Aus meiner Geschichte:

1. Guter Matheunterricht: 7 von 19 Abiturienten begannen 1958 ein Mathestudium und 6 beendeten es. Für mich ein Beispiel, was gute Lehre vermag.

2. Erste Anfängervorlesung 1971 verlief nicht wie geplant. Beschäftigung mit der Schulmathematik und zusammen mit Lutz Führer: Kritik der Empfehlungen NRW. Folge: Nette Einladungen zu Lehrer-Fortbildungstagungen und unangenehme Kontakte mit dem Ministerium.

3. In 1990ern Beendigung meines bildungspolitischen Einsatzes wegen Sperrung der Verbrauchsmittel der gesamten Fakultät, um Chemiker und Mathematiker zu einer Unterschrift zu zwingen. Danach meine beiden erfolgreichsten Anfängervorlesungen.

4. 2008 Jahr der Mathematik, Zusammenarbeit mit Rheinischem Landesmuseum: Vorträge für Schulklassen, Amos-Comenius-Schule: Woche der Mathematik.

5. 2019 Kopien aus Schulbüchern bekommen, 2020 viele Schulbücher angesehen.

6. 2021 Aus Schulbüchern - wirklich! -- von MDMV nicht gedruckt, auf Homepage.

7. Ab 2022 Krötz kennen gelernt und an Texten zur Schulmathematik geschrieben.

8. Warum ich hier bin:
Ich finde völlig unmöglich, was in den Schulbüchern aus der Mathematik geworden ist, wobei für mich das Verschwinden logischer Argumentationen am schlimmsten ist. Ich möchte die voruniversitäre Mathematik so schön wie irgend möglich darstellen und ich hoffe dabei auf mehr Hilfe, als ich bisher bekommen habe. Ich strebe an, dass Studienanfänger im Lehramt Mathematik die Texte lesen können und leider befürchte ich, dass dafür die Texte noch zu schwierig sind.
Sie stehen hier:

https://www.math.uni-bonn.de/people/karcher/Schulbuchverbesserungen.html

Nun zu den Inhalten.

Die massivste Kritik von Oberstufen- und Hochschullehrern beklagt den zu inkompetenten Umgang mit Termumformungen. Wie man das verbessern kann, weiß ich nicht. Hier etwas, um die dritte binomische Formel magisch erscheinen zu lassen.
Z2: **Argumentieren ist schön.**
Im Zusammenhang mit der Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung mache ich Reklame für das Beweisprinzip vom kleinsten Verbrecher.
Dazu zunächst ein Irrationalitätsbeweis mit der **dritten binomischen Formel,** später eine alternierende Verbesserungsformel für Quadratwurzeln:

$$(\sqrt{91}-9)(\sqrt{91}+9) = 10$$

Die Annahme einer Darstellung $\sqrt{91} = p/q$ mit **kleinstem** Nenner q ergibt

$$\sqrt{91} = -9 + \frac{10}{p/q-9} = -9 + \frac{10q}{p-9q} \text{ mit } 0 < p-9q < q \text{ wegen}$$

$$9 < p/q < 10 \;\Rightarrow\; 9q < p < 10q \;\Rightarrow\; 0 < p-9q < q.$$

Es folgt also wieder eine Darstellung mit **kleinerem** Nenner – Widerspruch!

Auf Seite 3 hatten wir die binomische Formel $(\sqrt{91}-9)(\sqrt{91}+9) = 10$ zu einem Irrationalitätsbeweis für $\sqrt{91}$ benutzt. Jetzt benutzen wir folgende Umstellung und Abschätzung:

$$9 < \sqrt{91} = 9 + \frac{10}{\sqrt{91}+9} < 10.$$

Diese Gleichung wird nun benutzt, um aus einer Nährung r_1 für $\sqrt{91}$ eine neue Näherung r_2 zu berechnen:

$$r_2 = 9 + \frac{10}{r_1+9}$$

Die oben versprochene alternierende Eigenschaft dieses Verfahrens ist offensichtlich:

$$r_1 < \sqrt{91} \Rightarrow r_2 > \sqrt{91}, \qquad r_1 > \sqrt{91} \Rightarrow r_2 < \sqrt{91}, \qquad r_1 = r_2 \Rightarrow r_1 = \sqrt{91}.$$

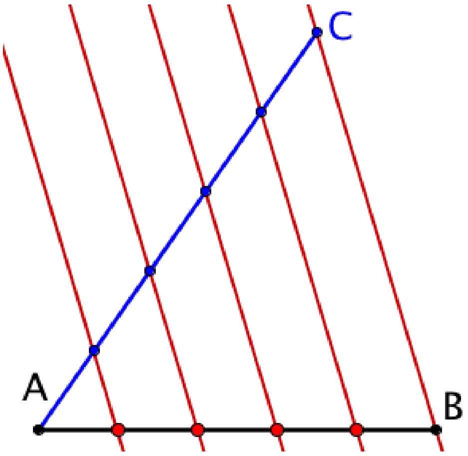
Mit Prozentrechnung allein, insbesondere ohne Analysis, folgt, dass der prozentuale Fehler bei jedem Schritt um etwa den Faktor 36 kleiner wird.
Das kann man später als Fixpunkt von f(x) = 9 + 10/(x+9) wieder aufnehmen.

G1: **Anfangsargumente, Parallelenaxiom, Schnittpunktsätze, Strahlensatz.**
?? Schnittpunktsätze in tabellarischer Übersicht ??
Alle Erfahrungen, die man mit Papierfalten sammeln kann, funktionieren in den nichteuklidischen Geometrien in gleicher Weise. Die 180° Drehung ist sehr nützlich.

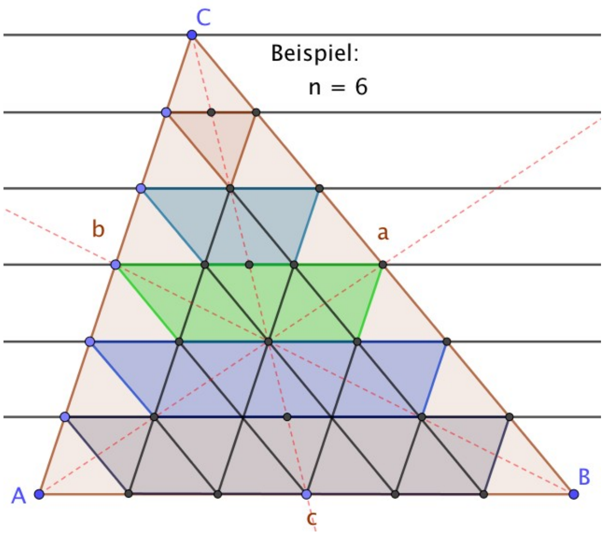
Auf den 6 ersten Seiten: Man kann **nicht** experimentell feststellen, wie sich Geraden im Unendlichen verhalten. Das Parallelenaxiom wählt die Euklidische Geometrie aus.

Es geht nicht, zum Strahlensatz zu sagen: Man vergrößert einfach. Dieser Satz muss bewiesen werden, denn er wird immerzu benutzt und gilt in anderen Geometrien nicht.

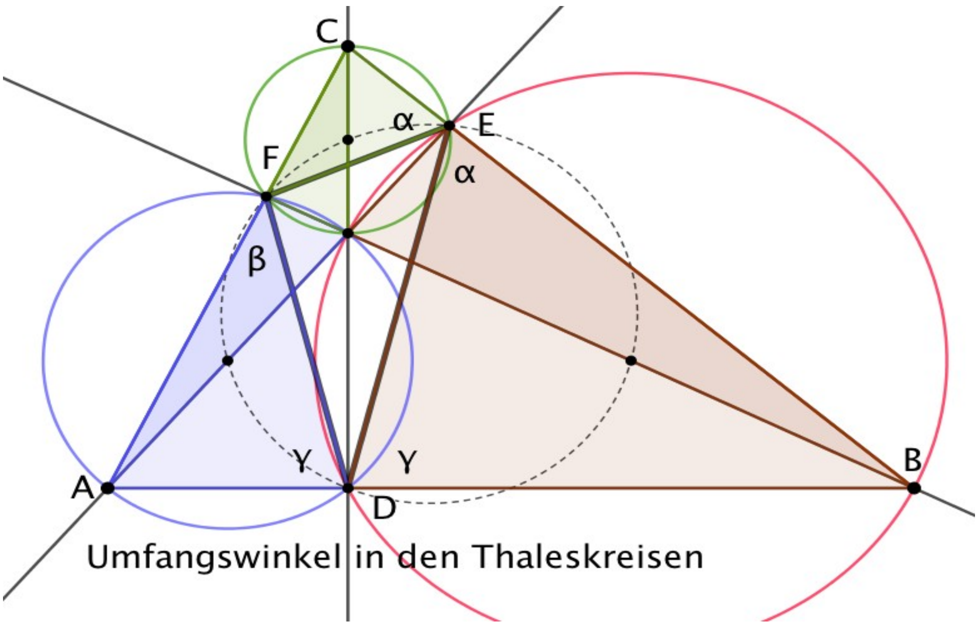
Ein Beweis mit WSW und P-Axiom (üblicher mit Flächensätzen):



Bekannte Anwendung



G2:
Kreisgeometrie: **Umfangswinkel, Sehnenprodukte, Gelenkvierecke, Ellipsen**
Höhenfußpunktsdreieck.



G3: **Flächeninhalte** vom Einheitsquadrat zu den Dreiecks- und Vierecksformeln **und zu Kreis und Parabel .**
Rechtecke mit irrationalen Seitenlängen.
Längenvergleichssatz (s.u.), Strahlensatz mit Flächeninhalten. Flächeninhalt von Kreis und Parabel. Zwei Parabelpunkte mit Tangenten - weitere Parabelpunkte?

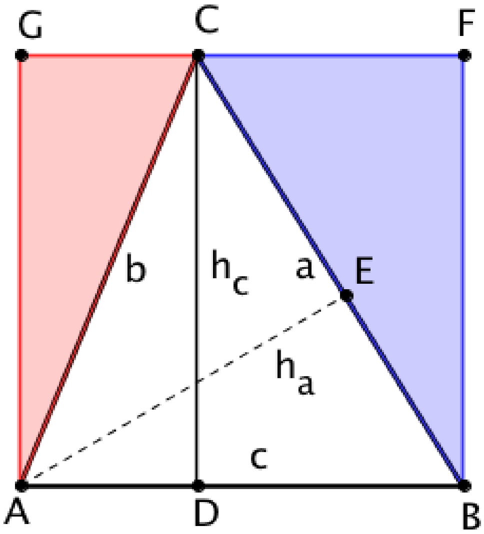
Haupteigenschaft des Flächeninhalts:

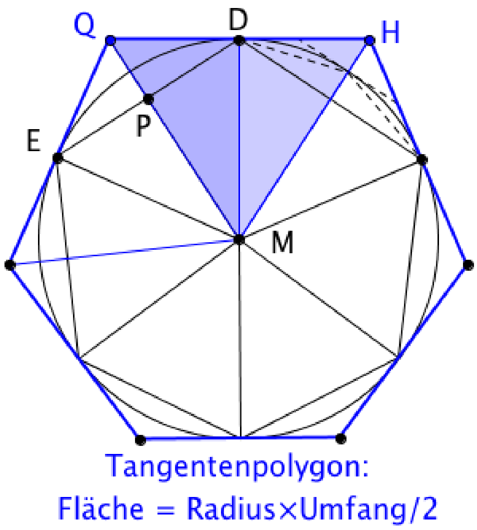
M_1 und M_2 seien zwei ebene Mengen, für die der Flächeninhalt ("area") schon bekannt ist. Dann soll auch $M_1 \cup M_2$ einen Flächeninhalt haben und es soll gelten

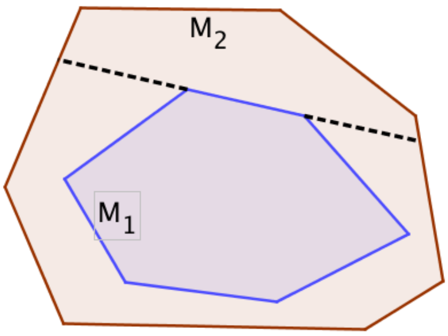
$$\text{area}(M_1 \cup M_2) \leq \text{area}(M_1) + \text{area}(M_2).$$

Sind M_1, M_2 zusätzlich ohne gemeinsame Punkte, also $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so soll gelten

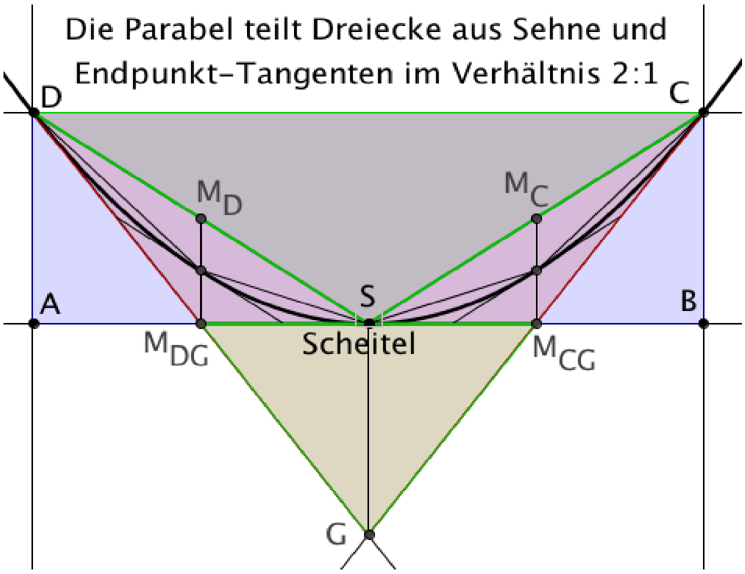
$$\text{area}(M_1 \cup M_2) = \text{area}(M_1) + \text{area}(M_2).$$







Längenvergleich konvexer Kurven



G4: **Vektorraumaxiome und Vektorgeometrie.**
Einführung unterhalb des Universitäts-Niveaus. Eher ein Lehrgang als eine Sammlung schöner Details.

G5: **Sphärische Geometrie**   Für Herrn Krötz.

A1 bis A8 Texte zur Analysis

Analysis ohne Ungleichungen gibt es nicht! Aber suchen Sie Ungleichungen in Schulbüchern.
Die Behandlung der Analysis ist weder allgemeinbildend, noch eine Vorbereitung aufs Studium. Es kommt nur vor, was die Menschen vor Newton auch schon konnten. Die Integralrechnung war schon bei Archimedes besser.

Vorschläge:
A2: Die angebotene Behandlung der **Exponentialfunktion** hat mit Mathematik nichts mehr zu tun: **Verbesserung.**
Zuerst Verbesserungen von Buchvorschlägen bei Exponentialfunktionen:
Benutze links-und rechtsseitige Sehnensteigungen und deren *Mittelwerte*!

$$0 < h \;\Rightarrow\; \frac{1-2^{-h}}{h} < \frac{2^h-1}{h} \quad \text{wegen } 2^h > 1$$
$$\text{linksseitige Sehnensteigungen} \;<\; \text{rechtsseitige Sehnensteigungen}$$
$$\frac{2^{h/2}-1}{h/2} \le 2^{h/2}\cdot\frac{2^{h/2}-1}{h} + \frac{2^{h/2}-1}{h} = \frac{2^h-1}{h}$$
$$\text{Bei Verdoppelung des rechtsseitigen Intervalls wächst die Sehnensteigung}$$

Nächster Schritt: $f(x) = 2^x$, $f'(x) = c\cdot f(x)$, $g(x) = f(x/c)$, $g'(x) = g(x)$ – ohne raten!

S.8-10 Behandlung der Exponentialfunktionen **ohne Differentialrechnung**
Rationale Exponenten seien mit Hilfe n-ter Wurzeln erledigt. Dann braucht man eine nichttriviale Ungleichung:

$$\textbf{Behauptung:}\quad a > 1,\ h \in \mathbb{Q},\ 0 < h \le 1 \;\Rightarrow\; 0 < a^h - 1 \le (a-1)\cdot h.$$

S.3-5 Behandlung der Exponentialfunnktionen unter Voraussetzung der
Differentialrechnung für rationale Funktionen.
Das wichtigste Werkzeug ist der Monotoniesatz und bei Expopnentialfunktionen in multiplikativer Form:

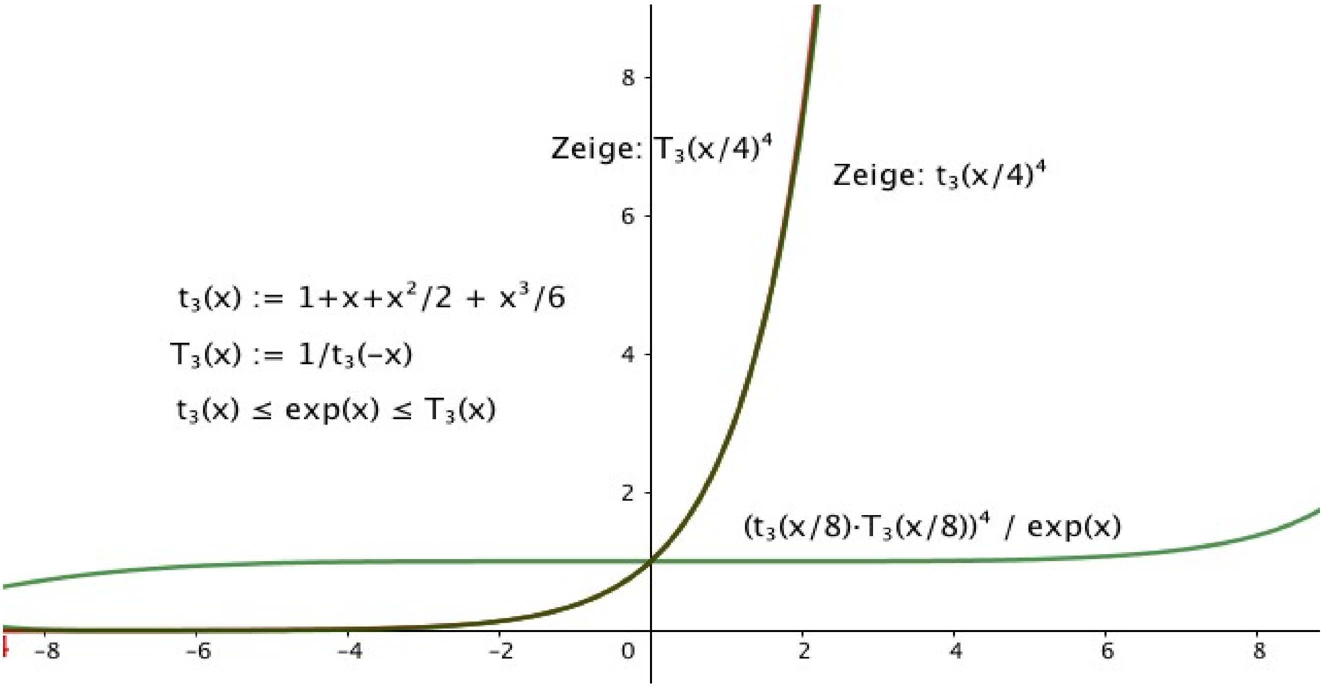
$$f, g > 0,\quad \frac{f'}{f} \le \frac{g'}{g} \;\Rightarrow\; \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g}{f}\cdot\left(\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}\right) \ge 0$$

$$\text{Mit der Folgerung:}\quad |x| < n \;\Rightarrow\; \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \exp(x) \le \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

$$\text{Andere Konsequenzen:}\quad f' = c\cdot f,\ g' = c\cdot g \;\Rightarrow\; \left(\frac{g}{f}\right)' = 0$$

$$\text{Beispiel Potenzregel:}\quad f(x) = \exp(x+a),\ g(x) = \exp a\cdot\exp(x)$$

So gut sind sehr einfache Approximationen:



A3: **Die Entwicklung der Grenzwertdefinition beginnt bei Archimedes.**

Problem: *Man kann Irrationalzahlen nur approximiert numerisch angeben*. Wer ohne Approximation reelle Zahlen als unendliche Dezimalbrüche einführen möchte, kann Addition und Multiplikation nur für endliche Dezimalbrüche definieren. also für die meisten Zahlen nicht.

Sorgfältige Begründung der Definition.
Beispiele: Zweiseitiges Newtonverfahren für x^n und exp.
Das Newtonverfahren beruht auf der (unten) eingerahmten Eigenschaft der Ableitung

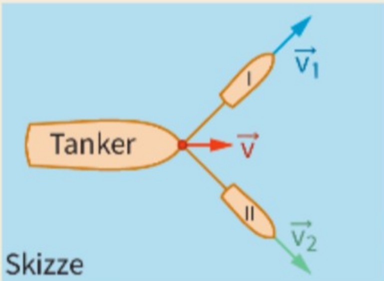
Der Monotoniesatz liefert sogar eine Fehlerkontrolle mit Hilfe einer Schranke $|f''| \leq B$, die wir aber hier nicht verwenden.

$$\boxed{f(y) - f(x) \approx f'(\xi) \cdot (y - x), \text{ genauer: } \big|(f(y) - f(x)) - f'(\xi) \cdot (y - x)\big| \leq \tfrac{1}{2}B|y - x|^2.}$$

Hier kann ξ **irgendeine** Stelle zwischen x und y sein !!

A4: **Das wird heute als "Integralrechnung" verkauft.** So furchtbar wie:

Verschiedene Geschwindigkeiten
Ein Tanker wird von zwei Schleppern in den Hafen gezogen. Beide Abschleppketten sind am Bug befestigt, die beiden Zugrichtungen schließen einen Winkel von 75° ein.
Ein Schlepper fährt mit der Geschwindigkeit 4 Knoten, der andere mit 3 Knoten. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Tanker?



A5: **Loblied auf den Monotoniesatz.**

Der Monotoniesatz

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
Voraussetzung: $x \in [a, b] \Rightarrow f'(x) \geq 0.$
Behauptung: $x < y \in [a, b] \Rightarrow f(x) \leq f(y).$

Abweichung von der Tangente.

Gegeben sei eine zweimal differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
Voraussetzung: $x \in [a, b] \Rightarrow -B \leq f''(x) \leq +B.$
Behauptung: $x, c \in [a, b] \Rightarrow |f(x) - f(c) - f'(c) \cdot (x - c)| \leq 0.5B \cdot |x - c|^2$

Und analog: Funktionen mit $f'' \geq 0$ **liegen unterhalb jeder Sehne**.

Stammfunktionen F von f und **Riemannsummen** mit L_{ab} := (b-a)max| f'|/2

$$\left|F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})\right| \leq L_{ab} \cdot \max_{i=1\ldots n} |x_i - x_{i-1}|$$

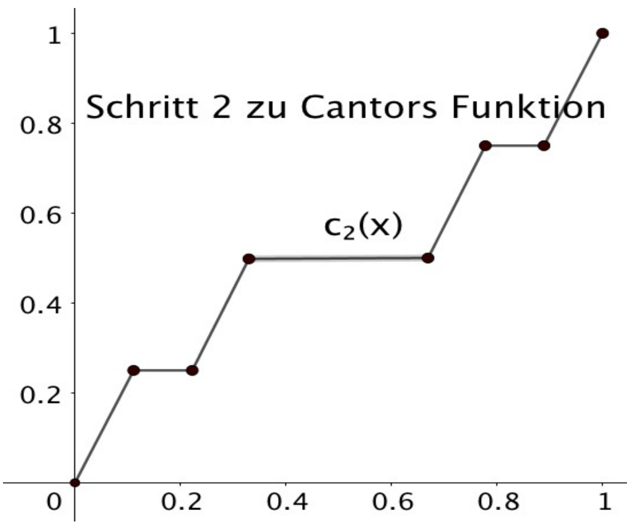
Beweise des Monotoniesatzes:
Voraussetzung: f sei auf [a, b] differenzierbar und (f (b) − f (a))/(b − a) = m.

Behauptung: Es gibt ein $\xi \in [a,b]$ mit $f'(\xi) \geq m$.

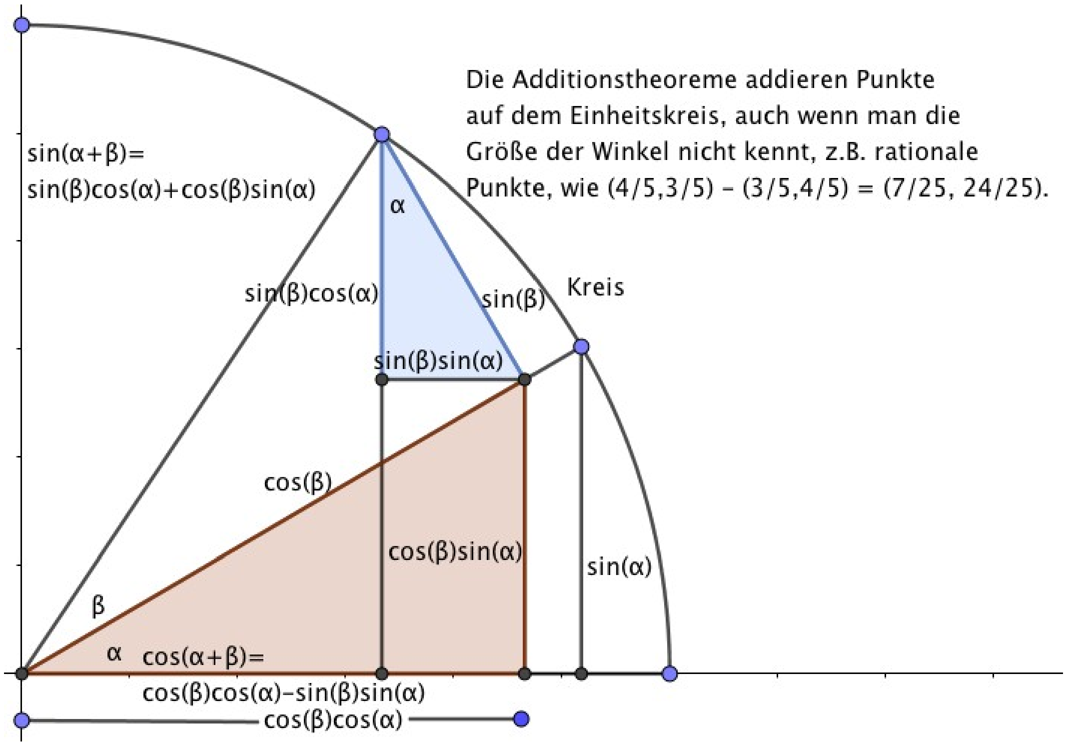
a) Grenzwertbeweis. b) Bei gleichmäßigen Voraussetzungen auch direkter Beweis.

Cantortreppe.

Beinahe ein Gegenbeispiel:
Die Ableitung existiert fast überall und ist dort 0,
das Integral über [0,1] also auch.



A6: **So schwierig waren sin und cos doch gar nicht.**
sin und cos: Von der Definition am Einheitskreis bis zur effektiven Berechnung.



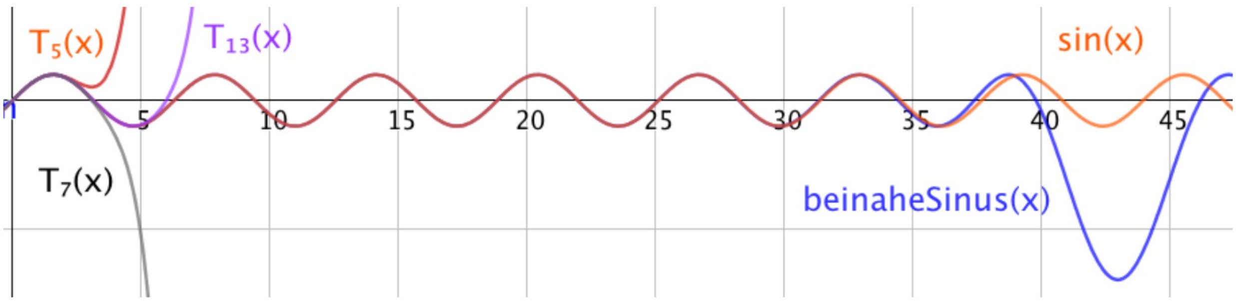
Numerische Berechnung mit Additionstheorem und Monotoniesatz:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= 3\sin(x/3) - 4\sin^3(x/3)\\ &= P_3(\sin(x/3)) = P_3(P_3(\sin(x/9))) = P_3(P_3(P_3(\sin(x/27)))).\end{aligned}$$

Wir erwarten eine sehr gute Approximation von $\sin(x)$, wenn wir hierin statt $\sin(x/27)$ eine bei 0 sehr gute Approximation der Sinusfunktion wählen, z.B. $T_5(x/27)$. Daher wird definiert:

$$\text{beinaheSinus}(x) := P_3(P_3(P_3(T_5(x/27)))).$$

Der Vergleich zwischen den Funktionen beinaheSinus (blau) und sin (rot) ist eindrucksvoll:

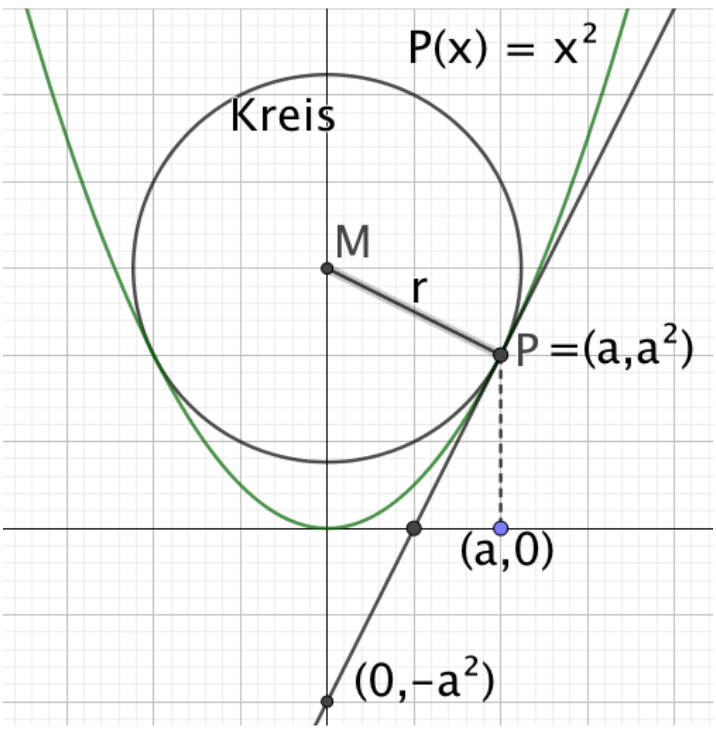


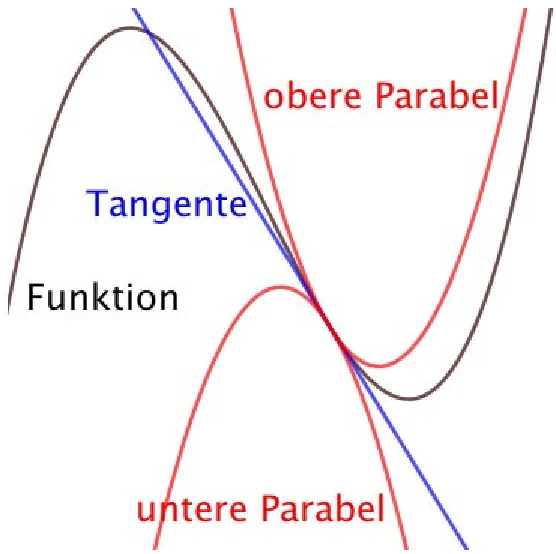
beinaheSinus(π) = -0.0000000016, beinaheSinus($5\pi/2$) = 0.9999999999995.

Man kommt also mit erreichbaren Mitteln an die Genauigkeit der TR heran.
Beachte dazu: Für 10-stellige Genauigkeit bei $x \in [0, \pi/2]$ benötigt man nur **9**(!) Multiplikationen 10-stelliger Zahlen, denn P_3 benötigt zwei und T_5 drei Multiplikationen.

A7: **Von der Kreistangente bis zum Monotoniesatz.**
Differentialrechnung der rationalen Funktionen - aufgebaut auf **Approximationen**.
Da die TR fast nur Approximationen ausgeben, plädiere ich dafür, Approximationen zu betonen, eventuell sogar stärker als Grenzwerte.

Die Parabel verläuft **zwischen** Kreis und Kreistangente.

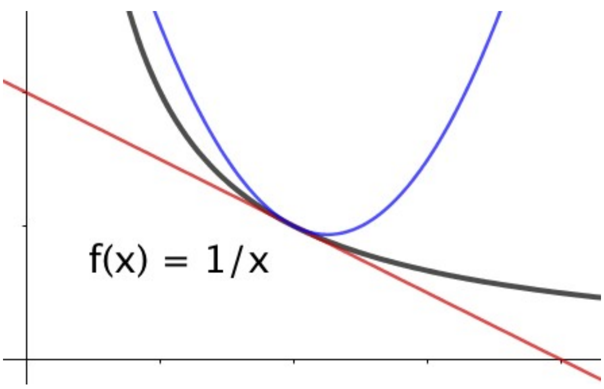


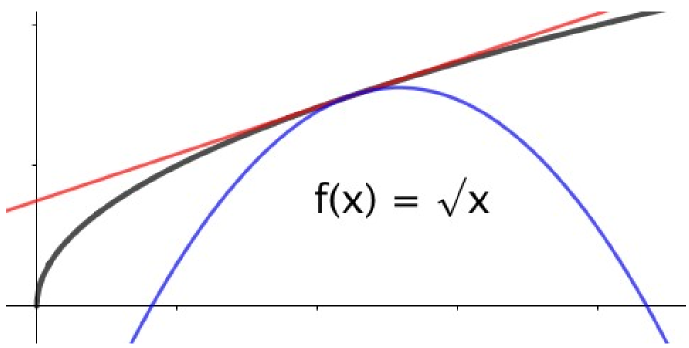


Definition einer Tangente

Parabel minus Tangente = $(x\text{-}a)^2$, (Parabel in Kreisgleichung) = $(x^2\text{-}a^2)^2$.

Weitere Beispiele:





Ableitung der Exponentialfunktion bei $x = 0$:

$1 + x \leq \exp(x) \leq (1 - x)^{-1}$

Ableitung der Sinusfunktion bei $x = 0$:

$|\sin(x) - x| \leq |x|^3$

A8: Ein Versuch, auf Schulniveau zu erklären, warum die
Erfindung der Differentialrechnung ein sensationeller Erfolg war.

Ältere Versionen dieses Textes sind von einem Schulbuchautor des vergangenen Jahrhunderts sowie von zwei heutigen Schülern gelesen und kommentiert worden. Vielen Dank.