Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen bzw. zu vorgegebenen Null- und Polstellen auf kompakten Riemannschen Flächen

Monika Barthelme

Geboren am 3. November 1992 in Bonn

1. Juli 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Matthias Lesch

Mathematisches Institut

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Theorie der Riemannschen Flächen ist 150 Jahre alt und hat sich aus der Idee entwickelt, die Funktionentheorie nicht nur auf ebene Definitionsgebiete zu beschränken, sondern auf allgemeinere Flächen auszudehnen. Bernhard Riemann beschäftigte sich erstmals in seiner Dissertation im Jahr 1851 mit der Erkenntnis, dass man eine Funktionentheorie nicht nur auf der Zahlenebene, sondern auf einer „ausgebreiteten Fläche" aufbauen kann. 1913 wurde die Definition der Riemannschen Flächen als Ausbreitung der Zahlenebene von Hermann Weyl gelöst und verallgemeinert. Mithilfe der Riemannschen Flächen konnten nun mehrdeutige algebraische Funktionen integriert werden, was vorher große Schwierigkeiten bereitet hatte.

Wie auf der komplexen Ebene kann man auch auf einer Riemannschen Fläche holomorphe und meromorphe Funktionen erklären. In dieser Arbeit stellen wir uns die Frage, unter welchen Bedingungen eine meromorphe Funktion existiert, die bestimmte vorgegebene Eigenschaften besitzt.

Aus den Grundlagen der Funktionentheorie wissen wir, dass es auf der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ zu einer vorgegebenen Null- und Polstellenverteilung eine meromorphe Funktion gibt, die genau diese Null- und Polstellen besitzt. Mithilfe des Weierstraßschen Produktsatzes kann man solch eine Funktion sogar explizit angeben. Genauso kann man auf der komplexen Ebene nach dem Satz von Mittag-Leffler zu jeder vorgegebenen Verteilung von Hauptteilen eine meromorphe Funktion angeben, die genau diese Hauptteile besitzt. Im Fall von kompakten Riemannschen Flächen müssen jedoch Bedingungen an die Vorgaben gestellt werden.

Als Erstes beschäftigen wir uns mit der Vorgabe von Hauptteilen für eine meromorphe Funktion. Um eine Bedingung für die Existenz solch einer Funktion formulieren zu können, müssen zunächst Eigenschaften meromorpher Differentialformen auf der kompakten Riemannschen Fläche untersucht werden. Als Nächstes wird die Lage von Null- und Polstellen einer meromorphen Funktion auf einer kompakten Riemannschen Fläche untersucht. Die notwendigen und hinreichenden Kriterien für die Existenz einer meromorphen Funktion zu vorgegebenen Null- und Polstellen werden durch das Abelsche Theorem formuliert. Anschließend wird die Struktur der Riemannschen Fläche bezüglich ihrer meromorphen Funktionen und Differentialformen näher untersucht, indem zwei spezifische Gruppen miteinander verglichen werden. Als letztes klassifizieren wir die kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht 1 als Gitter in der komplexen Ebene. Hier ist die Angabe einer meromorphen Funktion, die durch das Abelsche Theorem gesichert wird, sogar explizit möglich.

Diese Arbeit orientiert sich an den Paragraphen 18, 20 und 21 aus [For77]. Unter anderem wird die Reihenfolge der dort genannten Definitionen und Sätze größtenteils beibehalten. Ferner werden Beweise, die nicht aus [For77] entnommen wurden, entsprechend markiert.

Die Paragraphen 1 und 2 aus [For77], sowie die Grundlagen der Funktionentheorie werden als bekannt vorausgesetzt. Der Vollständigkeit halber folgen jedoch die wichtigsten Definitionen über Riemannsche Flächen.

2 Voraussetzungen

Im Folgenden werden grundlegende Definitionen zu Riemannschen Flächen und eine einheitliche Notation eingeführt.

Definition 2.1. *Sei X eine zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_i \colon U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^2 \mid i \in I\}$ von Homöomorphismen. Dann heißt X* Riemannsche Fläche*, wenn für je zwei Karten $\varphi_i, \varphi_j \in \mathcal{A}$ die Komposition*

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \tag{2.1}$$

biholomorph ist, wobei $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert wird.

Beispiel 2.2. *Die einfachsten Beispiele Riemannscher Flächen sind offene Teilmengen der komplexen Ebene, da hier nur eine Karte, die Identität, benötigt wird. Die Riemannsche Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ist ein Beispiel für eine kompakte Riemannsche Fläche. Als Karte für die Umgebung $U_1 = \mathbb{C}$ wählt man die Identität und für die Umgebung $U_2 = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ folgende Karte:*

$$\begin{aligned} \varphi \colon U_2 &\to \mathbb{C}, \\ z &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } z = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Diese Karten sind auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ biholomorph verträglich.

Definition 2.3. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$ eine offene Teilmenge. Dann heißt eine Funktion $f \colon Y \to \mathbb{C}$* holomorph*, wenn für jede Karte $\varphi \colon U \to V$ die Funktion*

$$f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(Y \cap U) \to \mathbb{C} \tag{2.2}$$

im üblichen Sinne holomorph ist. Eine Funktion $f \colon Y \to \mathbb{C}$ heißt meromorph*, falls es eine diskrete Teilmenge $Y' \subset Y$ gibt, sodass $f\big|_{(Y \setminus Y')}$ holomorph ist und für jedes $p \in Y'$ gilt:*

$$\lim_{x \to p} |f(x)| = \infty. \tag{2.3}$$

Die Punkte aus Y' heißen Polstellen *von f.*

Ist $\varphi \colon U \to V \subset \mathbb{C}$ eine Karte auf X, so nennt man (U, φ) Koordinatenumgebung von allen Punkten $a \in U$. Da φ holomorph ist, schreibt man in dem Zusammenhang meistens den Buchstaben z anstatt von φ.

Definition 2.4. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $Y \subset X$ offen und $f: Y \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion. Dann ist die* Ordnung *an einem Punkt $a \in X$ definiert als*

$$\operatorname{ord}_a(f) = \begin{cases} 0, & f \text{ ist in } a \text{ holomorph und } f(a) \neq 0; \\ k, & f \text{ hat bei } a \text{ eine Nullstelle der Ordnung } k; \\ -k, & f \text{ hat bei } a \text{ einen Pol der Ordnung } k; \\ \infty, & f \text{ ist in einer Umgebung von } a \text{ identisch Null.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Dabei hat f bei a eine Null- beziehungsweise Polstelle der Ordnung k, falls $f \circ \varphi^{-1}$ für eine Karte $\varphi: U \to \mathbb{C}$ mit $a \in U$ eine Null- beziehungsweise Polstelle der Ordnung k bei $\varphi(a)$ hat. Die Ordnung ist unabhängig von der Wahl der Karte, da die Kartenwechsel biholomorph sind und so die Vielfachheit der Null- oder Polstellen erhalten.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns nicht nur mit der Existenz von bestimmten Funktionen auf einer Riemannschen Fläche, sondern auch mit der Existenz von komplexen Differentialformen. Eine ausführliche Definition der Differentialformen kann in [Don11, 5.3.1] nachgelesen werden.

Definition 2.5. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $\omega \in \Gamma(\Lambda^1 TX \otimes \mathbb{C})$ eine 1-Form, das heißt, ω sei ein Schnitt aus dem komplexifizierten Kotangentialraum von X. Dann ist ω vom Typ $(1,0)$ beziehungsweise vom Typ $(0,1)$, falls es zu jedem Punkt eine holomorphe Kartenumgebung (U, z) und eine glatte Funktion $f \in C^\infty(U)$ gibt, sodass*

$$\omega\big|_U = f dz, \text{ falls } \omega \text{ vom Typ (1,0) ist;}$$
$$\omega\big|_U = f d\overline{z}, \text{ falls } \omega \text{ vom Typ (0,1) ist.}$$

Dabei ist $z = x + iy$, sowie $dz = dx + idy$ und $d\overline{z} = dx - idy$. Die Klasse der $(1,0)$- beziehungsweise $(0,1)$-Formen ist aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen wohldefiniert.

Falls ω als $\omega\big|_U = f dz$ mit einer auf U holomorphen Funktion f dargestellt werden kann, so heißt ω *holomorphe Differentialform* auf U. Die Holomorphie einer Differentialform ist unabhängig von der Wahl der Karte.

Falls ω bis auf isolierte Singularitäten eine holomorphe Differentialform ist und lokal $\omega\big|_U = f dz$ für eine meromorphe Funktion f gilt, so heißt ω *meromorphe Differentialform.* Für eine meromorphe Differentialform ω auf X definieren wir die Ordnung von ω an einem Punkt $a \in X$ als $\operatorname{ord}_a(\omega) = \operatorname{ord}_a(f)$, wobei ω in einer Umgebung von a die lokale Darstellung $\omega = f dz$ besitzt. Da sich zwei meromorphe Funktionen in verschiedenen lokalen Darstellungen nur um eine biholomorphe Funktion unterscheiden, ist die Ordnung einer meromorphen Differentialform wohldefiniert.

Definition 2.6. *Eine 2-Form $\xi \in \Gamma(\Lambda^2 TM \otimes \mathbb{C})$ ist vom Typ (1,1), falls es zu jedem Punkt eine holomorphe Kartenumgebung (U, z) und eine glatte Funktion $f \in C^\infty(U)$ gibt, sodass ξ die lokale Darstellung*

$$\xi\big|_U = f dz \wedge d\overline{z}$$

hat.

Definition 2.7. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $U \subset X$ offen. Dann führen wir folgende Bezeichnungen ein:*

- $\mathcal{E}^{(1)}(U) = \{$*glatte Differentialformen 1. Ordnung auf* $U\}$;
- $\mathcal{E}^{(1,0)}(U) = \{$*Differentialformen von Typ (1,0) auf* $U\}$;
- $\mathcal{E}^{(0,1)}(U) = \{$*Differentialformen von Typ (0,1) auf* $U\}$;
- $\mathcal{E}^{(1,1)}(U) = \{$*Differentialformen von Typ (1,1) auf* $U\}$;
- $\mathcal{O}(U) = \{$*holomorphe Funktionen auf* $U\}$;
- $\Omega(U) = \{$*holomorphe Differentialformen auf* $U\}$;
- $\mathcal{M}(U) = \{$*meromorphe Funktionen auf* $U\}$;
- $\mathcal{M}^{(1)}(U) = \{$*meromorphe Differentialformen auf* $U\}$.

Definition 2.8. *Sei (U, z) eine Koordinatenumgebung auf einer Riemannschen Fläche X. Dann sind die Operatoren ∂ und $\overline{\partial}$ definiert als*

$$\begin{aligned}
\partial \colon C^\infty(U) &\to \mathcal{E}^{(1,0)}(U), \\
f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial z} dz; \\
\overline{\partial} \colon C^\infty(U) &\to \mathcal{E}^{(0,1)}(U), \\
f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z};
\end{aligned}$$

sowie für eine Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$ mit der lokalen Darstellung $\omega = f dz + g d\overline{z}$ als

$$\begin{aligned}
\partial \colon \mathcal{E}^{(1)}(U) &\to \mathcal{E}^{(1,1)}(U), \\
\omega &\mapsto \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge d\overline{z}; \\
\overline{\partial} \colon \mathcal{E}^{(1)}(U) &\to \mathcal{E}^{(1,1)}(U), \\
\omega &\mapsto \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz.
\end{aligned}$$

Für $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ ist $\partial\omega$ auch global definiert, da die Operatoren ∂ und $\overline{\partial}$ mit Kartenwechseln verträglich sind. Weiterhin gilt $\partial \circ \partial = 0$ und $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$.

Für die äußere Ableitung $d \colon C^\infty(U) \to \mathcal{E}^{(1)}$ erhält man die Zerlegung $df = \partial f + \overline{\partial} f$ sowie für $d \colon \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}^{(1,1)}$ die Zerlegung $d\omega = \partial\omega + \overline{\partial}\omega$.

Der Operator $\overline{\partial}$ wird auch *Dolbeault-Operator* genannt.

3 Vorüberlegungen

Bevor wir uns mit den in der Einleitung beschriebenen Punkten beschäftigen, müssen weitere grundlegende Definitionen und Sätze eingeführt werden. Eine der wichtigsten Definitionen ist die des Residuums einer meromorphen Differentialform:

Definition 3.1. *Sei X eine Riemannsche Fläche, sei $A \subset X$ diskret und $\omega \in \Omega(X \setminus A)$ eine auf X meromorphe Differentialform, das heißt, ω habe in A höchstens Pole. Dann ist das* Residuum *von ω in einem Punkt $a \in A$ definiert als*

$$\mathrm{Res}_a(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \omega, \tag{3.1}$$

wobei B eine genügend kleine kompakte Menge mit glattem und zusammenhängendem Rand ist, sodass $a \in B^\circ$ und $B \cap A = \{a\}$, also nur das Element a aus A im Inneren von B enthalten ist.

Satz 3.2. *Das Residuum einer meromorphen Differentialform ω ist wohldefiniert und kann in einer Koordinatenumgebung (U, z) in üblicher Weise aus der Laurententwicklung von $f \in \mathcal{M}(U)$ gewonnen werden, wobei $\omega = f dz$ gilt.*

Beweis. Sei $a \in A$ und (U, z) eine Koordinatenumgebung von a mit $z(a) = 0$. Dann kann ω lokal als $\omega = f dz$ mit einer meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(U)$ dargestellt werden. Da f in a einen Pol hat, kann man f in seiner Laurententwicklung schreiben als

$$f = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n z^n$$

für ein k mit $c_{-k} \neq 0$. Es gilt also für eine kompakte Menge $B \subset U$

$$\mathrm{Res}_a(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} f dz = c_{-1}$$

nach dem Residuensatz in der komplexen Ebene (siehe [Fis09, Kapitel IV. Theorem 3.1]).

Das Residuum ist unabhängig von der Wahl der Koordinatenumgebung, da das Integral über eine Riemannsche Fläche wohldefiniert ist. Da ω auf ∂B holomorph ist, gilt $d\omega = 0$; die Wahl einer anderen kompakten Menge B' ändert nach [For77, Satz 10.10 b)] den Wert des Integrals also nicht, da ∂B homotop zu $\partial B'$ ist. □

Bemerkung 3.3. *Anders als für meromorphe Differentialformen ist das Residuum einer meromorphen Funktion auf einer Riemannschen Fläche nicht unabhängig von der Wahl der Karte.*

Satz 3.4 (Residuensatz)**.** *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $A \subset X$ eine diskrete Teilmenge und $\omega \in \Omega(X \setminus A)$ eine holomorphe Differentialform mit isolierten Singularitäten, also $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$. Dann gilt*

$$\sum_{a \in A} \operatorname{Res}_a(\omega) = 0. \tag{3.2}$$

Beweis. Sei $B_\epsilon(a_j)$ ein offener Ball um a_j, sodass keine andere Singularität außer a_j in $B_\epsilon(a_j)$ enthalten ist. Dann ist ω auf $X' := X \setminus \bigcup_{j=1}^N B_\epsilon(a_j)$ eine holomorphe Differentialform, es gilt also $d\omega = \overline{\partial}\omega = 0$ auf X'. Da auch X' kompakt ist, folgt mit dem Satz von Stokes für Differentialformen mit kompaktem Träger (siehe [Mir95, Theorem 3.16]):

$$0 = \int_{X'} d\omega = \int_{\partial X'} \omega = -\sum_{j=1}^N \int_{\partial B_\epsilon(a_j)} \omega = -2\pi i \sum_{a \in A} \operatorname{Res}_a(\omega).$$

Das zeigt die Behauptung. □

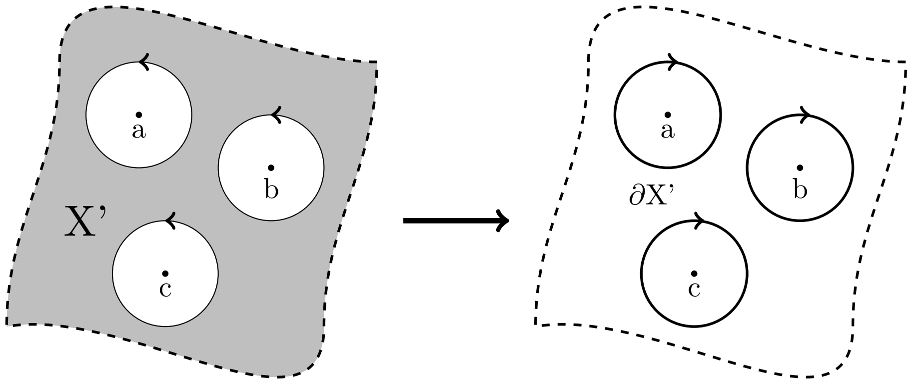

Abbildung 1: Residuensatz

Satz 3.5. *Sei X eine Riemannsche Fläche und $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}$ eine Differentialform mit kompaktem Träger. Dann ist*

$$\int_X d\omega = 0.$$

Beweis. Mithilfe einer Zerlegung der 1 kann man ω schreiben als

$$\omega = \omega_1 + \ldots + \omega_k, \tag{3.3}$$

wobei der Träger $\mathrm{supp}(\omega_i) := \overline{\{x \in X | \omega_i(x) \neq 0\}}$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$ kompakt ist und in einer Koordinatenumgebung U_i liegt. Seien nun B_i für $i = 1, \ldots, k$ kompakte Mengen mit glattem Rand, sodass $\mathrm{supp}(\omega_i) \subset B_i \subset U_i$. Dann gilt für jedes $i = 1, \ldots, k$:

$$\int_X d\omega_i = \int_{B_i} d\omega_i = \int_{\partial B_i} \omega = 0. \tag{3.4}$$

Die Additivität des Integrals zeigt die Behauptung. □

Anders als das Residuum oder der Hauptteil einer meromorphen Funktion ist die Ordnung der Null- beziehungsweise Polstellen wohldefiniert. Wir erhalten folgende wichtige Aussage über das Verhältnis der Anzahl der Nullstellen und Polstellen.

Satz 3.6. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und $f \in \mathcal{M}(X)$ nicht konstant. Dann ist die Summe der Polstellenordnungen gleich der Summe der Nullstellenordnungen, also*

$$\sum_{x \in X} \mathrm{ord}_x(f) = 0.$$

Beweis. Sei a ein Punkt aus X und (U, z) eine Koordinatenumgebung um a mit $z(a) = 0$. Sei $\mathrm{ord}_a(f) = n$, dann können wir f in der Nähe von a schreiben als $f = cz^n +$ *Terme höherer Ordnung*. Dann hat $\frac{1}{f}$ die Form $\frac{1}{f} = c^{-1}z^{-n} +$ *Terme höherer Ordnung*, also gilt

$$df = (ncz^{n-1} + \textit{Terme höherer Ordnung})dz,$$

und damit gilt für die meromorphe Differentialform $\frac{df}{f}$ in der Nähe von a

$$\frac{df}{f} = (\frac{n}{z} + \textit{Terme höherer Ordnung})dz.$$

Es gilt also

$$\mathrm{Res}_a\left(\frac{df}{f}\right) = \mathrm{ord}_a(f). \tag{3.5}$$

Aus dem Residuensatz für $\frac{df}{f}$ folgt nun die Behauptung. □

Korollar 3.7. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Falls f eine auf ganz X holomorphe Funktion ist, so ist f schon konstant.*

Beweis. Angenommen die Funktion f ist nicht konstant. Dann nimmt sie in einem Punkt $x \in X$ ihr Maximum an; die Ableitung von f hat also in x eine Nullstelle. Dies ist ein Widerspruch zum obigen Satz, da f holomorph ist und damit keine Polstellen hat. □

Definition 3.8 (Geschlecht einer Riemannschen Fläche)**.** *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Dann ist*

$$H^1_{\overline{\partial}}(X) :=\frac{\mathrm{Kern}(\overline{\partial}\colon \mathcal{E}^{(1)}(X) \to \mathcal{E}^{(1,1)}(X))}{\mathrm{Bild}(\overline{\partial}\colon C^\infty(X) \to \mathcal{E}^{(1)}(X))}.$$

die erste Kohomologiegruppe des $\overline{\partial}$-Operators. Sie wird auch erste Dolbeault-Kohomologiegruppe *genannt. Da die Funktionen und Differentialformen auf einer kompakten Riemannschen Fläche X mit dem $\overline{\partial}$-Operator einen elliptischen Komplex bilden, folgt aus dem Hodge-Theorem, dass* $\dim\left(H^1_{\overline{\partial}}(X)\right)$ *endlich ist (siehe [Wel08, Theorem 5.2] oder [Gri11, 6. Hodge Theorem]). Wir bezeichnen mit*

$$g := \dim\left(H^1_{\overline{\partial}}(X)\right)$$

das Geschlecht *von X.*

Bemerkung 3.9. *Das topologische Geschlecht einer Riemannschen Fläche stimmt überein mit dieser Definition des Geschlechtes. So ist zum Beispiel der Torus mit n Henkeln eine Riemannsche Fläche des Geschlechts n.*

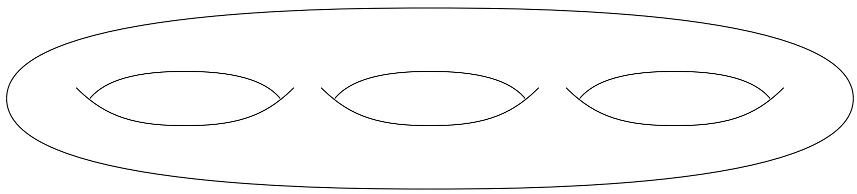

Abbildung 2: Torus mit 3 Henkeln

Mithilfe des Serreschen Dualitätssatzes folgt (siehe [For77, Bemerkung 17.10]), dass das Geschlecht einer kompakten Riemannschen Fläche gleich der Maximalzahl linear unabhängiger holomorpher Differentialformen auf X ist. Also gilt

$$g = \dim(\Omega(X)). \tag{3.6}$$

Damit wir später eine Verteilung von Null- und Polstellen sinnvoll angeben können, wird der Begriff des Divisors eingeführt.

Definition 3.10 (Divisor)**.** *Sei X eine Riemannsche Fläche. Ein* Divisor *D auf X ist eine Abbildung*

$$D\colon X \to \mathbb{Z},$$

sodass in jeder kompakten Teilmenge $K \subset X$ nur endlich viele Punkte $x \in K$ mit $D(x) \neq 0$ existieren. Die Menge der Divisoren auf X bildet bezüglich der

Addition eine abelsche Gruppe und wird mit $\mathrm{Div}(X)$ *bezeichnet. Ein Divisor* $D \in \mathrm{Div}(X)$ *heißt* Hauptdivisor*, wenn es eine meromorphe Funktion* $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ *gibt, sodass* $\mathrm{ord}_x(f) = D(x)$ *für alle* $x \in X$ *gilt. Man schreibt auch:* $(f) = D$*.*

Außerdem definieren wir mit

$$\deg(D) := \sum_{x \in X} D(x) \tag{3.7}$$

den Grad *eines Divisors.*

Für einen Hauptdivisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche gilt also nach Satz 3.6, dass $\deg(D) = 0$ ist. Ein *positiver Divisor* D ist ein Divisor mit $D(x) \geq 0$ für alle $x \in X$ und $\deg(D) > 0$.

Der folgende Satz stellt eine Beziehung zwischen der Anzahl linear unabhängiger meromorpher Funktionen und der Anzahl linear unabhängiger meromorpher Differentialformen auf einer kompakten Riemannschen Fläche her, wobei die Null- und Polstellenordnungen durch einen Divisor begrenzt werden. Er wird ohne Beweis verwendet; dieser kann aber in [Lam09, 13.1.5] nachgelesen werden.

Satz 3.11 (Satz von Riemann-Roch)**.** *Sei* X *eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht* $g \geq 0$ *und* D *ein beliebiger Divisor auf* X*. Dann gilt folgende Gleichung:*

$$l(D) - i(D) = \deg(D) - g + 1, \tag{3.8}$$

wobei

- $\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) \mid \mathrm{ord}_a(f) \geq -D(a)\}$,
- $l(D) := \dim(\mathcal{L}(D))$,
- $\Omega(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)} \mid \mathrm{ord}_a(\omega) \geq D(a)\}$,
- $i(D) := \dim(\Omega(D))$.

Die Zahl $i(D)$ *nennt man auch* Spezialitätsindex *des Divisors* D*.*

Bemerkung 3.12. *Falls* D *ein negativer Divisor ist, das heißt* $D(x) \leq 0$ *für alle* $x \in X$ *und* $\deg(D) < 0$*, so ist* $l(D) = 0$*. Denn für jede von Null verschiedene meromorphe Funktion* $f \in \mathcal{L}(D)$ *gilt*

$$(f) \geq -D$$

und damit

$$\deg(f) \geq -\deg(D) > 0.$$

Da X *kompakt ist, ist dies nach Satz 3.6 nicht möglich.*

Der Satz von Riemann-Roch liefert eine erste Aussage über die Existenz meromorpher Funktionen auf einer kompakten Riemannschen Fläche. Sei nämlich D ein Divisor mit $\deg(D) \geq g$, dann gilt

$$l(D) - i(D) = \deg(D) - g + 1, \tag{3.9}$$

also

$$l(D) \geq 1 + i(D). \tag{3.10}$$

Es gibt also mindestens eine nicht konstante meromorphe Funktion auf X, deren Pole nur an den Stellen a mit $D(a) > 0$ liegen können.

4 Das Mittag-Leffler-Problem

In den folgenden Kapiteln werden die Eigenschaften meromorpher Funktionen und Differentialformen auf einer kompakten Riemannschen Fläche genauer untersucht. Uns interessiert nun, unter welchen Bedingungen eine meromorphe Funktion beziehungsweise Differentialform auf einer kompakten Riemannschen Fläche existieren kann. Die Beweise in diesem Kapitel orientieren sich an [Lam09, 13.6.5] und [Lam09, 13.6.6].

Als erstes betrachten wir die Vorgabe von Hauptteilen an bestimmten Punkten. Dazu definieren wir allgemein den Begriff eines Hauptteils einer meromorphen Differentialform.

Definition 4.1 (Hauptteil). *Seien ω_1 und ω_2 zwei meromorphe Differentialformen, die auf eventuell verschiedenen Umgebungen eines festen Punktes $a \in X$ definiert sind. Die Klassen der Äquivalenzrelation*

$$\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \operatorname{ord}_a(\omega_1 - \omega_2) \geq 0$$

heißen Hauptteile bei a.

Für eine meromorphe Differentialform ω und eine Koordinatenumgebung (U, z) mit $a \in U$ ist der Hauptteil auf klassische Weise durch die Laurententwicklung von f bestimmt, wobei ω die lokale Darstellung $\omega = f dz$ mit $f \in \mathcal{M}(U)$ besitzt.

Ein *Hauptteilsystem* h auf X ist eine Abbildung, die jedem Punkt $x \in X$ einen Hauptteil zuordnet, sodass in jedem Kompaktum nur endlich viele Hauptteile ungleich 0 sind. Zu einem Hauptteilsystem h gehört der positive Divisor (h), der jeder Stelle $x \in X$ die (positive) Polstellenordnung von $h(x)$ zuordnet. Mit $Res(h) = \sum_{x \in X} Res_x(h)$ bezeichnen wir für eine kompakte Fläche X die Residuensumme des Hauptteilsystems.

4.1 Differentialformen zu vorgegebenen Hauptteilen

Definition 4.2 (Mittag-Leffler-Verteilung von Differentialformen)**.** *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche und sei*

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} U_j$$

eine offene Überdeckung. Seien $\omega_j \in \mathcal{M}^{(1)}(U_j)$ meromorphe Differentialformen auf U_j, sodass die Differenz

$$\omega_i - \omega_j \in \Omega(U_i \cap U_j) \tag{4.1}$$

je eine holomorphe Differentialform darstellt. $(\omega_i)_{i=1}^N$ heißt Mittag-Leffler-Verteilung von Differentialformen.

Nun ist eine auf X meromorphe 1-Form $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ gesucht, sodass

$$\omega\big|_{U_i} - \omega_i \in \Omega(U_i) \tag{4.2}$$

für jedes $i = 1, ..., N$. Dieses ω bezeichnet man als *Lösung der Mittag-Leffler-Verteilung.*

Wir definieren $\mathrm{Res}_a(\omega_i)_{i=1}^N = \mathrm{Res}_a(\omega_i)$, falls a in U_i liegt. Aufgrund von (4.1) sind die Residuen der Mittag-Leffler-Verteilung $(\omega_i)_{i=1}^N$ wohldefiniert.

Satz 4.3. *Es existiert genau dann eine Lösung einer Mittag-Leffler-Verteilung $(\omega_i)_{i=1}^N$, wenn für die Polstellenmenge $A \subset X$ gilt:*

$$\sum_{a \in A} \mathrm{Res}_a(\omega_i)_{i=1}^N = 0 \tag{4.3}$$

Bemerkung 4.4. *Es genügt, das Hauptteilsystem der Verteilung zu betrachten, welches auch wegen (4.1) wohldefiniert ist, da eine meromorphe Differentialform mit diesen Hauptteilen die Mittag-Leffler-Verteilung löst.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Da X kompakt ist, ist für jede meromorphe Differentialform $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ nach dem Residuensatz 3.4 die Summe der Residuen Null.

Die Rückrichtung behauptet nun, dass diese notwendige Bedingung schon hinreichend ist.

„$\Leftarrow$“: Sei D ein beliebiger positiver Divisor auf X. Betrachte folgende Vektorräume:

- $\Omega(D) := \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \mid (\omega) \geq D\}$
- $S_0(D) := \{h \text{ Hauptteilsystem auf } X \mid (h) \leq D \text{ und } \mathrm{Res}(h) = 0\}$

Weiterhin betrachten wir die lineare Abbildung zwischen den beiden Mengen

$$\begin{aligned} h\colon \Omega(-D) &\to S_0(D), \\ \omega &\mapsto h(\omega), \end{aligned}$$

die einer Differentialform aus $\Omega(-D)$ ihr Hauptteilsystem zuordnet. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da für jede Differentialform ω mit $(\omega) \geq -D$ die Polordnung $\operatorname{ord}_a(\omega)$ durch $-D(a)$ nach unten begrenzt ist und damit $h(a) \leq D(a)$ gilt. Der Kern dieser Abbildung besteht aus den holomorphen Differentialformen auf X, da nur diese keine Hauptteile, also keine Polstellen, besitzen. Also gilt für die Dimension des Kerns

$$\dim(\operatorname{Kern}(h)) = \dim(\Omega(X)) = g.$$

Weiterhin ist nach der Definition im Satz von Riemann-Roch 3.11

$$\dim(\Omega(-D)) = i(-D).$$

Da die Anzahl der frei wählbaren Koeffizienten der Hauptteile in $S_0(D)$ durch $\deg(D)$ begrenzt ist und die Summe der Residuen 0 betragen muss, erhält man für den Bildraum

$$\dim(S_0(D)) = \deg(D) - 1.$$

Mithilfe des Satzes von Riemann-Roch 3.11 und Bemerkung 3.12 folgt:

$$l(-D) - i(-D) = -i(-D) = \deg(-D) - g + 1 = -\deg(D) - g + 1.$$

Insgesamt erhält man

$$\operatorname{rg}(h) = i(-D) - g = \deg(D) - 1 = \dim(S_0(D)).$$

Die Abbildung h ist damit surjektiv. Wählt man den positiven Divisor D groß genug, so stellt für eine vorgegebene Mittag-Leffler-Verteilung von Differentialformen ein Urbild des zugehörigen Hauptteilsystems eine Lösung der Verteilung dar. $\square$

In diesem Beweis sehen wir, dass der Satz von Riemann-Roch ein wichtiges Werkzeug ist, um die Anzahl von bestimmten Funktionen und Differentialformen zu vergleichen. Eine Konsequenz aus dem obigen Satz ist folgendes Korollar.

Korollar 4.5. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche.*

a) Zu jedem Punkt $p \in X$ und jeder natürlichen Zahl $n \geq 2$ gibt es eine meromorphe Differentialform auf X, die in p einen Pol n-ter Ordnung hat und sonst holomorph ist („Elementardifferential 2. Gattung“).

b) Zu je zwei Punkten $p, q \in X, p \neq q$, gibt es eine meromorphe Differentialform auf X, die in p und q Pole erster Ordnung mit den Residuen $+1$ bzw. -1 hat und sonst holomorph ist („Elementardifferential 3. Gattung“).

4.2 Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen

Das Mittag-Leffler-Problem kann auch für meromorphe Funktionen auf einer kompakten Riemannschen Fläche formuliert werden.

Definition 4.6 (Mittag-Leffler-Verteilung)**.** *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und*

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} U_j$$

eine offene Überdeckung. Seien $f_j \in \mathcal{M}(U_j)$ meromorphe Funktionen auf U_j, sodass die Differenz

$$f_i - f_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j) \tag{4.4}$$

je eine holomorphe Funktion darstellt. $(f_i)_{i=1}^N$ heißt Mittag-Leffler-Verteilung.

Nun ist eine auf ganz X meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ gesucht, sodass

$$f\big|_{U_i} - f_i \in \mathcal{O}(U_i) \tag{4.5}$$

für alle $i = 1, ..., N$. Dieses f bezeichnet man als *Lösung der Mittag-Leffler-Verteilung.*

Der klassische Hauptteil, dargestellt als Laurentreihe für meromorphe Funktionen, ist nicht invariant unter Kartenwechseln. Trotzdem kann man wie bereits dargestellt den Hauptteil als eine Äquivalenzrelation definieren. Das bedeutet, dass zwei meromorphe Funktionen genau dann den gleichen Hauptteil an einem Punkt $a \in X$ haben, wenn ihre Differenz dort holomorph ist.

Es wird also durch die Mittag-Leffler-Verteilung ein Hauptteilsystem μ vorgegeben, zu dem eine meromorphe Funktion f gesucht wird, die genau diese vorgegebenen Hauptteile besitzt.

Um dieses Problem auf das obige reduzieren zu können, definieren wir zu jeder Differentialform $\omega \in \Omega(X)$ das Hauptteilsystem $\mu\omega$, indem der Hauptteil bei $a \in X$ durch die Differentialform $f\omega$ definiert wird.

Satz 4.7. *Es existiert genau dann eine Lösung einer Mittag-Leffler-Verteilung $(f_i)_{i=1}^N$, wenn für die Polstellenmenge $A \subset X$ und für alle $\omega \in \Omega(X)$ gilt:*

$$\sum_{a_j \in A} \mathrm{Res}_{a_j}(f_i\omega)_{i=1}^N = 0. \tag{4.6}$$

Bemerkung 4.8. *Zur Vereinfachung der Notation bezeichnen wir mit $\mathrm{Res}(f_i\omega)_{i=1}^N$ die Residuensumme der Verteilung. Es genügt, die Bedingung $\mathrm{Res}(f_i\omega)_{i=1}^N = 0$ für alle $\omega \in \Omega(X)$ für eine Basis $\omega_1, \ldots, \omega_g$ von $\Omega(X)$ nachzuprüfen.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\omega \in \Omega(X)$ eine beliebige holomorphe Differentialform. Falls eine Lösung $f \in \mathcal{M}(X)$ der Mittag-Leffler-Verteilung existiert, so löst die meromorphe Differentialform $f\omega$ die Mittag-Leffler-Verteilung von Differentialformen $(f_i\omega)_{i=1}^N$, also ist $\operatorname{Res}(f_i\omega)_{i=1}^N = 0$.

„$\Leftarrow$“: Wie im vorherigen Beweis betrachten wir das von der Verteilung $(f_i)_{i=1}^N$ vorgegebene Hauptteilsystem μ. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Res}(\mu\omega)$ die Summe $\operatorname{Res}(f_i\omega)_{i=1}^N$. Sei D ein beliebiger positiver Divisor, dann ist

$$F(D) := \{\mu \text{ Hauptteilsystem } \mid (\mu) \leq D\}$$

ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $\deg(D)$. Wir betrachten den Vektorraum

$$\mathrm{F}_0(D) = \{\mu \in F(D) \mid \operatorname{Res}(\mu\omega) = 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega(X)\} \subset F(D).$$

Falls nun μ_f das Hauptteilsystem einer meromorphen Funktion f ist, so liegt μ_f in $\mathrm{F}_0(D)$, da $f\omega$ für alle $\omega \in \Omega(X)$ eine meromorphe Differentialform auf X darstellt.

Die Abbildung

$$\mu\colon \mathcal{L}(D) \to F_0(D),$$

die einer Funktion aus $\mathcal{L}(D)$ ihr Hauptteilsystem zuordnet, ist linear und hat als Kern die konstanten Funktionen, da jede auf ganz X holomorphe Funktion konstant ist. Die Rückrichtung des Satzes ist bewiesen, falls diese Abbildung surjektiv ist. Dies ist äquivalent dazu, dass

$$\dim(F_0(D)) = l(D) - 1 \text{ für alle } D,$$

da $\dim(\mathcal{L}(D)) = l(D)$ und $\dim(\operatorname{Kern}(h)) = \dim(\mathbb{C}) = 1$. Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir folgende bilineare Abbildung:

$$\begin{aligned} F(D) \times \Omega(X) &\to \mathbb{C}, \\ (\mu, \omega) &\mapsto \operatorname{Res}(\mu\omega) \end{aligned}$$

Der Linkskern dieser Abbildung ist $F_0(D) \subset F(D)$, der Rechtskern besteht aus der Menge

$$\Omega_0(D) = \{\omega \in \Omega(X) \mid \operatorname{Res}(\mu\omega) = 0 \text{ für alle } \mu \in F(D)\} \subset \Omega(X).$$

Der Raum $\Omega_0(D)$ besteht aber aus den holomorphen Differentialformen, die auch nach Multiplikation eines Hauptteils die Residuensumme 0 haben. Falls $\operatorname{ord}_a(\omega) < \operatorname{ord}_a(\mu)$, verschwindet $\operatorname{Res}_a \mu\omega$ jedoch nicht unbedingt, das heißt, für jedes $a \in X$ muss $\operatorname{ord}_a(\omega) \geq \operatorname{ord}_a(\mu)$ gelten. Damit besteht $\Omega_0(D)$ aus allen holomorphen Differentialformen, die durch den Divisor D nach unten beschränkt sind. Also ist

$$\Omega_0(D) = \Omega(D) = \{\omega \in \Omega(X) \mid (\omega) \geq D\}.$$

Wir erinnern uns, dass $\dim(\Omega(D))$ gerade mit $i(D)$ definiert wurde.

Indem wir nun die Kerne herausteilen, erhalten wir eine nicht-entartete Paarung

$$F(D)/F_0(D) \times \Omega(X)/\Omega_0(D) \to \mathbb{C} \ , \ (\mu, \omega) \mapsto \operatorname{Res}(\mu\omega).$$

Da alle verwendeten Vektorräume endlichdimensional sind, müssen die beiden Faktoren die gleiche Dimension haben, da es nun einen Isomorphismus zwischen $F(D)/F_0(D)$ und $(\Omega(X)/\Omega_0(D))^*$ beziehungsweise zwischen $(F(D)/F_0(D))^*$ und $\Omega(X)/\Omega_0(D)$ gibt. Damit gilt

$$\deg(D) - \dim(F_0(D)) = g - i(D).$$

Nach dem Satz von Riemann-Roch folgt letztendlich die Behauptung

$$\dim(F_0(D)) = l(D) - 1.$$

Also kann man zu jedem Hauptteilsystem μ, welches $Res(\mu\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega(X)$ erfüllt, eine meromorphe Funktion finden, welche die von μ vorgegebenen Hauptteile besitzt.

□

Beispiel 4.9. *Falls die kompakte Riemannsche Fläche X das Geschlecht 0 hat, so gibt es zu jedem Hauptteilsystem eine meromorphe Funktion mit genau den vorgegebenen Hauptteilen, da $\Omega(X) = \{0\}$. Nach [Far92, III.4.9 Corollary 1] ist jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0 isomorph zu der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$.*

5 Das Abelsche Theorem

Wir haben gesehen, unter welchen Voraussetzungen es meromorphe Funktionen zu vorgegebenen Hauptteilen auf kompakten Riemannschen Flächen gibt. Als Nächstes interessieren wir uns für vorgegebene Null- und Polstellen. Nach Satz 3.6 muss die Summe der Nullstellenordnungen der Summe der Polstellenordnungen entsprechen, damit eine solche Funktion überhaupt existieren kann. Diese Bedingung ist jedoch nicht immer hinreichend. Im weiteren Verlauf werden alle notwendigen und hinreichenden Bedingungen erläutert, die die Existenz dieser meromorphen Funktion sichern.

5.1 Funktionen zu vorgegebenen Divisoren

Sei X eine Riemannsche Fläche und D ein Divisor auf X. Falls D ein Hauptdivisor ist, es also eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ gibt, sodass $(f) = D$ gilt, so bezeichnet man f als *Lösung* von D. Die Funktion f hat an den von D vorgeschriebenen Stellen Null- und Polstellen mit der vorgegebenen Ordnung. Falls X kompakt ist, so kann D höchstens dann eine Lösung haben, falls $\deg(D) = \sum_{x \in X} D(x) = 0$.

Definition 5.1. *Sei* $X_D = \{x \in X \mid D(x) \geq 0\}$*. Dann heißt* $f \in C^\infty(X_D)$ schwache Lösung von D*, falls zu jedem* $a \in X$ *eine Koordinatenumgebung* (U, z) *mit* $z(a) = 0$ *existiert, sowie eine Funktion* $\psi \in C^\infty(U)$ *mit* $\psi(a) \neq 0$*, sodass*

$$f = \psi z^k \text{ in } U \cap X_D, \text{ wobei } k = D(a). \tag{5.1}$$

Eine schwache Lösung f von D ist genau dann eine Lösung von D, falls f auf X_D holomorph ist.

5.2 Logarithmische Ableitung

Sei f eine schwache Lösung des Divisors D und sei $\operatorname{supp}(D) = \{x \in X \mid D(x) \neq 0\}$ der Träger von D, dann ist die Funktion $\frac{df}{f}$ eine auf $\operatorname{supp}(D)^C$ differenzierbare Differentialform. Für $a \in \operatorname{supp}(D)$ und $k = D(a)$ erhält man wegen (5.1):

$$\frac{df}{f} = \frac{d(\psi z^k)}{\psi z^k} = \frac{d\psi z^k}{\psi z^k} + k\frac{z^{k-1}dz\psi}{\psi z^k} = k\frac{dz}{z} + \frac{d\psi}{\psi}$$

und $\frac{d\psi}{\psi}$ hat bei a keine Singularität (da $\psi(a) \neq 0$). Für jede Differentialform $\sigma \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ mit kompaktem Träger existiert damit

$$\int_X \frac{df}{f} \wedge \sigma.$$

Bemerkung 5.2. *Es gilt*

$$\frac{\overline{\partial} f}{f} = \frac{\overline{\partial} \psi}{\psi},$$

da die Koordinatenfunktion z *holomorph ist. Damit ist* $\frac{\overline{\partial} f}{f}$ *auf ganz* X *differenzierbar und* $\frac{\overline{\partial} f}{f} \in \mathcal{E}^{(0,1)}$.

Lemma 5.3. *Sei* X *eine Riemannsche Fläche und seien* $a_1, \ldots, a_j \in X$ *paarweise verschiedene Punkte, sowie* $k_1, \ldots, k_j$ *natürliche Zahlen. Sei* $D \in \operatorname{Div}(X)$ *ein Divisor mit* $D(a_j) = k_j$ *für* $j = 1, \ldots, n$ *und* $D(x) = 0$ *sonst. Dann gilt für eine schwache Lösung* f *von* D *und eine beliebige Funktion* $g \in C^\infty(X)$ *mit kompaktem Träger:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=1}^{n} k_j g(a_j). \tag{5.2}$$

Beweis. Da f eine schwache Lösung von D ist, existieren nach (5.1) Koordinatenumgebungen $(U_j)_{j=1}^n$, sodass

$$f = \psi_j z_j^{k_j}$$

in $U_j \setminus \{a_j\}$, mit $\psi_j \in C^\infty(U_j)$ und $\psi_j(x) \neq 0$ für alle $x \in U_j$. Für alle $j = 1, \ldots, n$ sei φ_j nun eine differenzierbare Funktion, deren Träger in U_j liegt und nahe bei a_j identisch 1 ist. Wir definieren

$$g_j = \varphi_j g \in C^\infty(U_j).$$

Für

$$g_0 := g - (g_1 + \ldots + g_n)$$

liegt $\operatorname{supp}(g_0)$ kompakt in $X \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$, da g und g_j in der Nähe von a_j übereinstimmen.

Weiterhin ist nach Satz 3.5

$$\int_X \frac{df}{f} \wedge dg_0 = -\int_X dg_0 \wedge \frac{df}{f} = -\int_X d\left(g_0 \frac{df}{f}\right) = 0,$$

da der Träger von $g_0 \frac{df}{f}$ kompakt in X liegt. Es ist also

$$\int_X \frac{df}{f} \wedge dg = \sum_{j=0}^{n} \int_{U_j} \frac{df}{f} \wedge dg_j = \sum_{j=0}^{n} \int_{U_j} k_j \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j + \frac{d\psi_j}{\psi_j} \wedge dg_j.$$

Da auch $\left(g_j \frac{d\psi}{\psi}\right)$ für alle $j = 1, \ldots, n$ einen kompakten Träger in X hat, verschwindet der zweite Teil des Integrals. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \int_{U_j} k_j \frac{dz_j}{z_j} \wedge dg_j &= \sum_{j=0}^{n} k_j \int_{U_j} d\left(g \frac{dz_j}{z_j}\right) = \\ = \sum_{j=0}^{n} k_j \int_{\partial U_j} \left(g \frac{dz_j}{z_j}\right) &= 2\pi i \sum_{j=1}^{n} k_j g(a_j).\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

5.3 Ketten und Zyklen

Um eine hinreichende Bedingung zur Existenz der Lösung eines Divisors angeben zu können, muss zunächst der Begriff einer Kette erläutert werden.

Definition 5.4. *Sei X eine Riemannsche Fläche. Dann bezeichnet man mit einer 1-Kette auf X eine formale Linearkombination*

$$c = \sum_{j=1}^{k} n_j c_j, \quad n_j \in \mathbb{Z}$$

von stetigen Abbildungen $c_j\colon [0,1] \to X$. Die Menge aller 1-Ketten wird mit $\mathrm{C}_1(X)$ bezeichnet und bildet auf natürliche Weise eine abelsche Gruppe.

Nun kann für eine geschlossene Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ das Integral über c durch

$$\int_c \omega := \sum_{j=1}^{k} n_j \int_{c_j} \omega \tag{5.3}$$

erklärt werden.

Definition 5.5. *Der Randoperator von* $\mathrm{C}_1(X)$ *ist die Abbildung*

$$\partial \colon C_1(X) \to \mathrm{Div}(X),$$

die wie folgt definiert ist:

Sei $c\colon [0,1] \to X$ *eine Kurve. Dann ist* $\partial c = 0$*, falls* c *geschlossen ist, also* $c(0) = c(1)$*. Ansonsten setze den Wert des Divisors* ∂c *an der Stelle* $c(1)$ *auf* 1*, an der Stelle* $c(0)$ *auf* -1 *und an allen anderen Stellen auf* 0*. Für eine allgemeine 1-Kette* $c = \sum n_j c_j$ *sei* $\partial c := \sum n_j \partial c_j$*.*

Für jede 1-Kette gilt damit $\deg(\partial c) = 0$, außerdem existiert für jeden Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche mit $\deg(D) = 0$ eine 1-Kette c mit $\partial c = D$. Schreibe nämlich D als $D_1 + \ldots + D_k$, wobei jedes D_i jeweils in nur einem Punkt a_i den Wert $+1$ sowie in einem Punkt b_i den Wert -1 annimmt und ansonsten Null ist. Dann gilt für $c := c_1 + \ldots + c_k$, wobei c_i die Punkte b_i und a_i verbindet, dass $\partial c = D$ ist.

Definition 5.6. *Als Gruppe der* 1-Zyklen *auf* X *bezeichnet man*

$$\mathrm{Z}_1(X) = \mathrm{Ker}\left(\mathrm{C}_1(\mathrm{X}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Div}(X)\right).$$

Jede geschlossene Kurve ist unter anderem ein 1-Zyklus.

Für einen Divisor D unterscheiden sich zwei 1-Ketten c_1 und c_2, die $\partial c_1 = \partial c_2 = D$ erfüllen, um einen 1-Zyklus $\alpha \in \mathrm{Z}_1(X)$, da $\partial(c_1 - c_2) = 0$ ist.

Definition 5.7. *Zwei Zyklen* $c_1, c_2 \in \mathrm{Z}_1(X)$ *heißen homolog, falls für jede geschlossene Differentialform* $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}$ *gilt, dass*

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega. \tag{5.4}$$

Die Menge aller Homologieklassen bilden eine abelsche additive Gruppe und werden mit der ersten Homologiegruppe von X *bezeichnet. Man schreibt dafür* $H_1(X)$*. Für einen Zyklus* $\gamma \in H_1(X)$ *ist das Integral* $\int_\gamma \omega$ *für eine geschlossene Differentialform wohldefiniert.*

Bemerkung 5.8. *Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von* $\pi_1(X)$ *nach* $H_1(X)$*, da homotope Kurven homolog sind. Die Abbildung ist im allgemeinen nicht injektiv, da* $\pi_1(X)$ *nicht abelsch sein muss.*

Lemma 5.9. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $c\colon [0,1] \to X$ eine Kurve und U eine relativ-kompakte offene Umgebung von $c([0,1])$ (also $\overline{U}$ kompakt). Dann existiert für den Divisor ∂c eine schwache Lösung f mit $f\big|_{X\setminus U} \equiv 1$, sodass für jede geschlossene Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ gilt:*

$$\int_c \omega = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f} \wedge \omega. \tag{5.5}$$

Beweis. Als Erstes betrachten wir den einfacheren Fall, dass es eine Koordinatenumgebung (U, z) in X gibt, sodass die Kurve c ganz in U liegt. Wir können annehmen, dass $z(U)$ der Einheitskreis ist und deshalb U mit dem Einheitskreis identifizieren.

Sei $a := c(0)$ und $b := c(1)$. Es gibt ein $r > 0$, sodass c komplett im Kreis um 0 mit dem Radius r liegt.

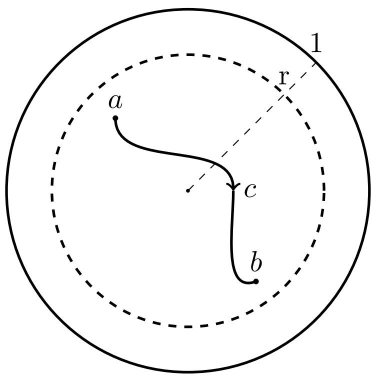

Abbildung 3: Existenz der schwachen Lösung

Die Funktion $\log\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$ besitzt in $\{r < |z| < 1\}$ einen eindeutigen holomorphen Zweig. Sei nun $\psi \in C^\infty(U)$, sodass $\psi \equiv 1$ innerhalb des Kreises mit Radius r, und $\psi \equiv 0$ am Rand des Einheitskreises. Betrachte die zusammengesetzte Funktion

$$f_0(z) = \begin{cases} \exp(\psi \log\left(\frac{z-b}{z-a}\right)) & \text{für } r < |z| < 1, \\ \frac{z-b}{z-a} & \text{für } |z| \leq r. \end{cases} \tag{5.6}$$

f_0 ist eine auf $U\setminus\{a\}$ glatte Funktion und kann durch 1 auf $X\setminus U$ zu einer Funktion $f \in C^\infty(X\setminus\{a\})$ fortgesetzt werden. Nach Konstruktion ist f eine schwache Lösung des Divisors ∂c. Wir überprüfen nun, ob diese Funktion die gewünschte Darstellung hat. Sei also $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ eine geschlossene Differentialform. Da U einfach zusammenhängend ist und ω nach [For77, Satz 13.2] eine Stammfunktion besitzt, existiert ein $g \in \mathcal{E}(X)$ mit kompaktem

Träger, sodass $\omega\big|_U = dg$ gilt. Also folgt mit Lemma 5.3:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f}\wedge\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df}{f}\wedge dg = g(b) - g(a) = \int_a^b dg = \int_c \omega$$

Für den allgemeinen Fall existiert eine Unterteilung $0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$, sodass es Koordinatenumgebungen (U_j, z_j) für $j = 1, \ldots, n$ gibt mit

- $c([t_{j-1}, t_j]) \subset U_j$,
- $z_j(U_j) \subset \mathbb{C}$ ist der Einheitskreis.

Für $c_j = c\big|_{[t_{j-1},t_j]}$ existiert nach obigem Beweis eine schwache Lösung f_j des Divisors ∂c_j mit $f_j\big|_{X\setminus U_j} \equiv 1$ und

$$\frac{1}{2\pi i}\int_X \frac{df_j}{f_j}\wedge\omega = \int_{c_j}\omega$$

für alle geschlossenen Differentialformen $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$. Multipliziert man alle diese f_j, so erhält man eine allgemeine Lösung. □

Satz 5.10 (Abelsches Theorem)**.** *Sei D ein Divisor auf einer kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht g mit $\deg(D) = 0$. D ist genau dann lösbar, das heißt es existiert eine Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $(f) = D$, wenn es eine 1-Kette $c \in \mathrm{C}_1(X)$ mit $\partial c = D$ gibt, sodass*

$$\int_c \omega = 0 \tag{5.7}$$

für alle $\omega \in \Omega(X)$.

Bemerkung 5.11. *Die Bedingung (5.7) muss nur für eine Basis von $\Omega(X)$ nachgewiesen werden.*

Bemerkung 5.12. *Die Bedingung (5.7) lässt sich auch anders formulieren: Sei $\gamma \in \mathrm{C}_1(X)$ eine beliebige 1-Kette mit $\partial\gamma = D$, dann gibt es einen Zyklus $\alpha \in \mathrm{Z}_1(X)$ ($\alpha = \gamma - c$), sodass*

$$\int_\gamma \omega_j = \int_\alpha \omega_j$$

für $j = 1, \ldots, g$ und eine Basis $\omega_1, \ldots, \omega_g$ von $\Omega(X)$.

Beweis. Für den Fall, dass X eine kompakte Riemannsche Fläche des Geschlechts 0 ist, gilt $\Omega(X) = \{0\}$. Das Abelsche Theorem reduziert sich in diesem Fall zu der Aussage, dass jeder Divisor mit $\deg(D) = 0$ ein Hauptdivisor ist. Da jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0 isomorph zur

Riemannschen Zahlenkugel ist, genügt es, $X = \hat{\mathbb{C}}$ zu betrachten. Hier können wir eine Lösung von D durch

$$f(z) = \prod_{a \in \mathbb{C}} (z-a)^{D(a)} \tag{5.8}$$

explizit angeben (vgl. [Mir95, Chapter V Proposition 2.5]). Sei nun $g \geq 1$.

„$\Leftarrow$“ Sei als erstes $c \in \mathrm{C}_1(X)$ eine 1-Kette mit $\partial c = D$, sodass die Bedingung (5.7) gilt. Nach Lemma 5.9 existiert eine schwache Lösung f von D, sodass für jede geschlossene Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}$ gilt:

$$\int_c \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_X \frac{df}{f} \wedge \omega.$$

Für jede holomorphe Differentialform $\omega \in \Omega(X)$ gilt damit nach (5.7):

$$0 = \int_c \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_X \frac{df}{f} \wedge \omega.$$

Da ω holomorph ist, verschwindet $\overline{\partial}\omega$. Damit gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_X \frac{df}{f} \wedge \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_X \frac{\overline{\partial} f}{f} \wedge \omega.$$

Am Anfang des Kapitels haben wir bemerkt, dass $\sigma = \frac{\overline{\partial} f}{f} \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$. Nach [For77, Satz 19.9] gibt es eine orthogonale Zerlegung

$$\mathcal{E}^{(0,1)}(X) = \overline{\partial} C^\infty(X) \oplus \overline{\Omega(X)} \tag{5.9}$$

bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle := \int_X \omega_1 \wedge *\omega_2, \tag{5.10}$$

wobei $*$ der Hodge-* Operator ist (siehe [For77, Skalarprodukt 19.5]). Für $\omega = \omega_1 + \omega_2$ mit $\omega_1 \in \mathcal{E}^{(1,0)}(X)$ und $\omega_2 \in \mathcal{E}^{(0,1)}(X)$ ist $*\omega = i(\overline{\omega_1} - \overline{\omega_2})$. Da $\int_X \sigma \wedge \omega = 0$ für alle $\omega \in \Omega(X)$, gilt $\sigma \perp \overline{\Omega(X)}$, es existiert also aufgrund der orthogonalen Zerlegung ein $g \in C^\infty(X)$ mit $\overline{\partial} g = \sigma$.

Setze nun

$$F = e^{-g} f.$$

Genau wie f ist auch F eine schwache Lösung von D, weiterhin gilt

$$\overline{\partial} F = (\overline{\partial} e^{-g}) f + e^{-g} \overline{\partial} f = -e^{-g} f \overline{\partial} g + e^{-g} \overline{\partial} f = 0$$

und damit ist F die gesuchte meromorphe Lösung von D auf X.

„$\Rightarrow$“(Orientiert sich an dem Beweis von [Jost06, Theorem 5.9.1])

Schreibe den Hauptdivisor $D = \sum_{j=1}^N (a_j - b_j)$ mit $a_j, b_j \in X$, die nicht unbedingt verschieden sein müssen. Für $c = \sum_{j=1}^N c_j$, wobei c_j eine Kurve ist, die b_j und a_j verbindet, gilt also $\partial c = D$. Sei also $g \in \mathcal{M}(X)$ eine meromorphe Funktion mit $(g) = D$. Wir betrachten die Funktion

$$\varphi\colon \operatorname{Div}_0(X) \to \mathbb{C}^g;$$
$$D \mapsto (\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g),$$

wobei $\operatorname{Div}_0(X) \subset \operatorname{Div}(X)$ die Divisoren D mit $\deg(D) = 0$ sind. Die Behauptung ist bewiesen, falls $\varphi(D) = (\int_\alpha \omega_1, \ldots, \int_\alpha \omega_g)$, für ein $\alpha \in \mathrm{Z}_1(X)$. Sei $\operatorname{Jac}(X) := \mathbb{C}^g/\{(\int_\alpha \omega_1, \ldots, \int_\alpha \omega_g) \mid \alpha \in H_1(X)\}$. Im nächsten Kapitel sehen wir, dass $\operatorname{Jac}(X)$ ein Gitter in C^g ist, es also eine natürliche Topologie gibt, für die $C^g \to \operatorname{Jac}(X)$ die universelle Überlagerung ist.

Betrachte die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{CP}^1 \to \operatorname{Jac}(X),$$
$$[\lambda_0, \lambda_1] \mapsto \varphi((\lambda_0 g + \lambda_1)),$$

wobei $[\lambda_0, \lambda_1]$ die Äquivalenzklasse des Punktes (λ_0, λ_1) in dem projektiven Raum $\mathbb{CP}^1$ ist. Wir wissen, dass $\mathbb{CP}^1$ isomorph zu der Sphäre S^1 und auch zu der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$ ist, also einfach zusammenhängend und kompakt ist. Die Funktion ψ ist stetig, außerdem ist $\mathbb{CP}^1$ einfach zusammenhängend, also kann ψ zu einer stetigen Funktion

$$\tilde{\psi}\colon \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{C}^g$$

hochgehoben werden. Da die Null- und Polstellen von $\lambda_0 g + \lambda_1$ holomorph von λ_0 und λ_1 abhängen, sind alle Komponenten von $\tilde{\psi}$ holomorph und da $\mathbb{CP}^1$ kompakt ist, müssen diese damit konstant sein. Also war auch schon ψ konstant. Damit folgt, dass

$$\varphi(D) = \psi([1,0]) = \psi([0,1]) = 0.$$

Also existiert ein Zyklus $\alpha \in \mathrm{Z}_1(X)$, sodass $\int_c \omega_1 = \int_\alpha \omega_i$ für $i = 1, \ldots, g$. $\square$

6 Der Satz von Jacobi

Im vorherigen Kapitel wurden die Bedingungen erläutert, unter denen ein Divisor vom Grad 0 ein Hauptdivisor ist, es also eine meromorphe Funktion mit genau den vorgegebenen Null- und Polstellen gibt. Nun betrachten wir die Struktur der Restklassengruppe der Divisoren vom Grad 0 modulo der Hauptdivisoren und zeigen, dass diese isomorph zu einem komplexen g-dimensionalen Torus ist, wobei g das Geschlecht der Riemannschen Fläche ist.

Definition 6.1. *Sei V ein N-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Untergruppe $\Gamma \subset V$ heißt Gitter, falls es N über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Vektoren $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in V$ gibt, sodass*

$$\Gamma = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_N.$$

Satz 6.2. *Eine Untergruppe $\Gamma \subset V$ ist genau dann ein Gitter, falls gilt:*

(i) *Γ ist diskret, das heißt es gibt eine Umgebung U der Null in V, sodass $U \cap \Gamma = \{0\}$.*

(ii) *Γ ist in keinem echten Untervektorraum von V enthalten.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei $\Gamma \subset V$ ein Gitter. Dann gelten (i) und (ii) trivialerweise.

„$\Leftarrow$“: Betrachte eine Teilmenge Γ von V sodass (i) und (ii) gelten. Der Beweis wird nun über Induktion über $N = \dim_{\mathbb{R}}(V)$ geführt. Für den Induktionsanfang $N = 0$ gilt die Behauptung. Betrachte nun den Induktionsschritt $N \to N+1$, also sei $\dim(V) = N+1$. Die Untergruppe Γ ist in keinem echten Untervektorraum von V enthalten, also existieren $N+1$ linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_{N+1} \in \Gamma$. Sei

$$V_1 = \langle x_1, \ldots, x_N \rangle \subset V$$

der von $x_1, \ldots, x_N$ aufgespannte Untervektorraum von V und

$$\Gamma_1 := \Gamma \cap V_1.$$

Nach der Induktionsvoraussetzung existieren N linear unabhängige Vektoren $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \in \Gamma_1 \subset \Gamma$, sodass

$$\Gamma_1 = \gamma_1\mathbb{Z} + \ldots + \gamma_N\mathbb{Z}.$$

Jeder beliebige Vekor $x \in \Gamma$ lässt sich schreiben als

$$x = c_1(x)\gamma_1 + \ldots + c_N(x)\gamma_N + c(x)x_{N+1}$$

mit $c_j(x), c(x) \in \mathbb{R}$. Der Raum

$$P = \{\lambda_1\gamma_1 + \ldots + \lambda_N\gamma_N + \lambda x_{N+1} \mid \lambda_j, \lambda \in [0,1]\}$$

ist kompakt; damit ist der Schnitt $P \cap \Gamma$ endlich. Wähle den Vektor $\gamma_{N+1} \in (\Gamma \cap P) \setminus V_1$, sodass

$$c(\gamma_{N+1}) = \min\{c(x) \mid x \in (\Gamma \cap P) \setminus V_1\} \in (0,1].$$

Dieses γ_{N+1} erfüllt nun

$$\Gamma = \Gamma_1 + \gamma_{N+1}\mathbb{Z}$$

aus folgendem Grund: Sei $x \in \Gamma$ ein beliebiger Vektor, dann existieren für $j = 1, \ldots, N$ ganze Zahlen n_j, sodass

$$x' := x - \sum_{j=1}^{N+1} n_j\gamma_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j\gamma_j + \lambda x_{N+1}$$

mit $0 \leq \lambda_j < 1$ für $j = 1, \ldots, N$ und $0 \leq \lambda < c(\gamma_{N+1})$.

Der Vektor x' liegt in $\Gamma \cap P$,. Aus der Minimalitätseigenschaft von γ_{N+1} folgt damit, dass $\lambda = 0$ ist. Folglich ist $x' \in \Gamma \cap V_1 = \Gamma_1$. Da Γ_1 ein Gitter ist, müssen alle λ_j ganzzahlig, also 0, sein. Es folgt also $x' = 0$ und damit:

$$x = \sum_{j=1}^{N+1} n_j \gamma_j \in \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_{N+1}. \qquad \square$$

6.1 Periodengitter

Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$ und sei $\omega_1, \ldots, \omega_g$ eine Basis des Vektorraums $\Omega(X)$. Dann bezeichnet man mit dem *Periodengitter* $\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ von X bezüglich der Basis $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ die Menge der Vektoren

$$\left(\int_\alpha \omega_1, \ldots, \int_\alpha \omega_g \right) \subset \mathbb{C}^g,$$

wobei α die Menge aller Kurven in der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ durchläuft. Aufgrund von Bemerkung 5.8 kann α auch alle Zyklen in $H_1(X)$ durchlaufen.

Wir zeigen nun, dass $\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ ein Gitter in $\mathbb{C}^g \cong \mathbb{R}^{2g}$ ist. Dazu benötigen wir einen Hilfssatz.

Lemma 6.3. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 1$. Dann gibt es paarweise verschiedene Punkte $a_1, \ldots, a_g$, sodass jede holomorphe Differentialform $\omega \in \Omega(X)$, die in allen Punkten $a_1, \ldots, a_g$ verschwindet, schon identisch 0 ist.*

Beweis. Für ein $a \in X$ sei

$$H_a := \{\omega \in \Omega(X) \mid \omega(a) = 0\}.$$

Dann ist entweder H_a der ganze Raum $\Omega(X)$ oder $\dim(\Omega(X)/H_a) = g - 1$. Es gilt

$$\bigcap_{a \in X} H_a = 0,$$

also muss es g Punkte $a_1, \ldots, a_g$ geben, sodass

$$H_{a_1} \cap \ldots \cap H_{a_g} = 0. \qquad \square$$

Satz 6.4. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht $g \geq 1$ und $\omega_1, \ldots, \omega_p$ eine Basis von $\Omega(X)$. Dann ist $\Gamma := \mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ ein Gitter in $\mathbb{C}^g$.*

Beweis. Wähle die Punkte $a_1, \ldots, a_g$ wie im vorherigem Lemma. Weiterhin seien (U_j, z_j) zusammenhängende disjunkte Koordinatenumgebungen von a_j mit $z_j(a_j) = 0$ für $j = 1, \ldots, g$. Es gilt dann für alle $i = 1, \ldots, g$:

$$\omega_i\big|_{U_j} = \varphi_{ij} dz_j$$

mit $\varphi_{ij} \in \mathcal{O}(U_i)$. Da die ω_i nach Voraussetzung linear unabhängig sind und auch nicht gleichzeitig in den Punkten $a_1, \ldots, a_g$ verschwinden können, hat die Matrix

$$A := (\varphi_{ij}(a_j))_{1 \le i,j \le g} \tag{6.1}$$

vollen Rang g. Sei $x = (x_1, \ldots, x_g) \in U_1 \times \ldots \times U_g$. Definiere für $i = 1, \ldots, g$

$$F_i(x) = \sum_{i=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} \omega_i, \tag{6.2}$$

wobei die Punkte a_j und x_j innerhalb von U_j verbunden werden. Dann ist die Funktion

$$F(x_1, \ldots, x_g) := (F_1(x), \ldots, F_g(x)) \tag{6.3}$$

bezüglich der Koordinatenfunktionen $z_1, \ldots, z_g$ komplex differenzierbar und hat eine Jacobimatrix folgender Form:

$$J_F(x) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial z_i}(x) \right) = (\varphi_{ij}(x_j)).$$

Für $a = (a_1, \ldots, a_g)$ ist $F(a) = A$ invertierbar. Damit ist die Menge

$$W := F(U_1 \times \ldots \times U_g) \subset \mathbb{C}^g \tag{6.4}$$

eine Umgebung von $F(a) = 0$.

Wir zeigen nun, dass $\Gamma \cap W = \{0\}$. Angenommen, es existiert ein Punkt $t \in \Gamma \cap (W \setminus \{0\})$. Das bedeutet, es existiert ein von a verschiedener Punkt $x = (x_1, \ldots, x_g) \in U_1 \times \ldots \times U_g$, sodass $F(x) \in \Gamma$. Nach eventueller Umnummerierung können wir annehmen, dass

$$x_j \neq a_j \text{ für } 1 \le j \le k \text{ und } x_j = a_j \text{ für } j > k.$$

Da $F(x)$ in Γ liegt, existiert nach dem Abelschen Theorem eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$, die an den Stellen a_j für $1 \le j \le k$ Pole erster Ordnung hat, an den Stellen x_j für $1 \le j \le k$ Nullstellen erster Ordnung hat und sonst holomorph ist. Sei $c_j z_j^{-1}$ der Hauptteil von f in a_j. Dann gilt nach dem Residuensatz

$$0 = \operatorname{Res}(f\omega_i) = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_{ij}(a_j) \text{ für } i = 1, \ldots, g,$$

da $\omega_i\big|_{U_j} = \varphi_{ij} dz_j$. Die Matrix $A = (\varphi_{ij}(a_j))$ hatte jedoch vollen Rang, also können die Zeilen nicht linear abhängig sein. Also ist Γ eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}^g$.

Bleibt zu zeigen, dass Γ in keinem echten reellen Untervektorraum von $\mathbb{C}^g$ enthalten ist. Angenommen, es gäbe einen reellen Unterraum U, sodass $\Gamma \subset U \subset \mathbb{C}^g$. Da $\mathbb{C}^g$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst wird, ist U nur unter der Skalarmultiplikation mit den reellen Zahlen abgeschlossen. Schreibe $\mathbb{C}^g$ als direkte Summe $\mathbb{C}^g = U \oplus U'$, dann ist $\dim_{\mathbb{R}}(U') > 0$. Es existiert also eine nichttriviale $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $r\colon \mathbb{C}^g \to \mathbb{R}$ mit $r|_U = 0$. Aus dieser Abbildung können wir nun wie folgt eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $c\colon \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ konstruieren, sodass $\mathrm{Re}(c) = r$. Für $z = z_1 + iz_2$ und $r(z) = (r_1 \ r_2)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ setze

$$c(z) = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ -r_2 & r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Schreibt man c als Koordinatenvektor, erhält man $c = (c_1, \dots, c_g)$. Da $c \neq 0$, ist mindestens ein $c_j \neq 0$. Betrachte nun für ein beliebiges $\alpha \in \pi_1(X)$ den Vektor $u := (\int_\alpha \omega_1, \dots, \int_\alpha \omega_g) \in U$. Damit ist

$$0 = r(u) = \mathrm{Re}(c(u)) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{g} c_j \int_\alpha \omega_j\right) = \mathrm{Re}\left(\int_\alpha \sum_{j=1}^{g} c_j \omega_j\right).$$

Nach [For77, Korollar 19.8][1] muss $\sum_{j=1}^{g} c_j\omega_j = 0$ gelten. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass die ω_j eine Basis von $\Omega(X)$ bilden.

Also ist $\mathrm{Per}(\omega_1, \dots, \omega_g)$ ein Gitter in $\mathbb{C}^g$. □

Bemerkung 6.5. *Da* $\mathrm{Per}(\omega_1, \dots, \omega_g)$ *ein Gitter in* $\mathbb{R}^{2g}$ *ist, gibt es* $2g$ *verschiedene geschlossene Kurven* $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}$, *sodass die Vektoren*

$$\gamma_j := \left(\int_{\alpha_j} \omega_1, \dots, \int_{\alpha_j} \omega_g\right) \in \mathbb{C}^g$$

für $j = 1, \dots, 2g$ *sogar reell linear unabhängig sind. Es gilt*

$$\mathrm{Per}(\omega_1, \dots, \omega_g) = \mathbb{Z}\gamma_1 + \ldots + \mathbb{Z}\gamma_{2g}.$$

Die Homologieklassen von $[\alpha_1], \dots, [\alpha_{2g}]$ *sind damit über* $\mathbb{Z}$ *linear unabhängig und erzeugen* $\mathrm{H}_1(X)$. *Als Resultat erhält man*

$$H_1(X) \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

6.2 Jacobi-Mannigfaltigkeit und Picard-Gruppe

Definition 6.6. *Sei* X *eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht* $g \geq 1$ *und* $\omega_1, \dots, \omega_g$ *eine Basis von* $\Omega(X)$. *Dann heißt*

$$\mathrm{Jac}(X) := \mathbb{C}^g / \mathrm{Per}(\omega_1, \dots, \omega_g)$$

die Jacobi-Mannigfaltigkeit *von* X. *Topologisch gesehen handelt es sich bei* $\mathrm{Jac}(X)$ *um einen* g*-dimensionalen Torus, den man als komplexe Mannigfaltigkeit auffassen kann. Uns interessiert aber nur die Gruppenstruktur und die Topologie von* $\mathrm{Jac}(X)$.

[1] Aus $\mathrm{Re}(\int_\alpha \omega) = 0$ für jede geschlossene Kurve α folgt, dass $\omega = 0$.

Zwar hängt die Definition von $\operatorname{Jac}(X)$ von der Wahl der Basis von $\Omega(X)$ ab, jedoch erhält man bei anderen Wahl eine isomorphe topologische Gruppe.

Wir bezeichnen mit $\operatorname{Div}_0(X) \subset \operatorname{Div}(X)$ die Untergruppe der Divisoren vom Grad 0, sowie mit $\operatorname{Div}_H(X) \subset \operatorname{Div}_0(X)$ die Hauptdivisoren auf X. Dann heißt

$$\operatorname{Pic}(X) = \operatorname{Div}_0(X) / \operatorname{Div}_H(X)$$

die *Picardgruppe* von X. Im Folgenden wird die Beziehung zwischen $\operatorname{Jac}(X)$ und $\operatorname{Pic}(X)$ untersucht.

Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi\colon \operatorname{Div}_0(X) \to \operatorname{Jac}(X),$$

indem jeder Divisor $D \in \operatorname{Div}_0(X)$ auf den Vektor $(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g) \in \mathbb{C}^g$ abgebildet wird, wobei $c \in \mathrm{C}_1(X)$ eine 1-Kette mit $\partial c = D$ ist und $\omega_1, \ldots, \omega_g$ eine Basis von $\Omega(X)$ bilden. Der Kern dieser Abbildung, also die Divisoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden, besteht nach dem Abelschen Theorem 5.10 aus den Hauptdivisoren. Mit dem zweiten Homomorphiesatz erhalten wir also eine injektive Abbildung

$$j\colon \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Jac}(X).$$

Satz 6.7 (Satz von Jacobi)**.** *Für jede kompakte Riemannsche Fläche X ist*

$$j\colon \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Jac}(X)$$

sogar ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $p \in \operatorname{Jac}(X)$ ein Punkt aus dem Periodengitter, der durch den Vektor $\zeta \in \mathbb{C}^g$ repräsentiert wird. Für ein hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ liegt der Vektor $\frac{1}{N}\zeta$ im Bild der bei (6.3) konstruierten Funktion F. Das heißt, es existieren für $j = 1, \ldots, g$ Punkte $a_j, x_j \in X$ und Kurven γ_j, die a_j und x_j verbinden, sodass für $c := \gamma_1 + \ldots + \gamma_g$ gilt:

$$\left(\int_c \omega_1, \ldots, \int_c \omega_g \right) = \frac{1}{N}\zeta.$$

Es gilt also für den Divisor $D := \partial c$:

$$\varphi(D) = \frac{1}{N}\zeta \mod \operatorname{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g).$$

Sei θ der Punkt, der durch den Divisor ND in $\operatorname{Pic}(X)$ repräsentiert wird, dann gilt $j(\theta) = p$. Also ist j surjektiv. □

Wir versuchen nun eine weitere Beziehung zwischen einer Riemannschen Fläche und ihrer Jacobi-Mannigfaltigkeit herzuleiten. Sei g das Geschlecht der kompakten Riemannschen Fläche X und seien $a_1, \ldots, a_g$ beliebige Punkte aus X. Wir definieren eine Abbildung

$$\psi\colon X^g \to \mathrm{Pic}(X),$$

indem ein Vektor $(x_1, \ldots, x_g) \in X^g$ auf den Divisor

$$\sum_{j=1}^{g} (D_{x_j} - D_{a_j}) \mod \mathrm{Div}_H(X)$$

abgebildet wird, wobei D_x der Divisor ist, der an der Stelle x den Wert 1 annimmt und sonst 0 ist. Nun kann man die beiden Abbildungen $\psi\colon X^g \to \mathrm{Pic}(X)$ und $j\colon \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Jac}(X)$ zu einer Abbildung

$$J\colon X^g \to \mathrm{Jac}(X)$$

zusammensetzen.

Satz 6.8. *Für jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht g ist die Abbildung*

$$J\colon X^g \to \mathrm{Jac}(X)$$

für beliebige Punkte $a_1, ..., a_g$ aus X surjektiv, wobei

$$J(x_1, \ldots, x_g) = \left(\sum_{j=1}^{g} \int_{a_j}^{x_j} \omega_i \right)_{1 \leq j \leq g} \mod \mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g). \tag{6.5}$$

Beweis. Als Erstes überprüfen wir, dass die Komposition von ψ und j genau die obige Form hat. Sei also $(x_1, \ldots, x_g) \in X^g$ beliebig gewählt. Dann ist

$$J(x_1, \ldots, x_g) = j(\psi(x_1, \ldots, x_g)) = j\left(\left[\sum_{j=1}^{g} D_{x_j} - D_{a_j} \right] \right).$$

Sei für jedes $1 \leq k \leq g$ die Abbildung $\gamma_k\colon [0, 1] \to X$ eine Kurve, die a_k und x_k verbindet. Falls $a_k \neq x_k$, so ist nach Definition

$$(\partial\gamma_k)(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x = \gamma_k(1) = x_k, \\ -1 & \text{falls } x = \gamma_k(0) = a_k, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$(D_{x_k} - D_{a_k})(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x = x_k, \\ -1 & \text{falls } x = a_k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $a_k = x_k$ gilt nach Definition $\partial\gamma_k = D_{x_k} - D_{a_k} = 0$. Also ist allgemein $\partial\gamma_k = D_{x_k} - D_{a_k}$. Damit ist $c := \sum_{k=1}^{g} \gamma_k \in \mathrm{C}_1(X)$ eine Kette mit $\partial c = D := \sum_{k=1}^{g} (Dx_k - Da_k)$. Insgesamt gilt also

$$j\left(\left[\sum_{k=1}^{g} (Dx_k - Da_k)\right]\right) = \left[\left(\int_c \omega_i\right)_{1\leq i\leq g}\right] = \left[\left(\sum_{k=1}^{g} \int_{a_k}^{x_k} \omega_i\right)_{1\leq i\leq g}\right]$$

und damit ist die Darstellung von J so wie oben beschrieben.

Da wir schon wissen, dass j surjektiv ist, bleibt die Surjektivität von ψ zu zeigen. Dazu sei $D \in \mathrm{Div}_0(X)$. Gesucht ist nun ein Vektor $(x_1, \ldots, x_g) \in X^g$, sodass

$$\sum_{k=1}^{g} D_{x_k} - D_{a_k} = D \mod \mathrm{Div}_H(X).$$

Wir definieren den Divisor

$$D' = D + \sum_{k=1}^{g} D_{a_k}.$$

Es ist $\deg(D') = g$. Nach dem Satz von Riemann-Roch gilt, dass

$$\dim(\mathcal{L}(D')) = 1 - g + \deg(D') + \dim(\Omega(D')) \geq 1.$$

Damit existiert also eine meromorphe Funktion $f \neq 0$ mit $(f) \geq -D'$. Daher gilt

$$D'' := (f) + D' \geq 0.$$

Da auch $\deg(D'') = g$, existieren g (nicht unbedingt verschiedene) Punkte $x_1, \ldots, x_g \in X$, sodass

$$D'' = \sum_{k=1}^{g} D_{x_k}.$$

Insgesamt erhält man:

$$\sum_{k=1}^{g} D_{x_k} = D'' = (f) + D' = (f) + D + \sum_{k=1}^{g} D_{a_k},$$

also

$$\sum_{k=1}^{g} (D_{x_k} - D_{a_k}) = D + (f). \qquad \square$$

Für den Fall, dass X eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 ist, lässt sich der obige Satz verschärfen.

Korollar 6.9. *Für jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht $g = 1$ ist die Abbildung*

$$J\colon X \to \mathrm{Jac}(X)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Die Abbildung $J\colon X \to \mathrm{Jac}(X)$ vereinfacht sich wie folgt: Sei $\omega \in \Omega(X)\backslash\{0\}$ eine holomorphe Differentialform, $\Gamma = \mathrm{Per}(\omega)$ und $a \in X$ beliebig. Dann ist

$$J(x) = \int_a^x \omega \mod \Gamma \in \mathbb{C}/\Gamma = \mathrm{Jac}(X).$$

Diese Abbildung ist holomorph und nach dem Jacobischen Umkehrsatz surjektiv. Sie ist jedoch auch injektiv, denn angenommen, es gäbe $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und

$$J(x) = J(y) \Rightarrow \left[\int_a^x \omega\right] = \left[\int_a^y \omega\right] \Rightarrow \int_a^x \omega - \int_a^y \omega = \int_\alpha \omega$$

für ein $\alpha \in \pi_1(X)$. Sei γ_x eine Kurve von a nach x und analog γ_y eine Kurve von a nach y. Definiere eine Kette $c = \gamma_x - \gamma_y - \alpha \in \mathrm{C}_1(X)$, sowie den Divisor $D = \partial c \in \mathrm{Div}(X)$. Dann gilt

$$\int_c \omega = 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega(X).$$

Die Voraussetzungen für das Abelsche Theorem sind also erfüllt und der Divisor D besitzt eine Lösung; das heißt eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ mit $(f) = D$. Die Funktion f hat genau einen Pol der Ordnung 1 bei x. Dies ist aber auf einer Riemannschen Fläche des Geschlechts 1 nicht möglich, da die Residuensumme 0 betragen muss, siehe Satz 4.7. Daher ist die Abbildung J für eine Riemannsche Fläche des Geschlechts 1 bijektiv und da holomorphe bijektive Abbildungen schon biholomorph sind, somit ein Isomorphismus zwischen Riemannschen Flächen. □

Bemerkung 6.10. *Eine kompakte Riemannsche Fläche des Geschlechts* 1 *nennt man auch* elliptische Kurven. *Im obigen Korollar haben wir gesehen, dass diese biholomorph zu einem Torus* $\mathbb{C}/\Lambda$ *ist, wobei* Λ *ein Gitter in der komplexen Ebene ist.*

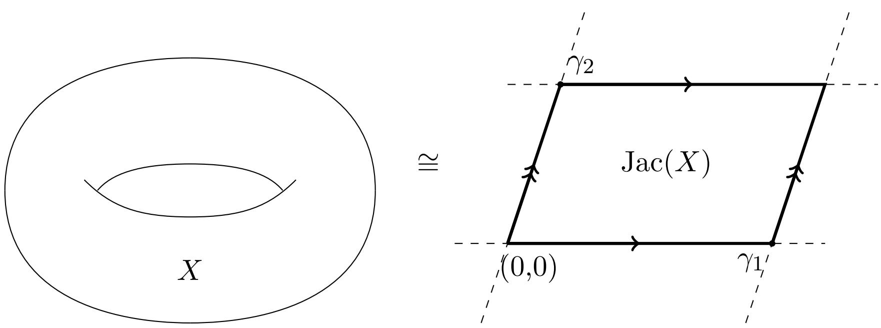

Abbildung 4: Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1

7 Elliptische Funktionen

In diesem Kapitel betrachten wir das Abelsche Theorem für den Fall, dass X vom Geschlecht $g = 1$ ist, X also eine elliptische Kurve ist. Wir wissen aus vorherigem Satz, dass X isomorph zu Jac(X) ist, also

$$X \cong \mathbb{C}/\operatorname{Per}(\omega) = \mathbb{C}/(\gamma_1\mathbb{Z} + \gamma_2\mathbb{Z})$$

mit $\gamma_1 = \int_{\alpha_1} \omega$ und $\gamma_2 = \int_{\alpha_2} \omega$, wobei ω die Basis von $\Omega(X)$ ist und $\alpha_1, \alpha_2 \in H_1(X)$ über $\mathbb{Z}$ linear unabhängige Kurven sind. Wir identifizieren die kompakte Riemannsche Fläche X mit dem Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ mit $\Gamma = \operatorname{Per}(\omega)$. Meromorphe Funktionen auf X entsprechen nun elliptischen Funktionen auf $\mathbb{C}$ mit den Perioden γ_1 und γ_2. Das Abelsche Theorem reduziert sich zu folgender Aussage:

Satz 7.1. *Sei D ein Divisor mit Grad 0 auf einer elliptischen Kurve $X = \mathbb{C}/\Gamma$, wobei $\Gamma = \gamma_1\mathbb{Z} + \gamma_2\mathbb{Z}$ ein Gitter ist. Dann existiert genau dann eine meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ (beziehungsweise eine elliptische Funktion mit den Perioden γ_1 und γ_2) mit $(f) = D$, wenn gilt:*

$$\sum_{a \in X} D(a)a = 0 \mod \Gamma.$$

Beweis. Schreibe $D = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)$ mit $a_i, b_i \in X$, die nicht unbedingt verschieden sein müssen. Für $c = \sum_{i=1}^n c_i$, wobei c_i eine Kurve ist die b_i und a_i verbindet, gilt $\partial c = D$. Der Vektorraum der holomorphen Differentialformen hat für eine elliptische Kurve die Dimension 1, das heißt, dass es eine holomorphe Differentialform ω gibt, die nicht identisch Null ist.

Aus dem Abelschen Theorem folgt, dass der Divisor D genau dann eine Lösung hat, falls

$$\int_c \omega = 0 \mod \Gamma$$

für $\partial c = D$ und $\omega \in \Omega(X) \setminus \{0\}$.

Da $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ eine universelle Überlagerung ist und die Decktransformationsgruppe der Abbildung $\operatorname{id}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aus allen Verschiebungen um $\gamma \in \Gamma$ besteht, ist nach [For77, Satz 10.3] die Differentialform dz invariant unter Decktransformationen, es gibt also eine eindeutige Differentialform $\omega \in \Omega(X)$, deren Perioden die Elemente des Gitters Γ sind und für die $\pi^*\omega = dz$ gilt. Es folgt also

$$0 = \int_c \omega = \sum_{i=1}^n \int_{c_i} \omega = \sum_{i=1}^n \int_{b_i}^{a_i} dz = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i). \tag{7.1}$$

Dies ist also äquivalent dazu, dass

$$\sum_{a \in X} D(a)a = 0, \tag{7.2}$$

und beweist damit die Aussage. □

Bemerkung 7.2. *Falls der Divisor D mit obiger Bedingung vorgegeben ist, ist es möglich, eine meromorphe Funktion, die D löst, explizit anzugeben. Seien nämlich $a_1, \ldots, a_n$ die Nullstellen von D (mit Vielfachheit gezählt), und $b_1, \ldots, b_n$ die Polstellen, sodass $0 = a_1 + \ldots + a_n - b_1 - \ldots - b_n$. Dann ist die Funktion*

$$f(z) = \frac{\sigma(z - a_1) \cdot ... \cdot \sigma(z - a_n)}{\sigma(z - b_1) \cdot ... \cdot \sigma(z - b_n)},$$

wobei $\sigma(z)$ die Weierstrasssche Sigmafunktion[2] *ist, meromorph auf X (elliptisch auf $\mathbb{C}$ zum Gitter Γ) und hat Nullstellen in $a_1, \ldots, a_n$ und Polstellen in $b_1, \ldots, b_n$ (siehe [Koe10, Kapitel I. §6.3]).*

Alle anderen Funktionen die den Divisor D lösen, unterscheiden sich nur durch einen komplexen Faktor von f.

[2] $\sigma(z) := \sigma(z, \Gamma) := z \cdot \prod_{0 \neq \nu \in \Gamma} \left(1 - \frac{z}{\nu}\right) \exp\left(\frac{z}{\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\nu}\right)^2\right)$

Literatur

[Don11] Donaldson, Simon: Riemann Surfaces. New York, London: OUP Oxford, 2011.

[Far92] Farkas, Hershel M. ; Kra, Irwin: Riemann Surfaces. 2nd ed. 1992. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992.

[Fis09] Fischer, Wolfgang ; Lieb, Ingo: Einführung in die Komplexe Analysis: Elemente der Funktionentheorie. 2010. Aufl.. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2009.

[For77] Forster, Otto: Riemannsche Flächen. London: Springer London, 1977.

[Gri11] Griffiths, Phillip ; Harris, Joseph: Principles of Algebraic Geometry. New York: John Wiley & Sons, 2011.

[Jost06] Jost, Jürgen: Compact Riemann Surfaces : An Introduction to Contemporary Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.

[Koe10] Koecher, Max; Krieg, Aloys: Elliptische Funktionen und Modulformen. 2. überarb. Aufl. 2007. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010.

[Lam09] Lamotke, Klaus: Riemannsche Flächen. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009.

[Mir95] Miranda, Rick: Algebraic Curves and Riemann Surfaces. Heidelberg: American Mathematical Soc., 1995.

[Wel08] Wells, Raymond O. ; Garcia-Prada, Oscar: Differential Analysis on Complex Manifolds. 3rd ed. 2008. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008.

Symbolverzeichnis

$\hat{\mathbb{C}}$	Riemannsche Zahlenkugel, Seite 3
$\mathcal{M}(U)$	Meromorphe Funktionen, Seite 5
$\mathcal{M}^{(1)}(U)$	Meromorphe Differentialformen, Seite 5
$\mathcal{E}^{(0,1)}(U)$	Differentialformen vom Typ (0,1), Seite 5
$\mathcal{E}^{(1)}(U)$	Differentialformen 1. Ordnung, Seite 5
$\mathcal{E}^{(1,0)}(U)$	Differentialformen vom Typ (1,0), Seite 5
$\mathcal{E}^{(1,1)}(U)$	Differentialformen vom Typ (1,1), Seite 5
$\mathcal{L}(D)$	$\{f \in \mathcal{M}(X) \mid (f) \geq -D\}$, Seite 10
$\mathcal{O}(U)$	Holomorphe Funktionen, Seite 5
$\Omega(D)$	$\{\omega \in \Omega(X) \mid (\omega) \geq D\}$, Seite 10
$\Omega(U)$	Holomorphe Differentialformen, Seite 5
$\mathrm{C}_1(X)$	1-Ketten, Seite 18
$\mathrm{Jac}(X)$	Jacobi-Mannigfaltigkeit, Seite 27
$\mathrm{ord}_a(f)$	Ordnung einer meromorphen Funktion, Seite 4
$\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$	Periodengitter, Seite 25
$\mathrm{Pic}(X)$	Picardgruppe, Seite 28
$\mathrm{Res}_a(\omega)$	Residuum, Seite 6
$\mathrm{Z}_1(X)$	1-Zyklen, Seite 19
$\partial, \overline{\partial}$	Operator, Seite 5
g	Geschlecht, Seite 9
$H^1_{\overline{\partial}}(X)$	1. Dolbeault-Kohomologiegruppe, Seite 9
$H_1(X)$	1. Homologiegruppe, Seite 19
$i(D)$	$\dim(\mathcal{M}^{(1)})$, Seite 10
$l(D)$	$\dim(\mathcal{L}(D))$, Seite 10