sind alle Mengen $T_2(\epsilon)$ endlich und es gibt mit Lemma [5.4] eine Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ in $T_2\,'$ mit $\lim_{n\to\infty} |S_n - c_n| = 0$. Somit haben wir mit Lemma [5.3] das Ziel erreicht und ein Weierstrassprodukt WP_2 im Bereich $\mathbb{C}\setminus T'$ zum Divisor Div_2^+ gefunden.

Da die Aufteilung von T disjunkt war, gilt $Div^+ = Div_1^+ + Div_2^+$ in $\mathbb{C} \setminus T\,'$ und

$$f(z) = z^{Div_1^+(0)+Div_2^+(0)} \cdot \prod_{n\geq 1} g_n$$

mit g_{2n-1} ist der n-te Faktor von WP_1

mit g_{2n} ist der n-te Faktor von WP_2

f ist das gesuchte Weierstrassprodukt zu Div^+.

□

Satz 6.3 (Partialbruchsatz von Mittag-Leffler für beliebige Bereiche D $\subset \mathbb{C}$)
Zu jeder Hauptteilverteilung $HV : D \to H_v$ mit Träger T gibt es eine Mittag-Leffler-Reihe in $\mathbb{C} \setminus T\,' \supset D$.

Beweis:
Teilt man den Träger T wie in Lemma [5.2] beschrieben in zwei disjunkte Teilmengen T_1 und T_2 auf. Dann ist die Menge $T_1\,' = \emptyset$ aufgrund der Abgeschlossenheit von T_1 (vgl. Lemma [5.2]) und somit $T_2\,' = T\,'$.
1) Da T_1 keinen Häufungspunkt besitzt, ist T_1 lokal endlich in ganz $\mathbb{C}$ und lässt sich dort zu einer Hauptteilverteilung HV_1 erweitern, indem wir zusätzlich noch $HV_1(z) := 0$ setzen für $z \in \mathbb{C} \setminus T_1$. Nach dem Partialbruchsatz von Mittag-Leffler [3.5] gibt es auf ganz $\mathbb{C}$ eine Mittag-Leffler-Reihe ML_1 zu dieser Hauptteilverteilung HV_1.
2) T_2 ist lokal endlich in $\mathbb{C} \setminus T'$ und lässt sich in diesem Bereich auf eine Hauptteilverteilung HV_2 erweitern, indem wir zusätzlich noch $HV_2(z) := 0$ setzen für $z \in (\mathbb{C} \setminus T') \setminus T_2$. Mit Lemma [5.2] sind alle Mengen $T_2(\epsilon)$ endlich und es gibt mit Lemma [5.4] eine Folge $(c_v)_{v \geq 0}$ in $T_2\,'$ mit $\lim\limits_{v \to \infty} |T_v - c_v| = 0$. Somit haben wir mit Lemma [6.2] das Ziel erreicht und eine Mittag-Leffler-Reihe ML_2 im Bereich $\mathbb{C} \setminus T\,'$ zur Hauptteilverteilung HV_2 gefunden.

Da die Aufteilung von T disjunkt war, gilt $HV = HV_1 + HV_2$ in $\mathbb{C} \setminus T\,'$ und

$$f(z) = HV_1(0) + HV_2(0) + \sum_{v \geq 1} g_v$$

mit g_{2v-1} ist der v-te Summand von ML_1

mit g_{2v} ist der v-te Summand von ML_2

f ist eine gesuchte Mittag-Leffler-Reihe zu HV. □

7 Folgerungen aus dem Produktsatz

7.1 Darstellung holomorpher Funktionen als Weierstrassprodukte

Satz 7.1

Sei $f \neq 0$ eine beliebige holomorphe Funktion im Gebiet G. Dann lässt sich f über ein Weierstrassprodukt und eine Einheit u von O(G) darstellen.

$$f = u \cdot z^{m_0} \prod_{n \geq 1} E_{l_n}$$

Beweis:

Wir bilden zuerst den Hauptdivisor $Div_f^+ := (f)$ von f und konstruieren wie in Kapitel 5 ein passendes Weierstrassprodukt $\widetilde{f}$ zu Div_f^+. Dieses Weierstrassprodukt $\widetilde{f}$ muss aber noch nicht zwangsläufig mit der Funktion f übereinstimmen, da die Zuordnung der Hauptdivisoren nicht eindeutig ist. Z.B. haben die Funktionen x und $2 \cdot x$ den gleichen Hauptdivisor.

$$Div(z) = \begin{cases} 1 & z = 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Betrachtet man aber die Funktion $u := \frac{f}{\widetilde{f}}$ so ist diese Funktion holomorph ohne Nullstellen in G, also eine Einheit von O(G). Damit lässt sich $f(z) = u \cdot \widetilde{f}(z)$ als Weierstrassprodukt darstellen. Im Spezialfall ($G = \mathbb{C}$) ist u von der Form $u = e^g \; g \in O(\mathbb{C})$ [9.16]. Wählt man stattdessen z.B. $G = \mathbb{C} \setminus 0$, dann ist z holomorph und nullstellenfrei $\mathbb{C} \setminus 0$ und somit eine Einheit im Gebiet $\mathbb{C} \setminus 0$. Da G aber nicht einfach zusammenhängend ist, lässt sich [9.16] nicht anwenden, den $\ln(z)$ ist nicht einmal stetig in $\mathbb{C} \setminus 0$.

$\square$

Weitere Abschätzungen des obigen Satzes führen schließlich zum Produktsatz von Hadamard.

7 Folgerungen aus dem Partialbruchsatz

7.2 Darstellung meromorpher Funktionen als Mittag-Leffler-Reihen

Satz 7.2
Sei $m \neq 0$ eine beliebige meromorphe Funktion im Gebiet G. Dann lässt sich m über eine Mittag-Leffler-Reihe und eine holomorphe Funktion $g \in O(G)$ darstellen.

$$m = g + H_0 + \sum_{v \geq 1} (H_v - G_{l_v})$$

Beweis:
Wir bilden zuerst die Hauptteilverteilung $HV_m := (m)$ von m und konstruieren wie in Kapitel 6 eine passende Mittag-Leffler-Reihe $\widetilde{m}$ zu HV_m. Da m und $\widetilde{m}$ beide Lösungen der gleichen Hauptteilverteilung sind, haben sie die gleichen Singularitäten und die jeweiligen Hauptteile stimmen überein. Damit ist die Differenz $g := m - \widetilde{m}$ eine holomorphe Funktion in $O(G)$.

$\square$

7.3 Darstellung meromorpher Funktionen als Quotienten

Satz 7.3

Der Quotientenkörper des Integritätsrings der holomorphen Funktionen Quot(O(G)) ist identisch mit dem Körper der meromorphen Funktionen M(G) auf dem Gebiet G. Mit anderen Worten: Jede in G meromorphe Funktion $f = \frac{g}{h}$ *ist als Quotient zweier holomorpher Funktionen g, h darstellbar. Dabei können g ung h ohne gemeinsame Nullstelle gewählt werden.*

Beweis:

Sei $f \in M(G)$ mit $f \neq 0$. Mit dem Produktsatz von Weierstrass gibt es eine holomorphe Funktion h dessen Nullstellenmenge $N(h)$ mit der Polstellenmenge von f auf G übereinstimmt, sowie der jeweiligen betragsmäßigen Ordnung.

$$N(h) = P(f) \text{ in G} \qquad ord_h(z) = -ord_f(z) \qquad \forall z \in P(f) \cap G.$$

Die in G meromorphe Funktion $g := f \cdot h$ besitzt daher nur hebbare Singularitäten und ist deshalb analytisch. Somit haben wir $f = \frac{g}{h}$, wobei aufgrund der Konstruktion die Nullstellenmengen von g und h disjunkt ist.

$\square$

7.4 Anschmiegungssatz von Mittag-Leffler

Satz 7.4

Sei T wieder eine lokal endliche Menge in einem beliebigen Bereich $D \subset \mathbb{C}$. Zu jedem Punkt $T_v \in T$ sei eine in $\mathbb{C} \setminus T$ konvergente Reihe der Form

$$R_v(z) = \sum_{n=-\infty}^{m_v} a_{v,n}(z - T_v)^n$$

mit $m_v \in \mathbb{N}$ vorgegeben (also auch ein polynomialer Teil ist vorgegeben). Dann gibt es eine in $D \setminus T$ holomorphe Funktion h, deren Laurententwicklung um T_v die Funktion R_v als unteren Teil enthält, d.h. $o_{h-R_v}(T_v) > m_v \quad \forall\, T_v \in T$.

Beweis:

Nach Satz [7.1] lässt sich ein $f \in O(D)$ wählen, sodass $o_f(T_v) = m_v + 1 \quad \forall\, T_v \in T$. Sei $HV_{\frac{R_v}{f}}$ die Hauptteilverteilung der Funktion $\frac{R_v}{f}$ in D. Nach dem Satz von Mittag-Leffer gibt es eine Funktion $g \in O(D \setminus T)$ mit genau dieser Hauptteilverteilung $HV_{\frac{R_v}{f}}$. Damit ist $h := f \cdot g$ die gesuchte Funktion. Denn h ist holomorph in $D \setminus T$, da sowohl g als auch f dies sind und für $T_v \in T$ gilt:

$$\begin{aligned} ord_{h-R_v}(T_v) &= ord_{f \cdot g - R_v}(T_v) = ord_{f \cdot (g - \frac{R_v}{f})}(T_v) \\ &\overset{\substack{\text{wegen der Wahl von g ist} \\ g - \frac{R_v}{f} \text{ holomorph in } T_v}}{\geq} ord_f(T_v) = m_v + 1 \end{aligned}$$

□

8 Beispiele für Weierstrassprodukte

8.1 Beschränkte Funktionen im Einheitskreis

Im folgenden Kapitel betrachten wir beschränkte, holomorphe Funktionen f in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$. D.h. für ein $a \in \mathbb{R}$ ist $|f(z)|_{\mathbb{E}} < a$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Ziel des Kapitels wird es sein, den folgenden Identitätssatz zu beweisen.

Satz 8.1 (Identitätssatz für beschränkte, holomorphe Funktionen in $\mathbb{E}$)
Die folgenden Aussagen sind für $Div^+ \geq 0$ mit dem Träger $T \neq \emptyset$ in $\mathbb{E}$ äquivalent:

1. *Div^+ ist der Divisor einer in $\mathbb{E}$ beschränkten, holomorphen Funktion $f \neq 0$.*
2. *Die Blaschke-Bedingung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [Div^+(S_n) \cdot (1 - |S_n|)] < \infty$ mit $S_n \in T$ ist erfüllt.*
3. *Es existiert ein Blaschke-Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b(z, S_n)^{Div^+(S_n)}$ zum Divisor Div^+.*

Beweis: (1.) =>(2.)
Wir können wieder von einem unendlichen Träger ausgehen, da die Aussagen für den endlichen Fall trivial sind. Wenn $f(0) = 0$, dann betrachten wir anstelle von f die Funktion $g(z) = \frac{f(z)}{z^{ord_f(0)}} \in O(\mathbb{E})$ und führe den gleichen Beweis mit g[F] durch. Wir können also annehmen, dass $f(0) \neq 0$ ist. Angenommen $\sum_{n\geq 1} [Div^+(S_n) \cdot (1 - |S_n|)] = \infty$, dann wird der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} |Div^+(S_1) \cdot S_1 \cdot Div^+(S_2) \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot Div^+(S_n) \cdot S_n|$ gegen 0 gehen wobei jede Nullstelle S_i im Produkt so oft vorkommt wie ihre Ordnung $Div^+(S_i)$ angibt.

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{v\to\infty} \prod_{n=0}^{v} \left[Div^+(S_n) \cdot |S_n|\right] \underset{t \leq e^{t-1}}{\overset{\forall t \in \mathbb{R} \text{ gilt}}{\leq}} \lim_{v\to\infty} \prod_{n=0}^{v} \left[Div^+(S_n) e^{|S_n|-1}\right] \\
&= \lim_{v\to\infty} \exp\left(\sum_{n=0}^{v} \left[Div^+(S_n)(|S_n| - 1)\right]\right) = \lim_{v\to\infty} \exp\left(-\sum_{n=0}^{v} \left[Div^+(S_n)(1 - |S_n|)\right]\right) \\
&\overset{\sum_{n=0}^{\infty} \left[Div^+(S_n)(1-|S_n|)\right] = \infty}{=} 0
\end{aligned}
$$

Nach der Jensenschen Ungleichung [9.17] folgt somit $f(0) = 0$, das steht im Widerspruch zur Annahme.

□

[F] g ist auch in $O(\mathbb{E})$ und wegen des Maximumprinzipes beschränkt in $\mathbb{E}$. Außerdem gilt offenbar $g \neq 0$ (Träger von f war unendlich) und $g(0) \neq 0$.

8 Beispiele für Mittag-Leffler-Reihen

8.2 Hauptsatz der Idealtheorie für holomorphe Funktionen in einem Gebiet G

Es folgen Definitionen wichtiger Grundbegriffe für dieses Kapitel.

Definition 8.2 (Ideal eines kommutativen Ringes R mit Einselement 1)
Eine Teilmenge $\emptyset \neq I \subset R$, die abgeschlossen bezüglich R-Linearkombinationen ist, wird Ideal des Ringes R genannt. D.h. Für alle $a, b \in I$ und $r, s \in R$ gilt: $ra + sb \in I$.

Definition 8.3 (erzeugende Systeme und Hauptideale)
Ist $M \neq \emptyset$ eine Teilmenge von R, so ist das von M erzeugte Ideal (M) die Menge aller endlichen Linearkombinationen.

$$(M) = \{r_1 m_1 + \ldots + r_n m_n | \ \ r_i \in R, m_i \in M\}$$

(M) ist das kleinste Ideal in R, das die Menge M enthält. M wird auch als erzeugendes System bezeichnet. Ideale I, die ein endliches, erzeugendes System M besitzen, werden endlich erzeugbar genannt. Besteht M aus nur einem Element, dann wird (M) als Hauptideal bezeichnet.

Um den Hauptsatz der Idealtheorie für holomorphe Funktionen in einem Gebiet G zu beweisen, benötigen wir noch folgendes Lemma.

Lemma 8.4 (Wedderburn)
Seien zwei teilerfremde, holomorphe Funktionen u und v in dem Gebiet G gegeben. Dann lässt sich die Eins durch zwei weitere holomorphe Funktionen $a, b \in O(G)$ darstellen.

$$au + bv = 1$$

Beweis:
Weil u und v teilerfremd sind und wegen des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen, können wir davon ausgehen, dass uv nicht die konstante Nullfunktion ist. Die Polstellenmenge von $\frac{1}{uv}$ ist die disjunkte Vereinigung der Polstellenmengen von $\frac{1}{u}$ und $\frac{1}{v}$, da u und v teilerfremd waren.

Beweis: (3.) =>(1.)

Definition 8.5 (Blaschke-Faktoren)
Es sei $b(z,0) := z$ *und für* $0 \neq S_n \in \mathbb{E}$

$$b(z,S_n) := \frac{1}{|S_n|} E_0 \left(\frac{S_n - \frac{1}{\overline{S_n}}}{z - \frac{1}{\overline{S_n}}} \right) = \frac{1}{|S_n|} \left(1 - \frac{S_n - \frac{1}{\overline{S_n}}}{z - \frac{1}{\overline{S_n}}} \right) = \frac{1}{|S_n|} \left(\frac{z - \frac{1}{\overline{S_n}} - S_n + \frac{1}{\overline{S_n}}}{z - \frac{1}{\overline{S_n}}} \right)$$
$$= \frac{1}{|S_n|} \left(\frac{z - S_n}{z - \frac{1}{\overline{S_n}}} \right) = \frac{1}{|S_n|} \left(\frac{z - S_n}{\frac{1}{\overline{S_n}} \left(\overline{S_n} z - 1 \right)} \right) = \frac{\overline{S_n} \cdot S_n}{|S_n| \cdot S_n} \left(\frac{z - S_n}{\overline{S_n} z - 1} \right) = \frac{|S_n|^2}{|S_n| \cdot S_n} \left(\frac{z - S_n}{\overline{S_n} z - 1} \right)$$
$$= \frac{|S_n|}{S_n} \left(\frac{z - S_n}{\overline{S_n} z - 1} \right)$$

Definition 8.6 (Blaschke-Produkt)
Sei nun ein positiver $Div^+ \geq 0$ *in* $\mathbb{E}$ *gegeben mit Träger* T*. Dann ist das Produkt*

$$b(z) := \prod_{S_n \in T} b(z,S_n)^{Div^+(S_n)} = b(z,0)^{Div^+(0)} \quad \frac{1}{b_T} \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left[E_0 \left(\frac{S_n - \frac{1}{\overline{S_n}}}{z - \frac{1}{\overline{S_n}}} \right) \right]^{Div^+(S_n)}$$
$$\text{mit } b_T := \prod_{n=1}^{\infty} |S_n| \neq 0$$

ein spezielles Weierstrassprodukt, wenn es normal in $\mathbb{E}$ *(und damit sogar in* $\mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{E}$*) konvergiert. Es wird Blaschke-Produkt zum Divisor* Div^+ *genannt.*

Die Funktionen $b(z,S_n)$ sind holomorph in $\overline{\mathbb{E}}$, da $b(z,S_n \neq 0)$ nur einen Pol in $\frac{1}{\overline{S_n}}$ hat. Da das Produkt $b(z)$ normal konvergiert, ist $b(z) \in O(\mathbb{E})$. Außerdem sind die $b(z,S_n)$ nullstellenfrei in $\mathbb{E} \setminus S_n$ und im Punkt S_n ist eine Nullstelle erster Ordnung. Bildet man daher den Hauptdivisor von b so stimmt dieser mit Div^+ überein (Beweis analog zu [2.5]). Die Faktoren $b(z,S_n)$ sind auch als Automorphismen von $\mathbb{E}$ bekannt ([Rem02][Kapitel 2.3.3]). Daraus schließen wir, dass $|b(z,S_n)|_{\mathbb{E}} \leq 1$ [G] sowie $|b(z)|_{\mathbb{E}} \leq 1$ ist.

□

[G] $|b(z,S_n)|_{\mathbb{E}} = \left| \frac{|S_n|}{S_n} \left(\frac{z-S_n}{\overline{S_n} z - 1} \right) \right| = \left| \frac{z-S_n}{\overline{S_n} z - 1} \right|$ Anstelle zu zeigen, dass der Ausdruck kleiner gleich eins ist, zeigen wir $|z - S_n|^2 \leq |\overline{S_n} z - 1|^2$. Dies ist aber offensichtlich richtig, da $(1 - |S_n|^2)(1 - |z|^2) > 0$

Beweis:
Mit Satz [7.2] lässt sich $\frac{1}{uv}$ als normal konvergente Partialbruchreihe darstellen, die aufgrund von Aussage [23] beliebig umsortiert werden darf. Wir sortieren $\frac{1}{uv}$ so um, dass a_v in $z \in N(v)$ Pole der Ordnung $-o_v(z)$ und b_u in $z \in N(u)$ Pole der Ordnung $-o_u(z)$ hat.

$$\frac{1}{uv} = a_v + b_u, \qquad a_v, b_u \in M(G)$$

Mit $a := v \cdot a_v$ und $b := u \cdot b_u$ folgt $au + bv = v \cdot a_v \cdot u + u \cdot b_u \cdot v = (a_v + b_u)uv = 1$ mit $a, b \in O(G)$.

□

Wir benötigen noch eine Aussage aus der Teilbarkeitslehre von O(G). Hierzu sei nochmal daran erinnert, dass $f \in O(G)$ ein Teiler von $g \in O(G)$ ist, wenn $g = f \cdot h$ mit $h \in O(G)$ gilt. Einheiten sind Teiler der Eins und Primelemente sind von der Form: $u \cdot (z - c)$ mit $c \in G$ und u ist eine Einheit in G.

Satz 8.7 (Existenzsatz des ggT im Ring O(G))
Jede Menge $\{0\} \neq S \neq \emptyset$ im Ring O(G) besitzt einen größten gemeinsamen Teiler ggT. Wählt man $f \in O(G)$, sodass $(f) = min\{(g) : g \in S, g \neq 0\}$ gilt, dann ist f ein ggT von S. Dafür müssen wir zwei Sachverhalte zeigen:
1) f teilt alle $g \in S$
2) Jeder andere gemeinsame Teiler von S ist ein Teiler von f.

Beweis: 1)
Sei $g \in S$, dann gilt $(f) \leq (g)$. Damit ist $o_{\frac{g}{f}}(z) = o_g(z) - o_f(z) \geq 0$ für alle $z \in G$. Es gilt also $\frac{g}{f} \in O(G)$ und somit teilt f die Funktion g.

□

Beweis: 2)
Sei $\overline{f}$ ein gemeinsamer Teiler von S, d.h. $\overline{f}$ teilt alle $g \in S$. Damit muss aber wiederum $(\overline{f}) \leq (g)$ gelten. Mit der Definition von f gilt dann $(\overline{f}) \leq (f) \leq (g)$. Analog zum Beweis 1) folgt dann die Aussage.

□

Damit sind wir beim Haupttheorem des Kapitels angelangt.

Beweis: (2.) =>(3.)
Jedes Kompaktum K in $\mathbb{E}$ ist in einem Ball $B_r(0)$ mit $r \in (0,1)$ enthalten. Nach Aussage (22) müssen wir also die kompakte Konvergenz für jedes $z \in B_r(0)$ zeigen.
Sei $r \in (0,1)$ und $S_n \in \mathbb{E} \setminus 0$, dann gilt:

$$|b(z,S_n) - 1|_{B_r(0)} = \left|\frac{|S_n|(z - S_n) + S_n - S_n\overline{S_n}z}{S_n(\overline{S_n}z - 1)}\right|_{B_r(0)} = \left|\frac{S_n + |S_n|z - |S_n|S_n - |S_n|^2 z}{S_n(\overline{S_n}z - 1)}\right|_{B_r(0)}$$
$$\leq \left|(1 - |S_n|)\frac{S_n + |S_n|z}{S_n(\overline{S_n}z - 1)}\right|_{B_r(0)} \overset{|\overline{S_n}z - 1| \geq 1 - |z| \text{ für } S_n \in \mathbb{E}}{\leq} \left|(1 - |S_n|)\frac{S_n(1 + \frac{|S_n|}{S_n}z)}{S_n(1 - |z|)}\right|_{B_r(0)}$$
$$\leq (1 - |S_n|)\frac{1 + \frac{|S_n|}{|S_n|}|z|}{1 - |z|} \overset{|z| \leq r < 1}{\leq} (1 - |S_n|)\frac{2}{1 - r} \tag{18}$$

Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty}\left[Div^+(S_n) \cdot |b(z,S_n) - 1|_{B_r(0)}\right] \overset{(18)}{=} \frac{2}{1-r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left[Div^+(S_n) \cdot (1 - |S_n|)\right] < \infty$.
D.h. das Blaschke-Produkt konvergiert normal in $\mathbb{E}$.

$\square$

Satz 8.8 (Hauptsatz der Idealtheorie für O(G))
Sei I ein beliebiges durch die Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in O(G)$ endlich erzeugtes Ideal in $O(G)$. Dann lässt sich I durch eine einzige Funktion $f \in O(G)$ erzeugen, wobei f ein größter gemeinsamer Teiler der Menge $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ist (d.h. I ist ein Hauptideal).

Beweis:
Wir wollen die Gleichheit der beiden Mengen $I = \{r \cdot f| \ \ r \in O(G)\}$ zeigen.
1) $I \subset \{r \cdot f| \ \ r \in O(G)\}$
f wurde als größter gemeinsame Teiler der Funktionen $\{f_1, \ldots, f_n\}$ gewählt. Daher teilt f jede einzelne dieser Funktionen und es gilt somit $\{f_1, \ldots, f_n\} \in \{r \cdot f| \ \ r \in O(G)\}$.

2) $I \supset \{r \cdot f| \ \ r \in O(G)\}$
Dafür müssen wir zeigen, dass es Funktionen $a_1, \ldots, a_n \in O(G)$ gibt mit
$f = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$

Induktionsbeweis:
$n = 1$ offensichtlich
$n \to n + 1$
Induktionsannahme: $\overline{f} = \overline{a_1} f_1 + \ldots \overline{a_n} f_n$ wobei $\overline{f}$ der größte gemeinsame Teiler der Menge $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ist. Sei f der ggT von $\overline{f}$ und f_{n+1}, dann sind die Funktionen $u := \frac{\overline{f}}{f}$ und $v := \frac{f_{n+1}}{f}$ teilerfremd, wäre dies nicht der Fall, dann wäre f nicht der ggT. Nach Wedderburn [8.4] gibt es $a, b \in O(G)$ mit $1 = au + bv$. Setze also $a_{n+1} := b$ und $a_i := a \cdot \overline{a_i}$ für $1 \leq i \leq n$.

$\square$

9 Anhang

9.1 Bekannte Sachverhalte

9.1.1 Unendliche Produkte und Reihen [RS07][Kapitel 1.1]

Definition 9.1 (Partialprodukt und -summe)
Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen, dann besteht das n-te Partialprodukt P_n (bzw. Partialsumme S_n) aus den ersten n Gliedern dieser Folge. Das nullfreie Partialprodukt $P_n^\times$ besteht dabei aus allen nicht Nullfaktoren.
$P_n := \prod\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$
$P_n^\times := \prod\limits_{\substack{k=1\\a_k\neq 0}}^{n} a_k$
$S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Definition 9.2 (Konvergenz von Reihen)
Eine unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn die Folge der Partialsummen einen Limes a hat.
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$

Würde man diesen Konvergenzbegriff für das Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ übernehmen, so hätte man Paradoxien in der Nullkonvergenz und bei den Nullfaktoren geschaffen. Daher muss der Konvergenzbegriff eines Produktes die untengenannten Sonderfälle ausschließen.

- Das Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ könnte Null werden, auch wenn kein einziger Faktor a_k Null ist (z.B. wenn $|a_n| \leq q < 1$).
- Ein Produkt wäre schon konvergent mit Wert Null, sobald nur ein Folgenglied $a_k = 0$ ist.

Definition 9.3 (Konvergenz von Produkten)
Ein unendliches Produkt $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, wenn nur endlich viele Faktoren $a_k = 0$ sind und wenn die Folge der nullfreien Partialprodukte einen Limes von 0 verschieden hat.
$\lim\limits_{n\to\infty} P_n^\times \neq 0$

9.1.2 Zusammenstellung wichtiger Konvergenzbegriffe [Rem02][Kapitel 3.1]

9.1.2.1 Gleichmäßige Konvergenz

Definition 9.4 (Gleichmäßige Konvergenz)
Eine Funktionenfolge $f_n : X \to \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen $f : X \to \mathbb{C}$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, sodass gilt:
$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \qquad \forall n \geq n_0(\epsilon)$ *und* $\forall x \in X$
Die Funktionenfolge f_n konvergiert lokal-gleichmäßig, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U_x gibt, sodass f_n eingeschränkt auf U_x gleichmäßig gegen die Einschränkung f auf U_x konvergiert. Eine Reihe $\sum f_n$ konvergiert (lokal) gleichmäßig in X, wenn die Folge der Partialsummen (lokal) gleichmäßig konvergiert.

9.1.2.2 Kompakte Konvergenz

Definition 9.5 (Kompakte Konvergenz)
Eine Folge oder Reihe von Funktionen wird kompakt konvergent genannt, wenn sie in jeder kompakten Teilmenge von X gleichmäßig konvergiert. Aus der lokal-gleichmäßigen Konvergenz folgt die kompakte Konvergenz. Die Umkehrung gilt aber nur in lokalkompakten Räumen.

9.1.2.3 Normale Konvergenz [RS07][Kapitel 1.2]

Ein stärkerer Konvergenzbegriff, der auch die Konvergenz aller Teilreihen (bzw. -produkte) und aller umgeordneten Reihen (bzw. Produkte) sicherstellt, ist die normale Konvergenz. Außerdem sollen die Eigenschaften wie Stetigkeit und Holomorphie der Summanden (bzw. Faktoren) auf die Grenzfunktion übertragen werden, weshalb wir die lokal-gleichmäßige Konvergenz aller Teilreihen (bzw. -produkte) und aller umgeordneten Reihen (bzw. Produkte) fordern. Diese Bedingungen fassen wir in dem Begriff der Normalen Konvergenz einer Reihe (bzw. eines Produktes) zusammen.

Definition 9.6 (Normale Konvergenz einer Reihe)
Sei X ein beliebiger topologischer Raum. Die Reihe
$\sum f_n$ von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}, \qquad f_n \in C(X)$ heißt normal konvergent, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U_x von x gibt, sodass $\sum \sup_{x \in U_x} |f_n(x)| < \infty$ ist.

Definition 9.7 (Normale Konvergenz eines Produktes)
Das Produkt $\prod f_n$ heißt normal konvergent, wenn die Reihe $\sum(f_n - 1)$ normal konvergiert in X.

Eigenschaften von normal konvergenten Reihen (bzw. Produkten[⊕]):

- Jede in X normal konvergente Reihe ist dort auch lokal-gleichmäßig konvergent ([Rem02][Kapitel 3.3.1]). Aus der lokal-gleichmäßigen Konvergenz folgt wiederum die kompakte Konvergenz ([Rem02][Kapitel 3.1.3]). Daraus ergibt sich: (19)
  - Ist $f = \sum f_n \quad f_n \in C(X)$, normal konvergent in X, so ist f stetig in X (Stetigkeitssatz [Rem02][Kapitel 3.1.2]). (20)
  - Ist $f = \sum f_n \quad f_n \in O(X)$, normal konvergent in X, so ist f holomorph in X (Weierstrass'scher Konvergenzsatz [Rem02][Kapitel 8.4.2]). (21)
  - Für holomorphe Funktionen f_n in einem beliebigen Bereiche $D \subset \mathbb{C}$ gilt auch die Umkehrung, d.h. konvergiert $\sum |f_n|_K < \infty$ für jedes Kompaktum K in D, so ist $\sum f_n$ normal konvergent in X. Diese Charakterisierung wird häufig verwendet um die normale Konvergenz einer Reihe zu zeigen ([Rem02][Kapitel 3.3.2]). (22)
- Jede Teilreihe einer in X normal konvergenten Reihe ist normal konvergent in X. Außerdem bleibt durch eine beliebige Umordnung der Reihenglieder die normale Konvergenz unberührt (Umordnungssatz [Rem02][Kapitel 3.3.1]). (23)
- Linearkombinationen sowie das Produkt normal konvergenter Reihen sind wiederum normal konvergent (Reihenproduktsatz [Rem02][Kapitel 3.3.2]). (24)
- Seien $f_n \neq 0$ holomorphe Funktionen im Gebiet G, dann ist die Nullstellenmenge und -ordnung des normal konvergenten Produktes $f = \prod f_n$:
  $f \neq 0, \qquad N(f) = \bigcup N(f_n) \qquad \text{und} \qquad o_f(c) = \sum o_{f_n}(c) \qquad \forall c \in G$
  (Nullstellensatz [RS07][Kapitel 1.2.2]) (25)

[⊕] Zur besseren Lesbarkeit wird im Folgenden immer nur Reihe geschrieben, auch wenn die Eigenschaften ebenso für die Produkte gelten.

9.1.3 Logarithmische Ableitung [RS07][Kapitel 1.2.3]

Definition 9.8 (Logarithmische Ableitung)
Sei $m \neq 0$ eine meromorphe Funktion in G, dann ist $\frac{m'}{m} \in M(G)$ die logarithmische Ableitung von m. Falls m im Punkt a eine Nullstelle (bzw. Polstelle) n-ter Ordnung hat, so gilt
$Res_a \frac{m'}{m} = n \quad (bzw. -n).$

Satz 9.9 (Differentiationssatz)
Sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $h = \prod h_v$ ein in G normal konvergentes Produkt holomorpher Funktionen h_v, dann ist $\sum \frac{h_v'}{h_v}$ eine in G normal konvergente Reihe meromorpher Funktionen und es gilt:
$\frac{h'}{h} = \sum \frac{h_v'}{h_v} \in M(G)$

9.1.4 meromorphe Funktionen [Rem02][Kapitel 10.3.1]

Definition 9.10 (meromorphe Funktion)
Sei $U \neq \emptyset$ eine offene Menge in $\mathbb{C}$. Eine Abbildung

$$f : U \to \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

heißt meromorph, wenn

- *die Menge $T_f = \{z \in U | f(z) = \infty\}$ der ∞-Stellen lokal endlich ist,*
- *in jedem Punkt aus T_f sich ein Pol befindet (keine wesentlichen Singularitäten erlaubt). T_f ist somit die Polstellenmenge und*
- *f auf $U \setminus T_f$ holomorph ist.*

Da die Polstellenmenge lokal endlich ist, gibt es zu jedem Punkt $p \in T_f$ eine Kreisscheibe $B_r(p)$ in U, die außer p keinen weiteren Pol enthält. Nimmt man die punktierte Kreisscheibe $B_r(p) \setminus \{p\}$, so lässt sich f dort in einer Laurent-Reihe entwickeln, wobei m die endliche Ordnung des Poles p sei ($ord_f(p) = m$).

$$f(z) = \frac{a_m}{(z-p)^m} + \ldots + \frac{a_1}{z-p} + a_p(z)$$

$a_p(z)$ ist hierbei eine in $z - p$ konvergente Potenzreihe. Die Laurent-Reihe ohne den Potenzreihen-Anteil $a_p(z)$ wird als Hauptteil von f im Punkt p bezeichnet.

9.2 Bekannte Sätze

9.2.1 Identitätssatz für holomorphe Funktionen

Satz 9.11 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)
[Rem02][Kapitel 8.1.]
Folgende Aussagen über zwei in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen f, g sind äquivalent:

i) $f = g$

ii) Die „Identitätsmenge“ $\{w \in G : f(w) = g(w)\}$ *hat einen Häufungspunkt in G.*

iii) Es gibt einen Punkt $c \in G$, sodass gilt: $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

9.2.2 Lokal endliche Mengen

Satz 9.12 (Lokal endliche Mengen)
[Rem02][Kapitel 7.3.4]
Für jede Menge $A \subset D$ sind folgende Aussagen äquivalent:

i) Jeder Punkt von A hat eine Umgebung U, sodass $U \bigcap A$ endlich ist. A ist also eine lokal endliche Menge.

ii) A ist abgeschlossen in D, und jeder Punkt $p \in A$ ist ein isolierter Punkt von A (d.h. hat eine Umgebung U mit $U \bigcap A = \{p\}$).

iii) Für jedes Kompaktum $K \subset D$ ist $K \bigcap A$ endlich.

9.2.3 Ausschöpfungseigenschaft offener Mengen in $\mathbb{C}$

Satz 9.13 (Ausschöpfungseigenschaft offener Mengen in $\mathbb{C}$)
[Rem02][Kapitel 0.2.5]
Jede offene Menge D in $\mathbb{C}$ ist die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen kompakten Teilmengen von D.

9.2.4 Folgerung aus dem Konvergenzfortsetzungssatz von Weierstrass

Satz 9.14 (Folg. aus dem Konvergenzfortsetzungssatz von Weierstrass)
[Rem02][Kapitel 8.5.4]
Es sei A diskret in G und $f_n \in O(G)$ eine Folge, die in $G \setminus A$ kompakt konvergiert, dann konvergiert die Folge f_n bereits in ganz G kompakt.

9.2.5 Cauchysche-Ungleichung für Laurententwicklungen

Satz 9.15 (Cauchysche-Ungleichung für Laurententwicklungen)
[Rem02][Kapitel 12.1.3][Kapitel 12.2.2]
Jede im Kreisring A um c mit den Radien s, S holomorphe Funktion f ist in A eindeutig in einer Laurent-Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v (z-c)^v$$

entwickelbar, die in A normal gegen f konvergiert. Es gilt:

$$r^v |a_v| \leq M(r) := max\{|f(z)| : z \in \partial B_r(c)\} \qquad \forall s < r < S,\ v \in \mathbb{Z}$$

9.2.6 Existenzsatz für holomorphe Logarithmen

Satz 9.16 (Existenzsatz für holomorphe Logarithmen)
[Rem02][Kapitel 9.3.3]
Ist D homologisch einfach zusammenhängend, so besitzt jede in D holomorphe und dort nullstellenfreie Funktion einen holomorphen Logarithmus.

9.2.7 Jensensche Ungleichung

Satz 9.17 (Jensensche Ungleichung) *[RS07][Kapitel 4.3.5]*
Es sei $f \in O(\mathbb{E})$ und $S_1, S_2, \dots S_n \in \mathbb{E}$ paarweise verschiedene Nullstellen von f. Dann gilt:

$$|f(0)| \leq |o_f(S_1) \cdot S_1 \cdot o_f(S_2) \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot o_f(S_n) \cdot S_n| \cdot |f|_{\mathbb{E}}$$

wobei jede Nullstelle S_i im Produkt so oft vorkommt wie ihre Ordnung $o_f(S_i)$ angibt.

Literaturverzeichnis

[Ahl07] Ahlfors, Lars V.: *Complex Analysis*. third edition. New York City : McGraw-Hill Companies Inc., 2007. – ISBN 978–0–07–000657–7

[FB06] Freitag, Eberhard ; Busam, Rolf: *Funktionentheorie 1*. vierte Auflage. Heidelberg : Springer-Verlag, 2006. – ISBN 3–540–31764–3. – Kapitel IV

[Jä04] Jänich, Klaus: *Funktionentheorie*. sechste Auflage. Heidelberg : Springer-Verlag, 2004. – ISBN 3–540–20392–3. – Kapitel 9

[Les13] Lesch, Matthias: Vorlesung "Einführung in die Komplexe Analysis" - Bachelor of Science Mathematik, (V2B5). Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, SS 2013. – eigene Mitschrift

[Lor97] Lorenz, Falko: *Funktionentheorie*. erste Auflage. Heidelberg : Spektrum Akademischer Verlag, 1997. – ISBN 3–82740197–6. – Kapitel XI und XII

[Rem02] Remmert, Reinhold: *Funktionentheorie 1*. fünfte Auflage. Heidelberg : Springer-Verlag, 2002. – ISBN 978–3–540–41855–9

[RS07] Remmert, Reinhold ; Schumacher, Georg: *Funktionentheorie 2*. dritte Auflage. Heidelberg : Springer-Verlag, 2007. – ISBN 978–3–540–40432–3. – Kapitel 3, 4, und 6

[Tit02] Titchmarsh, Edward C.: *The theory of functions*. second edition. Oxford : Oxford Univ. Press, 2002. – ISBN 978–0–19–853349–8

Symbolverzeichnis

D	beliebiger Bereich in $\mathbb{C}$
G	beliebiges Gebiet in $\mathbb{C}$
(f)	Hauptdivisor von der Funktion f; siehe Definition 2.2
Div	siehe Definition 1.2
Div^+	positiver Divisor; $Div^+ : D \to \mathbb{Z}^+$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{C}^\times$	Menge der komplexen Zahlen ohne Null
$\mathbb{E}$	Einheitskreisscheibe
$O(D)$	Menge der holomorphen Funktionen im Bereich D
$M(D)$	Menge der meromorphen Funktionen im Bereich D
h	holomorphe Funktion
m	meromorphe Funktion
HV	siehe Definition 3.1
i	imaginäre Einheit

$B_r(a)$	offene Kreisscheibe um a mit Radius r
$o_h(z)$	Gibt die Ordnung der holomorphen Funktion h $\neq 0$ an der Stelle z an. $o_h(z) := min\{v \in \mathbb{N} : f^{(v)}(z) \neq 0\}$ Ist die Funktion h meromorph, dann ist die Ordnung im holomorphen Teil wie oben definiert nur an den nicht hebbaren Polstellen c gilt: $o_h(c) := min\{v \in \mathbb{N} : (z-c)^v f(z)$ ist beschränkt um c$\}$. Polordnungen sind also auch positiv.
N(f)	Nullstellenmenge der Funktion f
P(f)	Polstellenmenge der Funktion f

Glossar

diskret

Eine Menge A ist diskret, wenn jeder Punkt x $\in$ A eine offene Umgebung U besitzt, sodass U $\bigcap$ A nur den Punkt x enthält. Die Menge A darf somit keinen Häufungspunkt besitzen.

Divisor

siehe Definition 1.2

Hauptdivisor

siehe Definition 2.2

Hauptteilverteilung

siehe Definition 3.1

lokal endlich

Eine Menge A ist lokal endlich, wenn jeder Punkt von A eine offene Umgebung U besitzt, sodass U $\bigcap$ A endlich ist.

Träger

Der Träger T einer Funktion ist die abgeschlossene Hülle der Nichtnullstellenmenge. T := $\overline{\{x \in Definitionsbereich \mid f(x) \neq 0\}}$