

## Termumformungen mit Zielvorgaben üben

Hermann Karcher, Math. Inst. Uni Bonn

In Marienland habe ich über Texte berichtet, die ich, unterstützt durch Prof. B. Krötz, zu Analysis und Geometrie geschrieben habe. Sie sollen diesen Teil der voruniversitären Mathematik angemessen darstellen, nachdem aus Schulbüchern und Lehrplänen der Kern der Mathematik, das Verstehen durch logisches Argumentieren, weitgehend verschwunden ist. Ein Wunsch war, Koautoren zu gewinnen. Diesen Wunsch möchte ich noch einmal nachdrücklich betonen.

Der Vortrag heute handelt von Termumformungen. Dies symbolische Rechnen verdanken wir dem Lehrbuch von Viète (1540-1603). Ich habe Kopien von Zetteln gesehen, auf denen Newton gerechnet hat. Seitdem glaube ich, dass die Differentialrechnung nicht ohne dies “Buchstabenrechnen” hätte erfunden werden können. Ein verständiger Umgang mit dem symbolischen Rechnen ist daher Voraussetzung für ein erfolgreiches MINT-Studium. Deshalb sind die Klagen von Dozenten von Anfängervorlesungen ernst, dass *“nicht einmal die binomischen Formeln als Handwerkszeug zur Verfügung stehen”*.

Während ich bei Analysis und Geometrie nicht mit Widerspruch gerechnet und auch nicht bekommen habe, ist es bei den Termen komplizierter. Ich möchte davon abraten, Termumformungen hauptsächlich nach dem Rezept “Vereinfache” zu üben. Stattdessen soll das zu erreichende externe Ziel im Vordergrund stehen, so wie es bei Euler’s einflußreichem Buch “Vollständige Anleitung zur Algebra” noch der Fall war.\*) – Die Universität Bielefeld stellt Euler’s Buch zur Verfügung:

[https://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/Euler\\_Algebra.ocr.pdf](https://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/Euler_Algebra.ocr.pdf)

In den zu besprechenden Texten geht es darum, durch Arbeiten mit möglichst einfachen Termen *Ziele* zu erreichen, die unabhängig von den Regeln zum Umformen formuliert sind. Die Regeln sind dazu da, beim Umformen keine Fehler zu machen, sie sagen nicht, *welche* Umformungen das angestrebte Ziel erreichen.

Es wird also darauf ankommen, dass meine Beispiele überzeugend sind.

---

\*) Der erste Satz von Eulers Vorwort zur analysis infinitorum:

*Der größte Teil der Schwierigkeiten, mit denen gewöhnlich die Jünger der mathematischen Wissenschaft bei der Erlernung der Analysis des Unendlichen zu kämpfen haben, hat nach meiner Erfahrung darin seinen Grund, dass man sich bereits an jene höhere Kunst heranwagt, bevor man noch recht die niedere Algebra sich angeeignet hat.*

## Text G2, Seite 11

Ein schönes Beispiel einfacher Streckenrechnung ist ein Dreieck mit Inkreis und Ankreisen. Die Länge der Tangenten von jeder Ecke an den gegenüber liegenden Ankreis ist gleich dem halben Dreiecksumfang.

## Text T1

Ein einfaches Beispiel von zielstrebigem Rechnungen mit Termen der Form  $3a + 4b$  ist die Bestimmung von Rechteckspflasterungen mit lauter *verschieden großen* Quadraten.

## Text T3

Übungsaufgaben der Antike sind Textaufgaben, die verlangen, etwas auszurechnen. Das ist auch noch bei Euler so. Seine Lösungen rechnen mit Termen. Häufig handelt es sich um *lineare Gleichungen* mit ein oder zwei Unbekannten. Sowohl in der Antike wie bei Euler werden auch positive *ganzzahlige* Lösungen gesucht.

## Text T4

*Quadratische Terme* kommen bei Flächeninhalten von Quadraten und Rechtecken fast von alleine vor. Schon hier sind die binomischen Formeln ein natürliches Hilfsmittel. Beim Lösen quadratischer Gleichungen sind sie dem p-q-Formel Rezept überlegen, weil jeder Zeit klar ist, *warum* sie die Lösung liefern und weil sie die Scheitelform der quadratischen Funktionen vorbereiten. Als sensationell betrachte ich die Erklärung enorm großer pythagoreischer Tripel auf babylonischen Tontafeln mit Hilfe der dritten binomischen Formel. Die antiken Mathematiker kannten schon die Tangenten der Parabel. Das ist ohne Differentialrechnung möglich, weil die binomischen Formeln genügen, um zu zeigen, dass der Graph von  $f(x) = x^2$  sich an jeder Stelle zwischen einem Kreis und dessen Tangente hindurch zwängt.

## Text T5

Gleichungen zwischen einfachen *Bruchtermen* treten bei der Behandlung ähnlicher Dreiecke auf. Eine wichtige Äquivalenzumformung solcher Gleichungen ist die Multiplikation mit dem Produkt der Nenner. Dabei entstehen Gleichungen zwischen Flächeninhalten – besonders bekannt in der Satzgruppe des Pythagoras.

Lineare Beziehungen wie das Ohmsche Gesetz  $U = R \cdot I$  und das sogenannte Ohmsche Dreieck – sogar in der MNU.

Pflasterungen von Rechtecken, deren Seitenlängen ein rationales Verhältnis haben, mit kleinen Quadraten liefern eine Veranschaulichung des Euklidischen

Algorithmus zur ggT-Bestimmung.

Der Versuch, ein DIN-Format mit kleinen Quadraten zu pflastern, führt auf einen geometrischen Irrationalitätsbeweis.

Wenn man um ein Rechteck einen Streifen der Dicke  $d$  legt, dann wächst der Flächeninhalt ungefähr um  $Umfang \times Dicke$  – um so genauer, je kleiner  $d$  ist.

Sowohl die Heronsche Flächenformel für Dreiecke wie auch die Linsenformel der Physik ergeben sich, wenn man *zwei* Paare ähnlicher Dreiecke betrachtet.

Auch die Tangenten der Hyperbel waren schon in der Antike bekannt. Nach dem Erfolg bei der Parabel überrascht es daher nicht, dass auch der Graph von  $f(x) = 1/x$  sich an jeder Stelle zwischen einem Kreis und dessen Tangente hindurchzwängt. Zum Nachrechnen braucht man wieder nur die binomischen Formeln, allerdings diesmal für Terme  $X = x + 1/x$ ,  $A = a + 1/a$ :

$$X^2 - 2A \cdot X + A^2 = (X - A)^2 \geq 0.$$

#### Text T2

Hauptthema ist die Prozentrechnung. Quadratische Terme und Bruchterme werden benutzt. Um den relativen Fehler eines Produktes aus den relativen Fehlern der Faktoren zu finden, *muss man den relativen Fehler des Produktes sehr zielstrebig komplizierter machen*. Das Vereinfachen nützt hier gar nichts.

Wichtiges Beispiel: Die Prozentrechnung kann benutzt werden, um zu große und zu kleine Approximationen  $n$ -ter Wurzeln sehr effektiv zu bestimmen.